Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LV, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

И. П. КУНЦЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ ПЛАСТИНОК, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРАГЕРА

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 6 VIII 1946)

Рассмотрим вопрос об устойчивости сжатых пластинок, считая, что материал подчиняется теории пластичности Прагера. Согласно этой теории, компоненты тензора девиатора

$$\begin{gathered} s_{xx}=\sigma_x-p, \quad s_{yy}=\sigma_y-p, \quad s_{zz}=\sigma_z-p, \\ s_{yz}=\tau_{yz}, \quad s_{zx}=\tau_{zx}, \quad s_{xy}=\tau_{xy}, \end{gathered} \tag{1}$$

и их дифференциалы связаны для несжимаемого материала с дифференциалами компонент тензора деформаций соотношениями:

$$\begin{aligned} ds_{xx}&=2\mu\left(d\varepsilon_x-\frac{s_{xx}}{2\omega^2}d_1A\right), & ds_{yz}&=2\mu\left(d\gamma_{yz}-\frac{s_{yz}}{\omega^2}d_1A\right), \\ ds_{yy}&=2\mu\left(d\varepsilon_y-\frac{s_{yy}}{2\omega^2}d_1A\right), & ds_{zx}&=2\mu\left(d\gamma_{zx}-\frac{s_{xz}}{\omega^2}d_1A\right), \\ ds_{zz}&=2\mu\left(d\varepsilon_z-\frac{s_{zz}}{2\omega^2}d_1A\right), & ds_{xy}&=2\mu\left(d\gamma_{xy}-\frac{s_{xy}}{\omega^2}d_1A\right), \end{aligned} \tag{2}$$

где μ — модуль сдвига, $\omega=\sigma_s/\sqrt{3}$ — предел текучести при кручении. При этом, если

$$dA=\sigma_x\,d\varepsilon_x+\sigma_y\,d\varepsilon_y+\sigma_z\,d\varepsilon_z+\tau_{yz}\,d\gamma_{yz}+\tau_{zx}\,d\gamma_{zx}+\tau_{xy}\,d\gamma_{xy}>0$$

(нагрузка), то $d_1A=dA$, в случае же разгрузки полагаем $d_1A=0$.

Для теории деформирования пластинок (плоское напряженное состояние) соотношения Прагера получаются в виде

$$\begin{aligned} d\sigma_x&=2\mu\left(2\,d\varepsilon_x+d\varepsilon_y+\frac{\sigma_x}{2\omega^2}d_1A\right), \\ d\sigma_y&=2\mu\left(d\varepsilon_x+2\,d\varepsilon_y+\frac{\sigma_x}{2\omega^2}d_1A\right), \\ \tau d_{xy}&=\mu\left(d\gamma_{xy}+\frac{\tau_{xy}}{\omega^2}d_1A\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим с точки зрения теории Прагера возможность существования у сжатой в направлении оси x пластинки толщины h цилиндрической искривленной формы равновесия с образующими, параллельными оси y. Аналогично теории Кармана, будем считать, что при искривлении пластинки часть ее материала получит дальнейшую деформацию (нагрузка), а остальная часть разгрузится.

Изменения напряжений и деформаций будут связаны соотнош-ниями: в области нагрузки $\left(z_0 < z < \frac{h}{2}\right)$

$$\delta\sigma_x = 2\mu\left(2\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y - \frac{\sigma_x^2}{2\omega^2}\delta\varepsilon_x\right),$$

$$\delta\sigma_y = 2\mu\left(\delta\varepsilon_x + 2\delta\varepsilon_y\right),$$

и в области разгрузки $\left(-\frac{h}{2} < z < z_0\right)$

$$\delta\sigma_x = 2\mu(2\delta\varepsilon_x + \delta\varepsilon_y),$$
$$\delta\sigma_y = 2\mu(\delta\varepsilon_x + 2\delta\varepsilon_y).$$

На границе областей нагрузки и разгрузки $\delta A = \sigma_x \delta\varepsilon_x = 0$ и, сл-довательно $\delta\varepsilon_x = \varepsilon_1 - \varkappa_1 z_0 = 0$, где ε_1 — удлинение срединной плоскос-пластинки в направлении оси x и $\varkappa_1$ — ее кривизна.

Предполагая изменения усилий $\delta T_1 = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} \delta\sigma_x\, dz$ и $\delta T_2 = \int\limits_{-h}^{+h/} \delta\sigma_y\, d$ равными нулю и учитывая, что $\delta\varepsilon_y = \varepsilon_2$, получим соотношение

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 0$$

и уравнение для определения границы $\zeta = \frac{z_0}{h/2}$ областей нагрузки разгрузки

$$\zeta^2 - 2\left[1 - 2\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_x}\right)^2\right]\zeta + 1 = 0. \quad (6$$

Значение изгибающего момента $M_1 = \int\limits_{-h/2}^{+h/2} z\delta\sigma_x\, dz = D'\varkappa_1$, где

$$D' = D\varphi, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$\varphi = 1 - \frac{3(2 - 3\zeta + \zeta^3)}{16}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s}\right)^2 \quad (7$$

показывает, что жесткость изгиба пластинки, материал которо-подчиняется законам пластичности Прагера, отличается от жесткост-абсолютно упругой пластинки множителем φ, обращающимся в еди-ницу при $\sigma_x = 0$ и уменьшающимся до 0,25 при увеличении напря-жения σ_x от 0 до предела текучести σ_s.

Из уравнения равновесия изогнутой пластинки

$$\frac{\partial^2 \delta M_1}{\partial x^2} = -h\sigma_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8)$$

следует, что критическая длина определяется формулой:

$$l = \pi\sqrt{\frac{D}{h\,|\sigma_x|}\varphi(\sigma_x/\sigma_s)},$$

$$\varphi = 1 - \frac{3(2 - 3\zeta + \zeta^3)}{16}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s}\right)^2. \quad (9)$$

При развитии пластических деформаций критическая длина имеет пределом значение

$$l = \frac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{D}{h\sigma_s}},$$

которое, по теории Генки—Мизеса, имеет критическая длина при первом появлении пластических деформаций.

Для пластинки, сжимаемой в направлении оси x и не имеющей деформации срединной поверхности в направлении оси y ($\varepsilon_y = 0$), получаем для жесткости D' формулу

$$D'' = D \frac{4\left[1 - \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s'}\right)^2\right]}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s'}\right)^2}} = D\psi\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s'}\right), \tag{10}$$

где

$$\sigma_s' = 2\omega = 1{,}155\ \sigma_s.$$

Коэффициент ψ меняется от единицы при $\sigma_x = 0$ до нуля при $\sigma_x = \sigma_s'$, т. е. на пределе пластинка полностью теряет устойчивость.

В случае пластинки, сжимаемой одинаковыми напряжениями $\sigma_x = \sigma_y$, получаем уравнение равновесия для искривленной формы

$$D'\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 dy^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + |\sigma_x| h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0, \tag{11}$$

где

$$D' = D\varphi, \quad \varphi = 1 - \frac{3(2 - 3\zeta + \zeta^3)}{16}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s}\right)^2.$$

Для квадратной шарнирно-опертой пластинки решение можно взять в виде

$$w = w_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a}, \tag{12}$$

тогда возможна потеря устойчивости, если сторона

$$a > \pi \sqrt{\frac{D}{2\pi |\sigma_x|}}\, \varphi\left(|\sigma_x|/\sigma_s\right). \tag{13}$$

Поступило
6 VIII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Prager, Прикладн. математ. и мех., 5, в. 3 (1941).