Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVIII, № 1

МАТЕМАТИКА

М. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и С. КРЕЙН

О ЦЕНТРЕ ОБЩЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 IV 1947)

1. В последних работах Е. А. Барбашина ([1], [2]) и В. В. Немыцкого ([3]) было введено понятие общей динамической системы как группы гомеоморфных преобразований компакта. Эти авторы показали, что ряд предложений, установленных Биркгофом ([4]) для обычных динамических систем, переносится на общие динамические системы.

В настоящей заметке мы показываем, что теорема, аналогичная теореме Биркгофа о вероятностном свойстве центра динамической системы, имеет место для общих динамических систем в смысле Немыцкого. При доказательстве мы предполагаем, что топологическая группа преобразований компакта связна.

2. Пусть G — связная локально-компактная * группа, удовлетворяющая второй аксиоме счетности. Для любых подмножеств S и T группы G мы будем понимать под ST совокупность всевозможных произведений элементов множества S на элементы множества T.

Обозначим через W произвольную окрестность единицы e группы G, замыкание которой компактно. Рассмотрим множества W^i $(i=1, 2, \ldots)$, состоящие из всевозможных произведений каждых i элементов из W. Множества W^i будут образовывать расширяющуюся последовательность открытых множеств ($W^i \subset W^{i+1}$), замыкание каждого из которых компактно. Как известно ([5]), связная топологическая группа является суммой всех множеств W^i. Наконец, каждое компактное множество $F \subset G$ содержится во всех W^i, начиная с некоторого i.

Нам понадобятся некоторые леммы, относящиеся к свойствам множеств W^i.

Лемма 1. *Для любого натурального l найдется такое m, что пересечение $W^m a \cap W^p$ при любом $a \in W^p$ и всяком $p \geqslant l$ содержит некоторое множество $W^l b$, где $b \in W^p$.*

Требованиям леммы будет удовлетворять такое m, при котором W^m содержит компактное множество $\overline{W^l W^{-l}}$.

Лемма 2. *Для любого натурального m найдется такое n, что $W^m \cap W^m a = 0$ при $a \bar{\in} W^n$.*

Требованиям леммы будет удовлетворять такое n, при котором W^n содержит компактное множество $\overline{W^{-m} W^m}$.

Лемма 3. *Пусть m и n — натуральные числа, удовлетворяющие условиям леммы 2. Тогда в каждом множестве $Q \subset G$ с компактным замыканием найдется конечное число элементов $a_i \in Q$ $(i=1, \ldots, r)$ таких, что множества $W^n a_i$ $(i=1, \ldots, r)$ покрывают Q, а множества $W^m a_i$ и $W^m a_j$ не имеют общих точек при $i \neq j$.*

---

* Мы предполагаем, что группа G некомпактна.

Утверждение леммы следует из леммы 2 и того, что непересекающихся множеств $W^m a$ при $a \in Q$ не может быть более конечного числа.

В дальнейшем мы будем считать, что в группе G введена правоинвариантная мера Хаара ([6]) $\operatorname{mes} A$ ($\operatorname{mes} G = \infty$).

3. Определение. Мы будем говорить, что на компакте M задана общая динамическая система, если на нем определена эффективная связная локально-компактная со второй аксиомой счетности группа G гомеоморфных преобразований (см. ([3, 7])).

Точки компакта M будем обозначать буквами x, y, z, а преобразование группы $g(x), f(x), \ldots$

Напомним следующие понятия и положения ([1, 4]). Множество $M' \subset M$ называется инвариантным, если при любом преобразовании $g \in G$ точка $g(x) \in M'$, когда $x \in M'$. Точка $x \in M$ называется блуждающей, если существует такая ее окрестность $U(x)$, что $g(U(x)) \cap U(x) = 0$ для всех g, не принадлежащих некоторому компактному множеству $Q \subset G$.

Совокупность M_1 неблуждающих точек M является замкнутым инвариантным множеством.

Теорема 1. *Для любой окрестности $V(M_1)$ множества M_1 неблуждающих точек и произвольной точки $x \in M$ найдется такое компактное множество $Q \subset G$, что $g(x) \in V(M_1)$ при всех $g \bar{\in} Q$.*

В статье Барбашина формулируется аналогичная теорема (([1]), теорема 1), в которой утверждается применительно к нашему случаю, что множество Q может быть выбрано сразу для всех точек $x \in M - V(M_1)$. Последнее утверждение неверно уже для обычных динамических систем*.

Пусть U — некоторое открытое множество M. Обозначим через $\theta(x, U)$ ($x \in M$) множество элементов $g \in G$ таких, что $g(x) \in U$. Множество $\theta(x, U)$ открыто и, следовательно, измеримо.

Теорема 2. *Для любой окрестности $V(M_1)$ множества M_1 неблуждающих точек существует константа C такая, что*

$$\operatorname{mes} \theta(x, M - V(M_1)) < C$$

для всех точек $x \in M$.

Теоремы 1 и 2 доказываются рассуждениями, аналогичными рассуждениям Биркгофа при доказательстве подобных теорем ([4]).

Рассматривая M_1 как относительное пространство, определяют множество M_2 неблуждающих в M_1 точек. Продолжая этот процесс, получают счетную систему замкнутых инвариантных множеств $M \supset M_1 \supset \ldots \supset M_\omega \supset M_{\omega+1} \supset \ldots \supset M_r = M_{r+1}$, где $M_{\alpha+1}$ — множество точек, неблуждающих в M_α, и $M_\alpha = \bigcap\limits_{i<\alpha} M_i$, если α — порядковое число второго рода.

Множество $Z = M_r$ называют центром динамической системы.

4. Пусть W опять обозначает произвольную окрестность единицы группы G. Для открытого множества $U \subset M$ будем обозначать через $\theta_i(x, U)$ ($x \in M$) множество всех $g \in W^i$ таких, что $g(x) \in U$. Очевидно, $\theta_i(x, U) = \theta(x, U) \cap W^i$.

Определение. Мы скажем, что для точки $x \in M$ существует вероятность пребывания в открытом множестве U, если существует

---

* Например, динамическая система, заданная на единичном круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$ уравнениями:

$$dx/dt = (1 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2), \quad dy/dt = 0.$$

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\mathrm{mes}\,\theta_i(x,U)}{\mathrm{mes}\,W^i}$$

и если этот предел не зависит от выбора окрестности W единицы e группы G.

Теорема 3. *Вероятность пребывания любой точки $x\in M$ в каждой окрестности U центра Z динамической системы равна* 1, *причем*

$$\frac{\mathrm{mes}\,\theta_i(x,U)}{\mathrm{mes}\,W^i}\to 1 \quad \textit{при} \quad i\to\infty$$

равномерно по всем $x\in M$.

Доказательство. Покажем по индукции, что утверждение теоремы справедливо для всех M_α $(1\leqslant\alpha\leqslant r)$.

Для M_1 это следует из теоремы 2. Если α — порядковое число второго рода, то утверждение теоремы для M_α следует из того, что каждая окрестность M_α является окрестностью и для некоторого M_β где $\beta<\alpha$.

Пусть утверждение теоремы справедливо для $M_{\alpha-1}$, докажем его для M_α. Пусть U — окрестность M_α. Выберем окрестность $V(M_\alpha)$ так, чтобы $\overline{V}\subset U$. Тогда, в силу теоремы 2, для всех точек $x\in M_{\alpha-1}$ найдется такая константа C, что $\mathrm{mes}\,\theta(x, M-V)<C$. Выберем такое l, чтобы $C<\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{mes}\,W^l$, а затем по этому l выберем последовательно m и n, как это указано в леммах 1 и 2. Непрерывность $g(x)$ как функции двух переменных $g\in G$ и $x\in M$ позволяет выбрать такую окрестность $U(M_{\alpha-1})$, что для любой ее точки y:

$$\mathrm{mes}\,\theta_n(y, M-U)<C<\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{mes}\,W^l. \tag{1}$$

Согласно предположению индукции выберем такое $p_0>n$, чтобы для всех $p\geqslant p_0$

$$\mathrm{mes}\,\theta_p(x, M-U_1)<\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{mes}\,W^l \quad \text{при всех} \quad x\in M. \tag{2}$$

Фиксируем точку x из M и покроем множество $\theta_p(x, U_1-U\cap U_1)$ (согласно лемме 3) окрестностями $W^n g_i$ $(g_i\in\theta_p(x, U_1-U\cap U_1)$; $i=1,\ldots,r)$; тогда, пользуясь правой инвариантностью меры и (1), получим:

$$\mathrm{mes}\,\theta_p(x, U_1-U\cap U_1)\leqslant \mathrm{mes}\sum_{i=1}^{r}\theta_n(g_i(x), U_1-U\cap U_1)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{r}\mathrm{mes}\,\theta_n(g_i(x), U_1-U\cap U_1)<r\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{mes}\,W^l\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{mes}\,W^p.$$

Объединяя полученное неравенство с неравенством (2), имеем

$$\mathrm{mes}\,\theta_p(x, M-U)\leqslant$$
$$\leqslant\mathrm{mes}\,\theta_p(x, M-U_1)+\mathrm{mes}\,\theta_p(x, U_1-U\cap U_1)<\varepsilon\,\mathrm{mes}\,W^p.$$

Теорема доказана.

Поступило
6 IV 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. А. Барбашин, ДАН, **51**, № 1 (1946). [2] Е. А. Барбашин, ДАН, **55**, № 4 (1947). [3] В. В. Немыцкий, ДАН, **53**, № 6 (1946). [4] Г. Биркгоф, Динамические системы, гл. VII, 1941. [5] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, гл. III, 1938. [6] A. Haar, Ann. of Math., **34** (1933). [7] D. Montgomery and L. Zippin, Duke Math. J., **4** (1938).