УДК 533.6.011

УДАРНАЯ ВОЛНА В СЖИМАЕМОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ СО ЗНАКОПЕРЕМЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В УРАВНЕНИИ СОСТОЯНИЯ

Шабловский О.Н., д. ф.-м. н., профессор, Глазунов В.И., ст. преподаватель

Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

Теоретическое и экспериментальное изучение поведения вещества в ударных волнах является актуальной проблемой нелинейной физики. В данной статье представлен численно-аналитический подход к задачам о распространении нестационарных ударных волн в сжимаемой сплошной среде, уравнение состояния которой содержит положительную и отрицательную нелинейности.

Классическая газовая динамика изучает сжимаемые среды, удовлетворяющие свойствам нормального газа [1]. В частности, для нормального газа выполнены условия

$$\frac{\partial p(\upsilon,S)}{\partial\upsilon}<0,\qquad \frac{\partial^2 p(\upsilon,S)}{\partial\upsilon^2}>0. \tag{1}$$

Термодинамически аномальная сжимаемая среда обладает свойствами

$$\frac{\partial p(\upsilon,S)}{\partial\upsilon}<0,\qquad \frac{\partial^2 p(\upsilon,S)}{\partial\upsilon^2}<0, \tag{2}$$

и в ней возможно существование ударных волн разрежения; история этого вопроса и подробная библиография имеются в [1,2]. Сильным стимулом для продолжения теоретического исследования аномалии (2) стало экспериментальное доказательство существования ударных волн разрежения [3]. Ударные тепловые волны охлаждения и нагревания в локально-неравновесных условиях рассмотрены в [4]. Данная работа является продолжением исследований [5,6] адиабатического сжатия термодинамически аномальных сред и имеет следующие цели: 1) разработка численно-аналитического подхода к некоторым ударно-волновым задачам для сжимаемых сред с реальным термическим уравнением состояния; 2) построение решений ударно-волновых задач в нормальной и аномальной термодинамических областях для среды с уравнением состояния Ван-дер-Ваальса.

Одномерное нестационарное адиабатическое движение невязкого газа будем изучать, применяя уравнения [1]:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\nu\rho u}{x}=0;\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{dp}{dx}=0;$$

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+p\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)=0;\quad \rho\upsilon=1,\ \ \varepsilon=\varepsilon(p,\upsilon),\quad T=T(p,\upsilon).$$

При обезразмеривании уравнений применяем масштабы величин, допускающие инвариантность размерной и безразмерной форм записи: $x_b = u_b t_b$, $p_b = \rho_b u_b^2$, $\varepsilon_b = u_b^2 = (c_\upsilon)_b T_b$. Условия динамической совместности Ренкина-Гюгонио на одномерном сильном разрыве $x = x_j(t)$, $N_j = dx_j/dt$ имеют вид [1]:

$$\{\rho\}N_j=\{\rho u\},\ \ \{\rho u\}N_j=\{p+\rho u^2\},\ \ \left\{\rho\left(\varepsilon+\frac{u^2}{2}\right)\right\}N_j=\left\{\rho u\left(\varepsilon+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)\right\},$$

причем к этим условиям нужно присоединить условие устойчивости ударной волны.

Рассмотрим пример течения аномального газа за ударной волной сжатия, распространяющейся по газу с обычными термодинамическими свойствами. Примем термическое уравнение состояния Ван-дер-

Ваальса $p=\dfrac{RT}{\upsilon-b}-\dfrac{a}{\upsilon^2}$, полагая $a,\ b\ -const$ для газа по обе стороны нестационарного ударного фронта. Считаем, что перед волной неоднородный по плотности газ неподвижен, $u^0=0,\ p=p^0,\ \rho^0=B/(C+x),\ x\in[x_н,x_k]$, и адиабата Пуассона обращена выпуклостью вниз, (1). Изохорная теплоемкость в этом температурном интервале считается переменной, $c_\upsilon^0=B_1+(B_2T^0/2)$. Допустим, что в ходе ударного сжатия параметры $p-\upsilon-T$ переходят в аномальную область (2), и за волной $c_\upsilon\equiv const$. Обзор работ по термодинамическому анализу устойчивости разрывов для случая знакопеременной производной $\partial^2 p(\upsilon,S)/\partial\upsilon^2$ имеется в [1]. К условиям динамической совместности присоединим условие устойчивости $S>S^0$. За масштабы давления и плотности берем их значения в критической точке. Построим решение газодинамических уравнений, применяя аналитический подход, разработанный в [7] для уравнений динамики несжимаемой вязкой жидкости. Проведем преобразование независимых переменных x,t к аргументам ξ,ρ (подробные формулы даны в [5-7]). Тогда уравнения неразрывности, движения и энергии трансформируются в три нелинейные дифференциальные уравнения для функций x,t,u,p зависящих от ξ,ρ. Для замыкания задачи возьмем дополнительное уравнение, которое обеспечивает автоматическое удовлетворение баланса масс на ударном разрыве $\xi=0$:

$$\frac{\partial x}{\partial\rho}=\frac{\rho u f(\xi)}{(\rho-\rho^0)d_0}\frac{\partial t}{\partial\rho},\qquad f(0)=d_0,$$

где $f=f(\xi)$- произвольная монотонно возрастающая функция. Решение построим в виде рядов по степеням ρ с коэффициентами, зависящими только от ξ:

$$t=t_*\ln\rho+t_\delta\rho^\delta,\quad t_*\equiv const,\ \ x=x_{\delta\text{-}1}\,\rho^{\delta\text{-}1},\ \ \delta\geq 0,$$
$$u=u_{\delta\text{-}1}\,\rho^{\delta\text{-}1},\ \ p=p_{\delta\text{-}1}\rho^{\delta\text{-}1},\ \varepsilon=\varepsilon_{\delta\text{-}2}\,\rho^{\delta\text{-}2},\quad 0<\rho_н\ \leq\rho<1, \tag{3}$$

где δ – индекс суммирования. Рекуррентные дифференциальные уравнения для коэффициентов разложений здесь не приводятся. Оценки практической сходимости рядов (3) дали хорошие результаты. Начальные значения

$$\xi=0,\ \ p_{i\text{-}2}(0)=k_{i\text{-}2},\ \ u_{i\text{-}2}(0)=l_{i\text{-}2},\ \ x_{i\text{-}2}(0)=m_{i\text{-}2},\ \ t_{i\text{-}1}(0)=n_{i\text{-}1},\ \ i\geq 1$$

определяем, фиксируя исходную координату ударного фронта $x_н=x_j(0)$, задавая начальную плотность газа $\rho_н$ за разрывом, $t(0,\rho_н)=0$, и удовлетворяя условиям непрерывности потоков импульса и энергии. Тогда, в частности, получим:

$$m_{\text{-}1}=B/g_1,\ t_*=-m_{\text{-}1}/(d_0\,l_{\text{-}1}),\ k_{\text{-}1}(1-g_1)=g_1\,l^2_{\text{-}1}>0,\ \ d_0=1/(1-g_1),$$

$$g_1=\frac{k_{-1}+\left[k_{-1}^2+8k_{-1}B_2(1+2\gamma_1)(p^0/R)^2\right]^{1/2}}{2k_{-1}(1+2\gamma_1)}, \tag{4}$$

причем в аномальной области $\gamma_1=(c_\upsilon/R)>50/3$, [3]. Величина $k_{\text{-}1}>0$ остается произвольной, и ее выбор служит обеспечению устойчивости ударной волны. Кроме того, данное решение содержит произвольную функцию $m_\delta\rho^\delta\ \geq\ 0$, которая опосредованным образом влияет на закон движения непроницаемого поршня (контактного разрыва), инициирующего ударную волну. Уравнение движения поршня $\rho=\rho_w(\xi)$, $\rho_w(0)=\rho_н$ определяется из формулы $dx_w/dt=u(x_w,t)$. Отношение плотностей газа перед и за фронтом представляется выражением $\rho^0/\rho=g_1+g_{\delta+1}\rho^{\delta+1}$.Это означает, согласно (4), что уже в первом приближении значительное влияние на течение оказывает давление p^0 и переменная теплоемкость (параметр B_2) неравномерно нагретого газа перед фронтом волны.

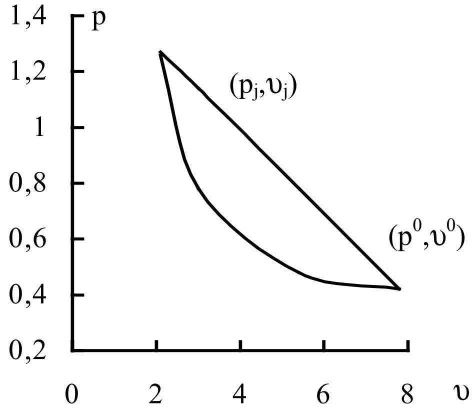

Рис.1

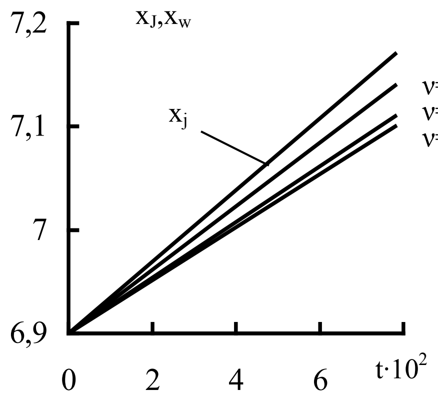

Рис.2

В случае знакопеременной нелинейности, когда нормальное состояние (1) пред-шествует аномальному состоянию (2), ударная волна является физически допустимой, если адиабата Гюгонио на плоскости (p,υ) обладает такими свойствами [1]: в точке (p_j,υ_j) она обращена выпуклостью вверх, в точке (p^0,υ^0)- выпуклостью вниз, причем $p_j > p^0, \upsilon_j < \upsilon^0$. Для примера реализации алгоритма такая кривая Гюгонио была построена (рис.1) при следующих значениях безразмерных параметров:

$\gamma_1 = 20;\ p^0 = 0.33;\ B = 1;\ C = 1;\ \rho^0_н = 0,1266;\ \rho_н = 0,8;\ p_н = 1,397;\ c_\upsilon = 1;\ a = 5,262;$
$b = 1/3;\ B_1 = -0,4378;\ B_2 = 0,02672;\ k_{-1} = 2;\ m_{-1} = 5,521;\ m_0 = m_1 = m_2 = m_3 = 0.$

В качестве рабочего газа рассматривался фреон –13 ($CClF_3$); размерные величины были взяты такими [3]:
$\rho_b = 580$ *кг/м*^{3}; $p_b = 3.968\ 10^6$ *Н/м*^{2}; $u_b = 82.71$ *м/с;*
$(c_\upsilon)_b = 1600$ *Дж/кг·град;* $x_b = 0.0827$ *м;* $(c_\upsilon{}^0)_н = 640$ *Дж / кг·град.*

Проведенные расчеты позволили получить газодинамические параметры за ударными волнами $(\nu = 0,1,2)$, распространяющимися от центра симметрии, рис.2-4. В частности, отношение скоростей звука (c_j / c_j^0) является монотонно возрастающей функцией времени, изменяющейся в промежутке [0,2;0,5) при $t \in [0;0,1]$. Для варианта $\gamma_1 = 37,5$, $p^0 = 0,76$ качественный характер течения не меняется, причем $c_j / c_j^0 \in [0,1;0,4)$.

Основные обозначения: c_υ - удельная теплоемкость при постоянном объеме; p – давление; T-температура; t - время; u - скорость одномерного движения; ε - внутренняя энергия; $\nu = 0,1,2$ - параметр, характеризующий тип пространственной симметрии (плоский, цилиндрический, сферический); ρ - плотность; υ - удельный объем; R - газовая постоянная; S - энтропийная функция; x – пространственная координата. Индексы: b - масштабы величин при обезразмеривании; j - значения функций за разрывом; ^{0} - параметры среды перед фронтом волны; w - значения функций на непроницаемой границе; точка над знаком функции – дифференцирование по ее аргументу.

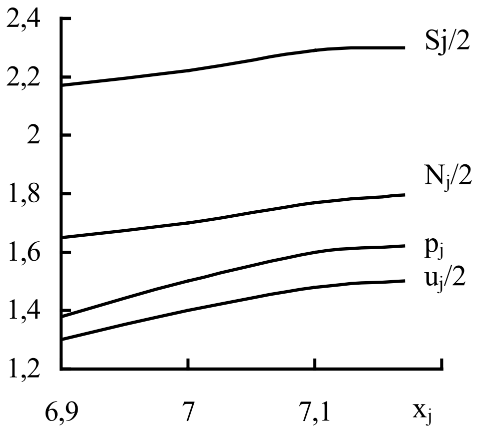

Рис. 3

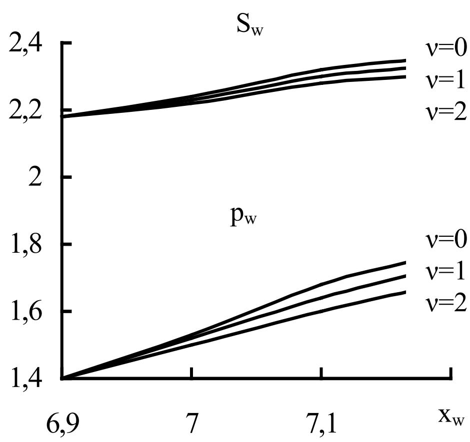

Рис. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. -М.: Наука, 1978. -688 с.

2. Канель Г.И., Разоренов С.В., Уткин А.В., Фортов В.Е. Ударно-волновые явления в конденсированных средах. -М.: Янус-К, 1996. -408 с.

3. Кутателадзе С.С., Борисов Ал. А., Борисов А.А., Накоряков В.Е. // ДАН СССР. 1980. -Т.252, №3. -С.595-598.

4. Шабловский О.Н. Законы сохранения и ударные волны в теории релаксационного теплопереноса // Инж.-физ. журн. 1997. -Т.70. №2. -С.318-325.

5. Шабловский О.Н., Комаровский Л.В., Глазунов В.И. Нестационарные ударные волны в газе Ван–дер–Ваальса // Аэрогазодинамика нестационарных процессов.-Томск. Изд-во Томского ун-та, 1992.-С.105-116.

6. Shablovsky O.N. The alternating nonlinearities in the hydrodynamic type systems // Non-linear phenomena in complex systems. Institute of Physics. -Minsk. 1999. -P.213-217.

7. Шабловский О.Н. Динамика вихрей и теплоперенос в потоке вязкой жидкости. -Гомель. ГГТУ имени П.О. Сухого. 2001.-142 с.