РАСЧЕТ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЕ С МОДУЛЯМИ УПРУГОСТИ ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Курочка К. С., Комракова Е. В.
Кафедра Информационные технологии, Гомельский государственных технический университет имени П.О.Сухого
Гомель, Республика Беларусь
E-mail: kurochka@gstu.by, 5366253@mail.ru

На основе метода конечных элементов проведено численное исследование распределения температур и термоупругих напряжений в трехслойной пластине с учетом зависимости модуля упругости от температуры. Численный алгоритм разработан на основе теории термоупругости Грина-Линдсея с учетом времени тепловой релаксации. Показано, что рассмотренная зависимость модуля упругости материалов от температуры значимым образом не влияет на распределение исследуемых характеристик по толщине пластины.

Введение

При расчете плоских и пространственных конструкций на прочность и устойчивость необходимо учитывать фактические физические характеристики материалов. Однако практически всегда подобные расчеты проводятся в предположении независимости свойств материалов от температуры, что ограничивает область применения полученных решений, найденных в заданных диапазонах температуры. Такие характеристики материалов, как теплопроводность, модуль упругости, температурный коэффициент линейного расширения, коэффициент поперечного сжатия являются функциями температуры. При проведении данного исследования было сделано допущение, что только модуль упругости имеет значимую зависимость от температуры.

Численные исследования проводились на основе теории термоупругости Грина-Линдсея[1] с учетом времени тепловой релаксации. Время тепловой релаксации вводилось для того, чтобы устранить бесконечную скорость распространения тепловых волн. Данная теория была выбрана также потому что не нарушается классический закон Фурье.

На основе предложенного подхода решена задача о нагреве по экспоненциальному временному закону верхней и нижней обкладок композитной трехслойной пластины. Этот закон имеет следующий вид $T(t) = T_0 + \Delta T(1 - e^{-t/\tau})$. Результаты решения задачи представлены в графическом виде. Проведено сравнение полученных результатов с результатами, предсказавыемыми связанной теорией, в случае, когда модуль упругости не зависит от температуры[2].

I. Постановка задачи

Рассмотрим изотропную трехслойную пластину, модуль упругости каждого слоя которой зависит от температуры. Уравнение состояния для теории обобщенной термоупругости с одним временем релаксации записывается в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \gamma(T - T_0)\delta_{ij}. \qquad (1)$$

Уравнение теплопроводности, соотношение между напряжениями и перемещениями и уравнения движения соответственно имеют вид

$$kT_{ii} = \rho C_E(\dot{T} + \tau_0 \ddot{T}) + \gamma T_0(\dot{e_{i,j}} + \tau_0 \ddot{e_{i,j}}) - (Q - \tau_0 \ddot{Q}); \qquad (2)$$

$$e_{ij} = (u_{i,j} + uj, i)/2; \qquad (3)$$

$$\sigma_{ij} = \rho \ddot{u}_i. \qquad (4)$$

В (1)–(4) λ, μ – постоянные Ламе; ρ – плотность материала; C_E – удельная теплоемкость при постоянном напряжении; Q – мощность источника тепла на единицу массы; T – абсолютная температура; $T_0 = \delta_0 \rho c_0^2/(\gamma_0 E_0) = (\delta_0/\alpha_T)(\ 1 - v\ )/(1+v)$ – исходная температура; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $e = \epsilon_{ii}$; ϵ_{ii} – компоненты тензора деформации; u_i – компоненты вектора перемещения; k – теплопроводность; τ_0 – время релаксации; точка над символом обозначает дифференцирование по времени, запятая в нижнем индексе – производную по пространственной переменной; по повторяющимся индексам проводится суммирование; индексы i, j принимают значения 1, 2, 3[3].

Предположим, что $E = E_0 f(T)$, $\lambda = E_0 \lambda_0 f(T)$, $\mu = E_0 \mu_0 f(T)$, $\gamma = E_0 \gamma_0 f(T)$. Здесь $f(T)$ – заданная безразмерная функция температуры; $\mu_0 = 1/(2(1+v))$; $\lambda_0 = v/((1+v)(1-2v))$; $\gamma_0 = \alpha_T/(1-2v)$; α_T —температурный коэффициент линейного расширения; v – коэффициент поперечного сжатия; E_0 – модуль упругости при $\alpha^* = 0$; α^* – эмпирическая константа материала, K^{-1}. В случае если модуль упругости не зависит от температуры, $f(T) \equiv 1$, $E = E_0$.

Рассматривается композитная трехслойная пластина конечной толщины и бесконечной протяженности, часть поверхности которой нагревается [4]. Предполагается, что в начальном положении пластина находится в состоянии покоя. Направим ось y, проходящую через середину пластины, перпендикулярно ее поверхности. Решение будем искать в области $\Omega = (x, y, z) : x, y, z \in R, -L < y < L$. При расчетах предполагалось, что поверхности пластин не нагружены, а также что верхняя и нижняя обкладки пластины нагреваются нестационарными источниками тепла[5].

Численные эксперимент проводился на основе методов конечных элементов[6]. Данный метод состоит из следующих основных этапов:

- сначала вводятся геометрические и физические параметры трехслойной пластины;
- задаются граничные условия на обкладках пластины:
- пластина разбивается на заданное количество элементов;
- определяется условие выполнение цикла по времени;
- производится сквозная нумерация всех элементов и узлов расчетной сетки согласно методу конечных элементов, формирование матриц жесткости конечных элементов в локальной системе координат, а затем ассемблирование, т.е. формирование глобальной матрицы жесткости из локальных матриц жесткости элементов;
- вычисляются локальные тепловые матрицы жесткости, а затем формируется глобальная матрица.
- формируются матрицы масс и демпфирования, а затем ассемблирование.

II. Полученные результаты

Разработанная на основе вышеуказанного алгоритма программа позволяет рассчитывать температуру по толщине, компоненты тензора напряжений и вектора перемещений. Результаты расчетов для температур при учете зависимости модуля упругости от температуры приведены на рисунках 1 и 2.

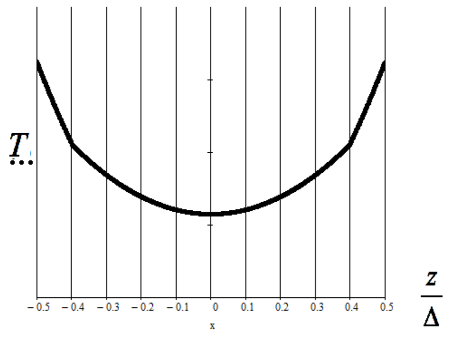

Рис. 1 – Зависимость температуры по толщине пластины при $t = \tau$, $T_1 = T_0 + \Delta T(1 - e)$, $T_2 = T_0 + \Delta T * 0.1$

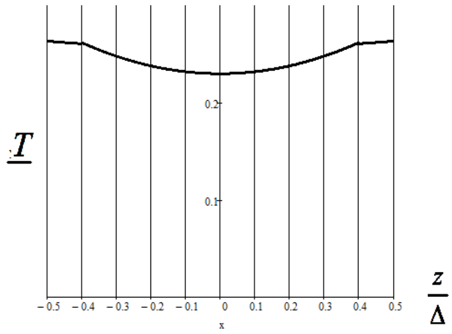

Рис. 2 – Зависимость температуры по толщине пластины при $t = 10\tau$, $T_1 = T_0 + \Delta T$, $T_2 = T_0 + \Delta T * 0.7$

Проводились также расчеты и без учета зависимости модуля упругости от температуры. Полученные значения температур отличаются от приведенных на рисунках 1 и 2 не более чем на 8-10%.

Заключение

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

- во всех слоях пластины, если механические характеристики материала зависят от температуры, возрастает скорость распространения тепловых возмущений;
- горизонтальная составляющая вектора перемещения u и компоненты тензора напряжений σ_{xx} уменьшаются, если модуль упругости материала зависит от температуры.

Список литературы

1. Chandrasekharaiah, D. S. Hyperbolic thermoelasticity a review of recent leterature/ D. S. Chandrasekharaiah // Appl. Mech. Rew. 1998. V. 51, N 12. P. 705–729.
2. Самарский, А.А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищев – М.: Едиториал УРСС, 2003 – 784 с.
3. Othman, M. I. A. Generalized thermo-microstretch elastic medium with temperature dependent properties for different theories/M. I. A. Othman, Kh. Lotfy , R. M. Farouk // Engng Anal. Boundary Element. 2010. V. 34. P. 229–237.
4. Румянцев, А.В. Метод конечных элементов в задачах теплопроводности / А. В. Румянцев – Калининград, 2010 – 195 с.
5. Старовойтов, Э.И. Основы теории уругости, пластичности и вязкоупругости / Э. И. Старовойтов – Гомель: БелГУТ, 2001 – 344 с.
6. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич – М.: Мир, 1975 – 541 с.