

В. Л. ГИНЗБУРГ и член-корреспондент АН СССР И. М. ФРАНК

**ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОНА И АТОМА, ДВИЖУЩИХСЯ ПО ОСИ
КАНАЛА В ПЛОТНОЙ СРЕДЕ**

Возможность излучения радиации Черенкова электроном, движущимся внутри канала малого радиуса r ($r < \lambda$) в плотной среде, была впервые указана Л. И. Мандельштамом*. В случае электрона такой метод получения радиации может оказаться существенным, поскольку при этом основная доля потерь энергии электрона будет исключена, пробег вырастет, и потому доля излучаемой энергии может стать значительной.

Для рассмотренного в предыдущей статье⁽⁴⁾ эффекта Доплера при сверхсветовой скорости возможность излучения не в самой среде, а при движении вблизи нее вообще является условием, при котором можно хотя бы в принципе надеяться его обнаружить.

В связи с этим ниже рассмотрен вопрос об излучении электрона и атома, движущихся вдоль плотной среды, для простейшего случая движения по оси канала.

§ 1. Допустим, что электрон равномерно движется со скоростью $v = \beta c$ по оси цилиндра радиуса r . Цилиндр заполнен средой с показателем преломления $n_1(\omega)$, а внешнее пространство — средой с показателем $n_2(\omega)$. Если $n_1 = n_2$, то мы имеем обычный случай эффекта Черенкова, разобранный в^(1, 2). Точно так же, как в^(1, 2), в нашем случае для единственной отличной от нуля компоненты векторного потенциала, направленной по скорости (оси z), имеем (см. ⁽²⁾ (2,9) — (2,11)):

$$A_z = \int_{-\infty}^{+\infty} A_z(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad A_z(\omega) = \frac{e}{2c} a_{1,2}(\rho) e^{-i\frac{\omega}{v}z}; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a_{1,2}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{da_{1,2}}{d\rho} + s_{1,2}^2 a_{1,2} &= -\frac{4}{\pi\rho} \delta(\rho), \\ s_{1,2}^2 &= \frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 n_{1,2}^2(\omega) - 1), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где ρ — расстояние от оси и индексы 1 и 2 относятся, соответственно, к внутренней и внешней средам.

Используя формулы, приведенные в⁽²⁾, и учитывая, что на границе при $\rho = r$ тангенциальные слагающие электрического и магнитного полей должны быть непрерывны, можно без труда найти a_1 и a_2 (ограничиваемся случаем, когда $\beta n_2(\omega) > 1$)

$$a_1(\rho) = iH_0^{(1)}(s_1\rho) + f_1 J_0(s_1\rho); \quad f_i = f, \quad \omega > 0; \quad f_i = f^*, \quad \omega < 0, \quad \} \quad (3)$$

* Выступление на защите докторской диссертации П. А. Черенковым (1940 г.).

$$\left. \begin{aligned} a_2(\rho) &= -igH_0^{(2)}(s_2\rho), \quad \omega > 0; \quad a_2(\rho) = +ig^*H_0^{(1)}(s_2\rho), \quad \omega < 0; \\ s_2 &= \frac{|\omega|}{v} \sqrt{\beta^2 n_2^2 - 1} = \frac{|\omega| n_2}{c} \sin \theta_{02}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} g &= -\frac{2i}{\pi r} \frac{1}{J_0(s_1 r) \frac{\partial H_0^{(2)}(s_2 r)}{\partial \rho} - B \frac{\partial J_0(s_1 r)}{\partial \rho} H_0^{(2)}(s_2 r)}, \\ f &= -\frac{2}{\pi r} \frac{BH_0^{(2)}(s_2 r)}{J_0(s_1 r) \cdot \left\{ J_0(s_1 r) \frac{\partial H_0^{(2)}(s_2 r)}{\partial \rho} - B \frac{\partial J_0(s_1 r)}{\partial \rho} H_0^{(2)}(s_2 r) \right\}} - \frac{iH_0^{(1)}(s_1 r)}{J_0(s_1 r)}, \\ B &= \frac{1 - \beta^2 n_2^2(\omega)}{1 - \beta^2 n_1^2(\omega)} \cdot \frac{n_1^2(\omega)}{n_2^2(\omega)} = \frac{\sin^2 \theta_{02}}{\sin^2 \theta_{01}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В уравнениях (3)–(5) $H_0^{(1,2)}$ — функции Ганкеля нулевого порядка первого и второго рода и J_0 — функция Бесселя нулевого порядка.

Звездочкой отмечена комплексно-сопряженная величина. Углы θ_{02} и θ_{01} суть черенковские углы ($\beta n \cos \theta_0 = 1$) для сред 2 и 1.

Переход к углам возможен, конечно, лишь если $\cos \theta < 1$.

Как ясно из (2) (см. формулу (2,16)), наличие внутренней области (где $n = n_1$) проявляется в решении для внешней области только в появлении множителя g в (4). Все формулы для полей и излучаемой энергии, приведенные в (1,2), остаются потому в силе, но в них появляются множители g и g^* для поля и $gg^* = |g|^2$ для энергии. Так, поток энергии

излучения на единицу длины пути электрона равен (см. (2), (3,6)):

$$\frac{dw}{dl} = \frac{e^2}{c^2} \int_{\beta n_2 > 1} \omega |g|^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n_2^2(\omega)}\right) d\omega.$$

В наиболее интересном частном случае, когда $n_1 = 1$, т. е. имеется пустой канал, используя свойства бесселевых функций, получаем:

$$|g|^2 = \frac{4}{\pi^2 r^2} \frac{1}{M^2 + N^2}; \quad (6)$$

$$M = sI_0(\sigma r) J_1(sr) + B\sigma I_1(\sigma r) J_0(sr), \quad N = sI_0(\sigma r) Y_1(sr) + B\sigma I_1(\sigma r) Y_0(sr);$$

где $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$, Y — функции Вебера, $n_2 = n(\omega)$, $\beta n > 1$,

$$s = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}, \quad \sigma = \frac{|\omega|}{v} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad B = \frac{1 - \beta^2 n^2}{(1 - \beta^2) n^2}.$$

При $r = 0$ $|g|^2 = 1$, как это и должно быть. При $r \rightarrow \infty$ $|g|^2 \rightarrow 0$, т. е. излучение исчезает, в соответствии с тем, что электрон в вакууме излучать не может. Зависимость dw/dl от r/λ ($\lambda = 2\pi c/\omega$) представлена на рис. 1, где кривая 1 относится к случаю $\beta = 1$ и кривая

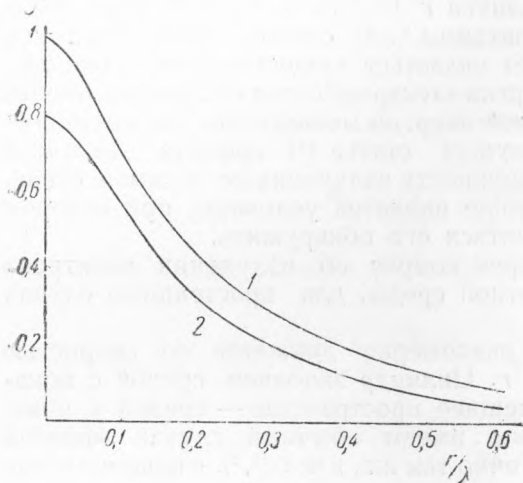


Рис. 1

2 к случаю $\beta = 0,94$ (энергия электрона 1 MeV); в обоих случаях показатель преломления внешней среды принимается равным 1,5, а канал — пустым внутри (формула (6)). Из рис. 1 видно, что при $r/\lambda \sim 0,01$, т. е. в оптической области, для $r \sim 5 \cdot 10^{-7}$ см наличие канала на излучении практически не сказывается. Отсюда, между прочим, ясно видно, что для излучения Черенкова область $\rho < 5 \cdot 10^{-7}$ см несущественна и поэтому среду можно считать непрерывной, как это делается здесь и в (1-3).

Аналогично тому, как это сделано выше, могут быть без труда рассмотрены другие частные случаи ($\beta n_1 > 1, \beta n_2 < 1; \beta n_1 > 1, \beta n_2 > 1$), на чем мы останавливаться не будем. Отметим только, что при $\beta n_2 < 1$ потери энергии на излучение вообще отсутствуют, как при $\beta n_1 < 1$, так и при $\beta n_1 > 1$.

Решение для электрона, движущегося по оси цилиндрического канала, в качественном отношении может быть перенесено на практически значительно более интересный случай, когда электрон движется вдоль границы среды с вакуумом. Роль r здесь играет расстояние до поверхности h .

§ 2. Излучение равномерно движущегося осциллятора может быть рассмотрено совершенно так же, как излучение электрона. Ограничимся для определенности случаем электрического диполя, направленного по скорости:

$$p_z = p_0' \cos(\omega_0' t); \quad z = vt, \quad x = y = 0, \quad p_0' = p_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (7)$$

где p_0 и ω_0 — амплитуда диполя и его частота в связанной с ним системе координат. Компонента Фурье для плотности тока равна в этом случае

$$j_z(\omega) = \frac{i\omega p_0'}{2\pi^2 v \rho} \cos\left(\omega_0' \frac{z}{v}\right) e^{-i\frac{\omega}{v}z} \delta(\rho). \quad (8)$$

Векторный потенциал равен:

$$\left. \begin{aligned} A_z(\omega) &= \frac{i\omega p_0'}{4vc} \left\{ a_-(\rho) e^{i\left(\frac{\omega_0' - \omega}{v}\right)z} + a_+(\rho) e^{-i\left(\frac{\omega_0' + \omega}{v}\right)z} \right\}, \\ \frac{d^2 a_{\pm}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{da_{\pm}}{d\rho} + s_{\pm}^2 a_{\pm} &= -\frac{4}{\pi\rho} \delta(\rho), \\ s_{\pm}^2 &= \frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \frac{(\omega_0' \pm \omega)^2}{v^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Так же, как в случае электрона (2), можно показать, что для $s_{\pm}^2 > 0$

$$a_{\pm}^{\pm} = -iH_0^{(2)}(s_{\pm}\rho), \quad \omega > 0; \quad a_{\pm}^{\pm} = +iH_0^{(1)}(s_{\pm}\rho), \quad \omega < 0. \quad (10)$$

Пусть, например, $s_-^2 > 0$ и $s_+^2 < 0$, тогда в волновой зоне имеем (для $\omega > 0$):

$$A_z(\omega) e^{i\omega t} = \frac{p_0' \omega}{2vc \sqrt{2\pi\rho} \sqrt{s_-}} e^{i\left(\omega t - \left(\frac{\omega - \omega_0'}{v}\right)z - s_- \rho + \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (11)$$

Если представить (11) в виде $A \sim e^{i\omega\left(t - \frac{\cos\theta}{c/n}z - \frac{\sin\theta}{c/n}\rho\right)}$, то ясно, что

$$\frac{\omega - \omega_0'}{v} = \frac{\omega \cos\theta}{c/n}, \quad s_- = \sqrt{\frac{\omega^2 n^2}{c^2} - \frac{(\omega_0' - \omega)^2}{v^2}} = \frac{\omega \sin\theta}{c/n}. \quad (12)$$

Из (12) вытекает условие Доплера $\omega = \frac{\omega_0'}{1 - \beta n \cos\theta}$. Если $s_+^2 > 0$,

то таким же образом для излучаемой частоты получается „сверхсветовое“ условие Доплера $\omega = \frac{\omega_0'}{\beta n \cos \theta - 1}$.

Используя выражения (9) — (10), легко вычислить энергию, излучаемую через поверхность цилиндра, окружающего траекторию:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0'^2}{4v'c^2} \left\{ \int_{s_-^2 > 0} \left(\omega^2 - \frac{(\omega_0' - \omega)^2}{\beta^2 n^2} \right) \omega d\omega + \int_{s_+^2 > 0} \left(\omega^2 - \frac{(\omega_0' + \omega)^2}{\beta^2 n^2} \right) \omega d\omega \right\}, \quad (13)$$

где интегрирование ведется по области частот $\omega > 0$, для которых соответственно s_-^2 и s_+^2 больше нуля. Первый и второй интегралы отвечают энергии излучения обычных и „сверхсветовых“ доплеровских частот. При $\omega_0' \rightarrow 0$ формула (13) переходит в выражение для черенковского излучения постоянного электрического диполя⁽³⁾, причем $1/2 p_0'^2$ в (13) нужно заменить на квадрат постоянного момента

(это вполне понятно, так как $p'^2 = 1/2 p_0'^2$). Если $n = \text{const}$, то, считая траекторию ограниченной и равной l , можно из (13) получить энергию, излучаемую под углом θ . Таким путем, учитывая (12), для потока энергии, излучаемой в единичном телесном угле, находим (см. (3)(4,5)):

$$S = \frac{p_0'^2 n l}{8 \pi v' c^3} \left\{ \frac{\omega_0'^4 \sin^2 \theta}{|1 - \beta n \cos \theta|^3} \right\}. \quad (14)$$

Рассмотрение осциллятора, движущегося в канале, производится совершенно так же, как для электрона. Наличие канала (или, в общем случае, цилиндра из другого материала) приводит к тому, что в решении (10) появляются множители g_{\pm} и g_{\pm}^* (так же, как в (4)). При этом g_{\pm} определяется формулой (5) с заменой $s_{1,2}$ на

$$s_{1,2\pm} = \sqrt{\frac{\omega^2 n_{1,2}^2}{c^2} - \frac{(\omega_0' \pm \omega)^2}{v'^2}} = \frac{\omega}{c} n_{1,2} \sin \theta_{1,2\pm}, \quad (15)$$

где $\theta_{1,2\pm}$ — углы в средах 1, 2, отвечающие излучению частоты ω (см. (12)); знак $+$ отвечает „сверхсветовому“ и знак $-$ обычному эффекту Доплера). Кроме того, для осциллятора B в (5) равно

$$B_{\pm} = \frac{[\omega^2 \beta^2 n_{1,2}^2(\omega) - (\omega_0' \pm \omega)^2] n_{1,2}^2(\omega)}{[\omega^2 \beta^2 n_1^2(\omega) - (\omega_0' \pm \omega)^2] n_2^2(\omega)} = \frac{\sin^2 \theta_{2,\pm}}{\sin^2 \theta_{1,\pm}}. \quad (16)$$

Переход в (15) — (16) к углам имеет, конечно, смысл, лишь если $\cos \theta_{1,2\pm} < 1$.

„Сверхсветовой“ эффект Доплера имеется, лишь если $s_{2,+}^2 > 0$, т. е. если этот эффект возможен во внешней среде 2. Энергия излучения в этом случае определяется формулами (13), (14) с множителем $|g_+|^2$, в отношении которого справедливо сказанное выше об аналогичном факторе для электрона. Таким образом, наблюдение эффекта Доплера в плотной среде и, в частности, наблюдение „сверхсветового“ эффекта Доплера в принципе вполне возможно при пролете атома вдоль границы раздела среды с вакуумом на расстоянии порядка или меньшем $0,1 \lambda$.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР

Поступило
10 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Е. Тамм и И. М. Франк, ДАН, 14, 107 (1937). ² Ig. Tam m, J. of Phys., 1, 439 (1939). ³ I. Frank, J. of Phys., 7, 49 (1943). ⁴ В. Л. Гинзбург и И. М. Франк, ДАН, 56, № 6 (1947).