Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVI, № 7

АЭРОДИНАМИКА

Ф. И. ФРАНКЛЬ

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДАРБУ—ТРИКОМИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ К ПРИБЛИЖЕННОМУ НАХОЖДЕНИЮ КРИТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ В ЗАДАННОМ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 10 XII 1946)

В работе ([1]) мы показали, что дифференциальное уравнение Моленбрука — Чаплыгина для плоско-параллельных безвихренных адиабатических течений газа может быть представлено в виде

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + b(\eta) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0, \tag{1}$$

где η — функция скорости потока, обращающаяся в нуль при критической скорости; θ — угол наклона скорости и ψ — функция тока. Там же показано, что в соплах Лаваля при скоростях, близких к скорости звука, уравнение (1) может быть приближенно заменено уравнением Дарбу — Трикоми ([2]):

$$\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = 0. \tag{2}$$

Для приближенного представления критического течения (т. е. течения, переходящего от дозвуковых скоростей вверх по течению к сверхзвуковым вниз по течению) мы предложили в работе ([1]) следующее семейство частных решений уравнения (2):

$$\psi_n(\eta, \theta) = (\mu - \lambda)^{\frac{2n+1}{3}} F\left(-\frac{2n+1}{3}, -\frac{2n-1}{3}; -\frac{4n-3}{6}; \frac{\mu}{\mu - \lambda}\right)$$
$$(n = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

где λ, μ — характеристические координаты:

$$\mu = \theta + \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}, \qquad \lambda = \theta - \frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}, \tag{4}$$

$F(a, b; c; z)$ обозначает гипергеометрическую функцию.

Эти решения имеют смысл как в гиперболической, так и в эллиптической полуплоскостях.

Впоследствии С. В. Фалькович ([3]) заметил, что функция $\psi_0(\eta, \theta)$ является алгебраической.

Покажем здесь, что все решения $\psi_n(\eta, \theta)$ являются алгебраическими *.

---

* Это устанавливается на основании исследования Шварца ([4]); в данном случае для этой цели достаточна известная таблица Куммера.

В самом деле, все они могут быть представлены в виде

$$\psi_n(\eta, \theta)=\rho^{\frac{2n+1}{3}} f_n\left(\frac{\theta}{\rho}\right), \tag{5}$$

где

$$\rho=\sqrt{\theta^2+\frac{4}{9}\eta^3}. \tag{6}$$

Эти решения исследовал уже Трикоми (2) в случаях $n\equiv\pm1 \pmod 3$ и показал, что они — многочлены относительно переменных η, θ. В случае $n\equiv 0 \pmod 3$ они, как мы увидим, содержат квадратные и кубические корни.

Поскольку мы рассматриваем лишь сопла, симметричные относительно оси, параллельной потоку, мы в дальнейшем будем рассматривать только функции ψ_n, нечетные относительно θ.

Тогда будет с точностью до постоянных множителей:

$$\begin{gathered}
f_{3m+1}\left(\frac{\theta}{\rho}\right)=F\left[-2m-1, 2m+\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}\left(1+\frac{\theta}{\rho}\right)\right]- \\
-F\left[-2m-1, 2m+\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}\left(1-\frac{\theta}{\rho}\right)\right], \\
f_{3m-1}\left(\frac{\theta}{\rho}\right)=\frac{\eta}{\rho^{2/3}}\left\{F\left[-2m+1, 2m+\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{2}\left(1+\frac{\theta}{\rho}\right)\right]-\right. \\
\left.-F\left[-2m+1, 2m+\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{2}\left(1-\frac{\theta}{\rho}\right)\right]\right\}, \\
f_{3m}\left(\frac{\theta}{\rho}\right)=\left(1+\frac{\theta}{\rho}\right)^{1/3}F\left[-2m, 2m+1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}\left(1-\frac{\theta}{\rho}\right)\right]- \\
-\left(1-\frac{\theta}{\rho}\right)^{1/3}F\left[-2m, 2m+1; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}\left(1+\frac{\theta}{\rho}\right)\right].
\end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, решения ψ_{3m+1}, ψ_{3m-1}, ψ_{3m} могут быть написаны в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\psi_{3m+1}(\eta, \theta)=a_1^{(m)}\theta\rho^{2m}+a_3^{(m)}\theta^3\rho^{2m-2}+\ldots+a_{2m+1}^{(m)}\theta^{2m+1}, \\
\psi_{3m-1}(\eta, \theta)=\eta\left[b_1^{(m)}\theta\rho^{2m-2}+b_3^{(m)}\theta^3\rho^{2m-4}+\ldots+b_{2m-1}^{(m)}\theta^{2m-1}\right], \\
\psi_{3m}(\eta, \theta)=(\rho+\theta)^{1/3}\left[c_0^{(m)}\rho^{2m}+c_1^{(m)}\theta\rho^{2m-1}+\ldots+c_{2m}^{(m)}\theta^{2m}\right]- \\
-(\rho-\theta)^{1/3}\left[c_0^{(m)}\rho^{2m}-c_1^{(m)}\theta\rho^{2m-1}+\ldots+c_{2m}^{(m)}\theta^{2m}\right].
\end{gathered} \tag{8}$$

Функции ψ_{3m} имеют при $\rho^2>0$ только одну действительную ветвь; при $\rho^2<0$ (или, что то же, $\lambda<0<\mu$) они имеют три действительные ветви (все они, действительно, требуются при исследовании критического течения в сопле Лаваля, см. (1)). В этой области их можно представить при помощи вспомогательной переменной

$$\vartheta=\arcsin\frac{3\theta}{2(-\eta)^{3/2}} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\vartheta\leqslant\frac{\pi}{2}\right). \tag{9}$$

Одна из этих ветвей — нечетная функция ϑ; мы обозначим ее через $\psi_{3m}^{(0)}$. Получаем:

$$\begin{gathered}
\psi_{3m}^{(0)}(\eta, \theta)=(-1)^{m-1}\, 2\left[\frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}\right]^{2m+\frac{1}{3}}\times \\
\times\left\{\sin\frac{\vartheta}{3}\left[c_0^{(m)}\cos^{2m}\vartheta-c_2^{(m)}\cos^{2m-2}\vartheta\sin^2\vartheta+\ldots+\right.\right. \\
\left.+(-1)^m c_{2m}^{(m)}\sin^{2m}\vartheta\right]+\cos\frac{\vartheta}{3}\left[c_1^{(m)}\cos^{2m-1}\vartheta\sin\vartheta-c_3^{(m)}\cos^{2m-3}\vartheta\sin^3\vartheta+\right. \\
\left.\left.+\ldots+(-1)^{m-1}c_{2m-1}^{(m)}\cos\vartheta\sin^{2m-1}\vartheta\right]\right\}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Остальные ветви $\psi_{3m}^{(1)}$, $\psi_{3m}^{(2)}$ получаем, заменяя, соответственно, ϑ через $\vartheta \pm 2\pi$.

Воспользуемся теперь еще частным решением, найденным С. В. Фальковичем (неопубликовано):

$$\Psi_{\eta_1} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\eta_1}}{(3\bar{\rho})^{1/3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\frac{4}{3}\eta_1^{3/2}}{\theta^2 + \frac{4}{9}\eta^3 - \frac{4}{9}\eta_1^3} \times$$

$$\times F\left\{\frac{1}{12}, \frac{7}{12}; 1; \frac{\rho^2\bar{\rho}^2}{\theta^2 + \frac{4}{9}\eta^3 - \frac{4}{9}\eta_1^3}\right\}, \tag{11}$$

где

$$\rho^2 = \theta^2 + \frac{4}{9}(\eta^{3/2} - \eta_1^{3/2})^2,$$

$$\bar{\rho}^2 = \theta^2 + \frac{4}{9}(\eta^{3/2} + \eta_1^{3/2})^2, \quad \eta_1 > 0. \tag{11a}$$

Тогда любое решение вида

$$\psi = A\Psi_{\eta_1} + \sum_{n=1}^{N} B_n\psi_n \quad (A \neq 0,\ B_0 \neq 0) \tag{12}$$

представляет собой критическое течение в некотором сопле Лаваля, стенки которого в бесконечности вверх по течению переходят в параллельные прямые; скорость в бесконечности вверх по течению равна w_1, где w_1 — значение скорости потока, соответствующее η_1. При ψ, достаточно близком к нулю, при этом не будет огибающих линий Маха.

Пусть теперь критическое течение в некотором сопле этой серии известно. Будем искать критическое течение в сопле Лаваля L, близком к нему.

Уравнение стенок $\bar{L}$ может быть написано в виде

$$y = \pm[\bar{l} - \bar{f}(\theta)] \quad (\theta \text{ — угол наклона стенки}), \tag{13}$$

где $2\bar{l}$ — ширина сопла в бесконечности вверх по течению.

Соответственно имеем для сопла L:

$$y = \pm[l - f(\theta)]. \tag{14}$$

Ширину $2l$ оставим пока неопределенной (т. е. мы считаем стенки сопла раздвижными) с тем, чтобы сохранить ту же скорость в бесконечности вверх по течению w_1, как и у сопла $\bar{L}$ (ось x мы здесь отождествляем с осью сопла).

Далее имеем на стенках

$$\psi = \pm\frac{\rho_1}{\rho_0}l, \qquad \bar{\psi} = \pm\frac{\rho_1}{\rho_0}\bar{l} \tag{15}$$

(ρ_1 — плотность при скорости w_1, ρ_0 — плотность при нулевой скорости). Соответственно получаем для величин

$$\delta y = y - \bar{y} \qquad \delta\psi = \psi - \bar{\psi} \tag{16}$$

~~следующие кр~~аевые условия на годографах стенок сопла $\bar{L}$:

$$\delta y+\frac{\partial\bar{y}}{\partial\eta}\delta\eta=\pm[\delta l-\delta f(\theta)]=\pm[\delta l-\delta g(\sigma)],$$

$$\delta\psi+\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta}\delta\eta=\pm\frac{\rho_1}{\rho_0}w_1\,\delta l, \qquad (17)$$

где

$$\delta g(\sigma)=\delta f(\theta)=f(\theta)-\bar{f}(\theta) \qquad (17а)$$

(σ — любой параметр, меняющийся монотонно вдоль годографа стенки сопла $\bar{L}$),

$$\delta l=l-\bar{l} \qquad (17б)$$

и $\delta\eta$ — разность величин η на стенках обоих сопел в точках с одинаковыми углами наклона.

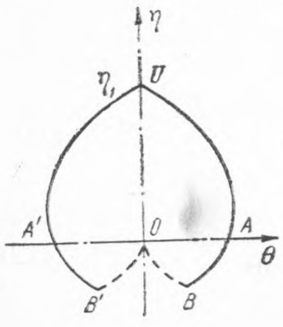

Рис. 1

Условия (17) должны быть выполнены на дугах UAB, $UA'B'$ годографа $\bar{L}$ (см. рис. 1, где OB, OB' — характеристики).

Так как должно быть выполнено добавочное условие:

$$\delta\eta=0 \qquad (18)$$

в точке U, то величина δl определяется однозначно совместно функциями $\delta\psi(\eta,\theta)$, $\delta y(\eta,\theta)$, $\delta\eta(\sigma)$.

Из уравнений (17) исключим сперва $\delta\eta$:

$$\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta}\delta y-\frac{\partial\bar{y}}{\partial\eta}\delta\psi=\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta}\delta g(\sigma)+\left(\frac{\partial\bar{y}}{\partial\eta}\frac{\rho_1}{\rho_0}w_1-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\eta}\right)\delta l \qquad (19)$$

(на нижней стенке).

Практически находим приближенное решение в следующем виде:

$$\delta\psi=\delta A\,\Psi_{\eta_1}+\sum_{n=1}^{N}\delta B_n\,\psi_n,$$
$$\delta y=\delta A\,Y_{\eta_1}+\sum_{n=1}^{N}\delta B_n\,y_n, \qquad (20)$$

где Y_{η_1}, y_n — ординаты в зависимости от η, θ, соответствующие функциями тока Ψ_{η_1}, ψ_n.

Подставив эти выражения в уравнение (19), мы требуем, чтобы оно было выполнено в $N+2$ точках дуги UAB. Отсюда определяем постоянные δl, δA, δB_n *.

Определив таким образом зависимость δl от η_1, мы можем, наоборот, найти также зависимость скорости w_1 (или, иначе говоря, критического расхода) от максимальной ширины сопла.

Поступило
10 XII 1946

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. И. Франкль, Изв. АН СССР, сер. мат., № 9 (1945). [2] Фр. Трикоми, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, 1947. [3] С. В. Фалькович, Прикл. мат. и мех., 10, в. 4 (1946) [4] H. A. Schwarz, Über diejenigen Fälle, in denen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten elementes darstellt, Ges. math. Abh., II.

* Мы, конечно, не утверждаем, что таким образом можно получить решение краевой задачи (19) с любой точностью для произвольно заданной функции $\delta g(\sigma)$. Речь идет лишь о получении приближенного решения при практически достаточно общих условиях.