Доклады Академии Наук СССР
1945. Том XLVII, № 3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. ГУТЕНМАХЕР

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МНОГОМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

(Представлено академиком Н. Г. Бруевичем 16 XII 1944)

Рассмотрим отдельные важные процессы в многомерных моделях, описанных в работе [1].

1. Уравнения с параметром ω и однородные уравнения. Пусть проводимости A и B состоят из чисто реактивных элементов L и C, а источники

$$\overline{E}=Ee^{i\omega t} \quad (i=\sqrt{-1}, \ \omega \text{ — частота}).$$

При этом проводимость двухполюсников типа рис. 1 из работы [1] будет определяться выражением:

$$A,\ B=1:\sum_{i=1}^{n}\left[1:\sum_{m=1}^{k_i}\frac{1}{\omega L_{im}-\dfrac{1}{\omega C_{im}}}\right]. \tag{1}$$

Уравнение для напряжения в узловых точках будет следующим:

$$u\{x_k\}=F\{x_k\}+\int\limits_{(G)}\ldots\int Z\{x_k,\ s_l,\ \omega\}B\{s_l,\ \omega\}u\{s_l\}\,ds_1\ldots ds_n. \tag{2}$$

Ядро уравнения зависит от частоты ω.

В случае, когда сопротивления связи Z представляют собой только индуктивности, а проводимости B представляют собой только емкости, т. е. когда

$$Z\{x_k,\ s_l,\ \omega\}=\omega L\{x_k,\ s_l\},$$
$$B\{s_l,\ \omega\}=\omega C\{s_l\},$$

получается

$$u\{x_k\}=F\{x_\kappa\}+\omega^2\int\limits_{(G)}\ldots\int L\{x_k,\ s_l\}C\{s_l\}u\{s_l\}ds_1\ldots ds_n. \tag{3}$$

Если в схеме поменять местами индуктивности и емкости, т. е.

$$Z'\{x_k,\ s_l,\ \omega\}=\frac{1}{\omega}\ \frac{1}{C}\{x_k,\ s_l\},\quad B'\{s_l,\ \omega\}=\frac{1}{\omega}\ \frac{1}{L}\{s_l\},$$

то

$$u\{x_k\}=F\{x_k\}+\frac{1}{\omega^2}\int\limits_{(G)}\ldots\int\frac{1}{C}\{x_k,\ s_l\}\frac{1}{L}\{s_l\}\,u\{s_l\}\,ds_1\ldots ds_n. \tag{4}$$

При определеных значениях частоты $\omega=\omega_k$ схемы впадают в резонанс. Эти значения ω_k соответствуют собственным частотам системы. При наличии энергии в системе и при отсутствии внешних источников $E\{s\}$ могут образоваться собственные колебания с частотами ω_k.

В этом случае $F\{x_k\}=0$, и значения напряжений в узловых точках при наличии этих собственных колебаний приближенно соответствуют решению однородных интегральных уравнений 2-го рода.

$$u\{x_k\}=\omega^2\int_{(G)}\ldots\int L\{x_k,\ s_l\}\,C\{s_l\}u\{s_l\}\,ds_1\ldots ds_n. \qquad (5)$$

2. Модели из чисто активных сопротивлений. При наличии одних только активных сопротивлений в элементах A и B

$$A,\ B=1:\sum\left[1:\sum\frac{1}{R_{im}}\right], \qquad (6)$$

ядро уравнения получается знакоположительным. Резонансные явления не могут образоваться. Однородное уравнение имеет только тривиальное нулевое решение. Источниками E могут быть при этом источники постоянного тока, а также и переменного тока.

3. Система двух интегральных уравнений. При воздействии источников $E_k=E_k e^{i(\omega t+\varphi_k)}$, сдвинутых по фазе относительно начальной фазы, на схему, состоящую из некоторого сочетания активных (R) и реактивных (L и C) элементов, уравнения получаются более сложными.

Пользуясь символическим методом, основанным на изображении синусоидальных функций времени комплексными числами, можно представить уравнения для напряжений в виде системы двух интегральных уравнений 2-го рода.

Проводимость двухполюсника B будет при этом

$$B=1:\sum_{i=1}^{n}\left[1:\sum_{m=1}^{k_i}\frac{1}{R_{im}+i\left(\omega L_{im}-\dfrac{1}{\omega C_{im}}\right)}\right]=B_a-iB_b. \qquad (7)$$

Случай, представленный формулой (7), отличается от случая (1) тем, что в выражении (1) проводимость зависит только от самоиндукции и емкости и поэтому является действительным коэффициентом в чисто мнимой величине, а проводимость, представленная в формуле (7), зависит также и от сопротивления R, а потому является величиной комплексной.

Источники F, напряжения u, сопротивления Z выразим в виде комплексных величин:

$$\overline{F}=F_a+iF_b,\quad \overline{u}=u_a+iu_b,\quad \overline{Z}=Z_a+iZ_b.$$

Уравнение для напряжений в узлах модели получает следующий вид:

$$u_a\{x_k\}=F_a\{x_k\}+$$
$$+\int_{(G)}\ldots\int[(Z_aB_a+Z_bB_b)\,u_a\{s_l\}-(Z_bB_a-Z_aB_b)\,u_b\{s_l\}]\,ds_1\ldots ds_n,$$
$$u_b\{x_k\}=F_b\{x_k\}+$$
$$+\int_{(G)}\ldots\int[(Z_bB_a-Z_aB_b)\,u_a\{s_l\}+(Z_aB_a+Z_bB_b)\,u_b\{s_l\}]\,ds\ldots ds_n. \qquad (8)$$

Резонансные явления в этой модели получаются при различных значениях частоты. Однако при этом система характеризуется еще рассеянием энергии в виде потерь на нагрев элементов схемы.

2*

Интегро-дифференциальные уравнения

Переходные процессы в электрических моделях возникают при воздействии источников E, изменяющихся в функции времени $\overline{E}=E(t)$, или при изменении состояния цепи, начиная с определенных начальных условий.

При наличии емкостей C и индуктивностей L энергия в цепи запасается в формах энергии электрического поля $Cu^2/2$ и энергии магнитного поля $LI^2/2=\Phi I/2$ (где Φ — магнитный поток). Благодаря нагреванию проводников энергия в моделях непрерывно расходуется пропорционально RI^2.

Зависимость между током и напряжением, например, в двухполюснике рис. 1 работы ([1]), определяется переходной проводимостью.

Величина $Z\left\{x_{ki_k},\ s_{lj_l}\right\}$ также является дифференциальным оператором — сложной функцией от оператора $p=\partial/\partial t$.

Таким образом, переходные процессы в этих схемах описываются интегро-дифференциальными уравнениями.

Приведем следующий пример.

Пусть

$$u\left\{x_{ki_k}\right\}=\left[L\left\{x_{ki_k};\ s_{lj_l}\right\}\frac{\partial}{\partial t}+R\left\{x_{ki_k};\ s_{lj_l}\right\}\right]I\left\{s_{lj_l}\right\}$$

и

$$I\left\{s_{lj_l}\right\}=\left[C\left\{s_{lj_l}\right\}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{R_0}\left\{s_{lj_l}\right\}\right]u\left\{s_{lj_l}\right\}.$$

При этом уравнение будет иметь следующий вид:

$$u\left\{x_k,\ t\right\}=F\left\{x_k,\ t\right\}+$$

$$+\int\limits_{(G)}\cdots\int\left[LC\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(RC+\frac{L}{R_0}\right)\frac{\partial}{\partial t}+\frac{R}{R_0}\right]\left\{x_k,\ s_l\right\}u\left\{s_l,\ t\right\}ds_1\ldots ds_n. \qquad (9)$$

При моделировании явлений, описываемых уравнениями типа (9), в схеме могут быть заданы произвольные начальные условия путем зарядки емкостей C и пропусканием начальных токов через индуктивности L схемы.

Интегро-дифференциальные уравнения типа (9) можно выразить и в виде интегральных уравнений 2-го рода смешанного типа Фредгольма—Вольтерра. Для этого время t необходимо рассматривать как еще одну дополнительную координату при определении ядра $K\left\{x_k,\ t;\ s_l,\ \tau\right\}$ и при составлении уравнения.

Идея, лежавшая в основе введения функции сопротивления $Z\left\{x_{ki_k};\ s_{lj_l}\right\}$, допускает обобщения на задачи по определению вектора плотности тока в электрических моделях и других величин.

Поступило
16 XII 1944

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. И. Гутенмахер, ДАН, XLVII, № 2 (1945).