Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXIX, № 8—9

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

ПЕРВАЯ ЗАМЕТКА О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

1. Обозначим через

$$D_k(Y(x))=\sum_0^k \varphi_i(x)\, Y^{(k-i)}(x) \tag{1}$$

линейный оператор k-го порядка функции $Y(x)$ одной независимой переменной x с непрерывными коэффициентами $\varphi_i(x)$.

Как известно, уравнение

$$D_k(Y(x))=A(x) \tag{2}$$

имеет решение непрерывное со своими производными k первых порядков, какова бы ни была непрерывная функция $A(x)$, на всяком отрезке (a, b), где $\varphi_0(x)\gtrless 0$. В таком случае, очевидно, существуют многочлены $P_2(x)$, удовлетворяющие на всем отрезке (a, b) неравенствам

$$|\, D_k(P_2(x))-A(x)\,| < \varepsilon \tag{3}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Академик С. Л. Соболев в беседе со мной поставил вопрос, осуществимы ли неравенства (3) для всякой непрерывной функции $A(x)$, если коэффициенты данного оператора $\varphi_i(x)$ подчинены единственному (очевидно, необходимому) условию не обращаться в нуль одновременно (для всех $i=0, 1, \ldots, k$). Как мы увидим, это условие вообще недостаточно, и укажем здесь условие, необходимое и достаточное, чтобы оператор обладал свойством (3), т. е. был оператором (S) Соболева. В этой первой заметке мы ограничимся предположением, что $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ не обращаются одновременно в нуль. Полное доказательство наших результатов будет дано в другом месте.

2. Пусть E будет множество (особых) точек оператора (1) на (a, b), где $\varphi_0(x)=0$ $(\varphi_1(x)\gtrless 0)$. Будем называть $Y(x)$ регулярным на (a, b) решением уравнения (2), если $Y(x)$ непрерывна на (a, b) вместе со своими производными первых $k-1$ порядков и, кроме того, если во всех точках x_0 множества E

$$\sum_{i=1}^k \varphi_i(x_0)\, Y^{(k-1)}(x_0)=A(x_0). \tag{4}$$

Например, уравнение

$$x^2\sin\frac{1}{x}\, Y'+Y=x \tag{5}$$

имеет регулярным решением в любом промежутке нечетную непрерывную функцию $Y(x)$ $(Y(x) = -Y(-x))$, определенную формулами:

1) $Y(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{2x} \int\limits_{\frac{1}{(2k+1)\pi}}^{x} \frac{dx}{2x \sin^2 \frac{1}{2x}}$ при $\frac{1}{2(k+1)\pi} < x < \frac{1}{2k\pi}$, где $k \geqslant 0$ целое число;

2) $Y(x) = x$ при $x = \frac{1}{k\pi}$ и $x = 0$.

Теорема I. *Для того чтобы оператор* (1) *был оператором* (S) *на* (a, b), *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (2) *допускало решение регулярное на* (a, b), *какова бы ни была непрерывная функция* $A(x)$.

Действительно, можно показать, что всякий раз, как для определенного $A(x)$ уравнение (2) имеет регулярное решение, существуют многочлены $P_\varepsilon(x)$, удовлетворяющие (3) при рассматриваемом $A(x)$, и наоборот.

Отсюда следует, например, что оператор

$$D_1(Y(x)) = x^2 \sin \frac{1}{x} Y'(x) + Y(x) \tag{6}$$

является оператором (S) на любом отрезке (a, b), так как уравнение (5) допускает регулярное решение, аналогичное вышеуказанному, если заменить в нем x любой непрерывной функцией $A(x)$.

3. Теорема II. *Если* $\varphi_0(x) = 0$ *имеет только один корень* x_0 *на* (a, b), *то оператор* (1) *есть оператор* (S) на (a, b).

Эта теорема вытекает из леммы I: *Каковы бы ни были постоянные* $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$, *связанные равенствами*

$$\sum_{1}^{k} \varphi_i(x_0)\, c_{k-i} = A(x_0), \tag{4bis}$$

вблизи изолированной точки x_0 *множества* E *существует регулярное решение* $Y(x)$ *уравнения* (2), *удовлетворяющее условиям* $Y(x_0) = c_0$, $Y'(x_0) = c_1, \ldots, Y^{(k-1)}(x_0) = c_{k-1}$.

Необходимо различать два типа изолированных (по крайней мере с одной стороны) особых точек x_0: *точка* x_0 *называется регулярной справа* (слева), *если общий интеграл уравнения* (2) *регулярен в промежутке* $(x_0, x_0 + h)$ *при* $h > 0$ $(h < 0)$ *достаточно малом*; *в противном случае* (когда самое общее регулярное решение зависит от $k-1$ произвольных постоянных) *особая точка* x_0 *называется иррегулярной*. Следует отметить, что если решение $Y(x)$ регулярно достигает слева изолированную справа особую точку x_0, то оно всегда может быть регулярно продолжено вправо от x_0, причем для того, чтобы это регулярное продолжение было однозначно, необходимо и достаточно, чтобы точка x_0 была иррегулярна справа.

Лемма II. *Особая точка* x_0 *оператора* (1) *регулярна справа* (слева), *если* $\int\limits_{x_0+h}^{x_0} \frac{\varphi_1(x)\,dx}{\varphi_0(x)} = +\infty$ при $h > 0$ $(h < 0)$ *достаточно малом*; напротив, *если* $\int\limits_{x_0+h}^{x_0} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} dx < +\infty$, *то точка* x_0 *иррегулярна*.

4. Теорема III. *Если множество E имеет на (a, b) лишь две точки $x_1 < x_2$, то оператор* (1) *не будет* (S) (т. е. *будет* $(\overline{S})$) *тогда и только тогда, когда*

$$\int_x^{x_1} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} dx < +\infty, \qquad \int_x^{x_2} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)} dx < +\infty \quad (x_1 < x < x_2), \tag{7}$$

и, кроме того, регулярное решение на (x_1, x_2) *уравнения*

$$D_k(z(x)) = 0 \tag{8}$$

содержит $k-1$ произвольных постоянных. В случае $k=1$ последнее условие излишне, так как оно является следствием первых двух условий.

Из теоремы III нетрудно вывести самую общую форму для всех операторов $(\overline{S})$ на (x_1, x_2) $(\varphi_0(x_1) = \varphi_0(x_2) = 0,\ \varphi_0(x) \gtrless 0$ при $x_1 < x < x_2)$:

$$D_k(Y(x)) = \frac{\varphi_0(x)}{\lambda(x)} \frac{d}{dx} \lambda(x) D_{k-1}(Y(x)), \tag{9}$$

где

$$D_{k-1}(Y(x)) = Y^{(k-1)}(x) + a_1(x) Y^{(k-2)}(x) + \ldots + a_{k-1}(x) Y(x);$$

здесь $\lambda(x), a_1(x), \ldots, a_{k-1}(x)$—произвольные непрерывные функции на (x_1, x_2), имеющие непрерывные производные, за исключением, может быть, точек x_1, x_2, подчиненные дополнительному требованию, что $\varphi_0(x) \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)}$ так же, как и $\varphi_0(x) a_i'(x)$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, непрерывны на всем отрезке (x_1, x_2), причем $\lim\limits_{\substack{x=x_1\\x=x_2}} \left| \varphi_0(x) \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \right| > 0$, $\lim\limits_{\substack{x=x_1\\x=x_2}} \varphi_0(x) a_i'(x) = 0$.

Отсюда заключаем, что уравнение (2) тогда и только тогда имеет регулярное на (x_1, x_2) решение, когда $A(x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\lambda^2(x_2)}{\lambda'(x_2)\varphi_0(x_2)} A(x_2) - \frac{\lambda^2(x_1)}{\lambda'(x_1)\varphi_0(x_1)} A(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\lambda(x)}{\varphi_0(x)} A(x)\, dx. \tag{10}$$

Замечаем, что интеграл в правой части всегда имеет смысл, а коэффициенты при $A(x_1)$ и $A(x_2)$ конечны (или равны нулю); поэтому достаточно положить $A(x_1) = A(x_2) = 0$, $A(x) > 0$ при $x_1 < x < x_2$, чтобы [в случае оператора $(\overline{S})$]уравнение (2) не допускало регулярного решения. Благодаря этому справедлива

Теорема IV. *Каков бы ни был оператор* (1), *если $\varphi_0(x) = 0$ имеет лишь два корня x_1, x_2 на (a, b), то всякая непрерывная функция $A(x)$ может быть равномерно сколь угодно приближена на (a, b) при помощи выражения $C(x - x_1)(x - x_2) + D_k(P(x))$,* где *$C$ — некоторая постоянная, а $P(x)$—многочлен достаточно высокой степени.*

При этом в случае оператора $(\overline{S})$ коэффициенты многочлена $P(x)$ при $(x - x_1)^h$, где $h < k-1$, могут быть взяты произвольно; в случае оператора (S) постоянная C, очевидно, произвольна, но число произвольных коэффициентов $P(x)$ равно $k-2$ (или нулю, если $k \leqslant 2$).

Теорема IV распространяется на случай любого числа $n+1$ иррегулярных точек на (a, b): число необходимых для приближения любой функции дополнительных слагаемых не более n (формулировка может быть уточнена).

5. Как было замечено выше, в случае $k=1$, теорема III упрощается; кроме того при $k=1$ имеет место и более общая

Теорема V. *Каково бы ни было множество E точек x на* (a, b), где $\varphi_0(x_0) = 0$ $(\varphi_1(x_0) \gtrless 0)$, *оператор* $\varphi_0(x) Y'(x) + \varphi_1(x) Y(x)$ *тогда и только тогда будет оператором* $(\bar{S})$, *если существуют две точки* $x_1 < x_2$ *множества* E, *отделенные точками дополнительного множества* $\bar{E}$, *где соблюдается* (7).

Для $k > 1$ свойства особых точек [т. е. функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$] не дают исчерпывающего признака для различения операторов $(\bar{S})$ и (S). Например, согласно теореме V, оператор

$$D_2(Y) = x(1 - x^2) Y'' - Y'$$

будет оператором (S) на любом отрезке (a, b), так как ни одна из пар особых точек $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ не удовлетворяет условиям (7); напротив, оператор

$$\Delta_2(Y) = D_2(Y) + 2xY = \sqrt{1-x^2}\ \frac{d}{dx}\left[\sqrt{1-x^2}\ (xy' - 2y)\right]$$

является оператором $(\bar{S})$, так как уравнение $\Delta_2(y) = A(x)$ не может иметь регулярного на $(-1, +1)$ решения, если $A(x) > 0$ [действительно, мы получили бы, что $\sqrt{1-x^2}\ (xy' - 2y)_{-1}^{+1} = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{A(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} > 0$, между тем как в случае регулярности левая часть равна нулю].

Поэтому легко применимый благодаря лемме II критерий для распознавания принадлежности оператора к классу (S) или $(\bar{S})$ на основании свойств его особых точек, заключающийся в предлагаемой ниже теореме, не может быть существенно улучшен.

Теорема VI. *Для того чтобы оператор* $D_k(Y(x))$ *порядка* $k > 1$ *был* $(\bar{S})$ *на* (a, b), 1) *необходимо, чтобы на* (a, b) *существовали две особые точки* $\alpha < \beta$, *из которых первая — иррегулярна направо, а вторая — иррегулярна налево*; 2) *достаточно, чтобы существовали* $k+1$ *соседние особые точки* $\alpha < x_1 < \ldots < x_{k-1} < \beta$, из которых все внутренние $x_1, \ldots, x_{k-1}$ *иррегулярны с обеих сторон, а крайние* α и β *соответственно иррегулярны первая справа и последняя слева.*

Например, если мы возьмем произвольные операторы порядка k, у которых $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_0(x) = x^2 \left| \sin \frac{1}{x} \right|^m$, то при $m \geqslant 1$ они все будут класса (S), а при $0 < m < 1$ они будут $(\bar{S})$. Напротив, если $\varphi_0(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, то оба класса возможны, но в частном случае $k = 1$, на основании теоремы V, оператор $D_1(Y)$ — класса (S), как было проверено вначале.

Поступило
29 X 1940