$$\bar{V} = \varepsilon\bar{V}_1 + \varepsilon E^{1/2}\bar{V}_{11} + \varepsilon E\bar{V}_{12} + \varepsilon^2 E^{1/2}\bar{V}_{21} + \varepsilon^2 E\bar{V}_{22} + \ldots$$

$$\zeta = \varepsilon\zeta_1 + \varepsilon E^{1/2}\zeta_{11} + \varepsilon E\zeta_{12} + \varepsilon^2 E^{1/2}\zeta_{21} + \varepsilon^2 E\zeta_{22} + \ldots$$

Число Рейнольдса для упрощения выкладок считается большим, поэтому уравнения содержат малый параметр $\mu^2 = 1/Re$ при старших производных. Это требует применения методов теории пограничного слоя.

Скорость течения представляется в виде суперпозиции скорости внутреннего течения и скорости в пограничных слоях как в окрестности твердой поверхности шара, так и в окрестности свободной поверхности жидкости, причем каждая из них раскладывается в ряд по степеням малого параметра μ.

Тормозящий момент, действующий со стороны жидкости на шар, вызывается не столько величиной приливных горбов, сколько смещением их максимумов относительно линии OO_1, поэтому приходится вычислять все разложения вплоть до того, в котором обнаруживается такое смещение.

С использованием полиномов и присоединенных функций Лежандра найдены несколько первых приближений относительной скорости $\bar{V}(u,v,w)$ течения жидкости и формы ее свободной поверхности.

Для внутреннего течения (при $\mu = 0$) получается:

$$\bar{V}_1 = 0; \quad \bar{V}_{11} = 0; \quad \bar{V}_{21} = 0$$

$\bar{V}_{12}$:

$$u_{12} = a(R_1)(r - r^{-4}) \sin^2\Theta \sin 2\varphi; \quad a(R_1) = -3R_1^4/4(R_1^5 - 1);$$

$$v_{12} = a(R_1)(r + 2r^{-4}) \sin\Theta \cos\Theta \sin 2\varphi;$$

$$w_{12} = a(R_1)((r + 2r^{-4}) \sin\Theta - 2r^{-4} \sin^3\Theta) \cos 2\varphi;$$

$\bar{V}_{22}$: в предыдущих формулах следует заменить коэффициент $a(R_1)$ на

$$A(R_1) = -(3 R_1^5 + 2) R_1^4/4(R_1^5 - 1)^2.$$

Выражения для пограничных функций громоздки и здесь не приводятся.

Свободная поверхность примет вид:

$$\begin{aligned} r = {} & R_1 - \varepsilon R_1 P_2(\cos\Theta)/3 - 2\varepsilon E^{1/2} k R_1 P_2(\cos\Theta)/3 + \\ & + \varepsilon E \;\; R_1(\cos 2\varphi P_2^2(\cos\Theta)/4 - (k^2/3 + 1/2) P_2(\cos\Theta)) + \\ & + \varepsilon^2 E^{1/2} k R_1(16P_4(\cos\Theta)/35 - 40 P_2(\cos\Theta)/63) + \\ & + \varepsilon^2 E R_1((11 R_1^5 + 7) \cos 2\varphi P_2^2(\cos\Theta)/42(R_1^5 - 1) + \\ & + 12(2k^2 + 1) P_4(\cos\Theta)/35 - (20k^2/21 + 1/7) P_2(\cos\Theta)) + \\ & + \varepsilon^2 E\mu c_1 R_1^6 \cos(2\varphi - \pi/4) P_2^2(\cos\Theta)/(R_1^5 - 1)^2 ; \end{aligned}$$

$$c_1 = (15\pi/512)^2\, 2\sqrt{3}/7\, ((69 + 26\sqrt{7})\sqrt{7 + \sqrt{7}} + (69 - 26\sqrt{7})\sqrt{7 - \sqrt{7}}.$$

Для определения гидродинамического момента применяется теорема об изменении момента количества движения: $-L + M_z = 0$, где L – момент силы трения между жидкостью и поверхностью шара, M_z – момент силы притяжения и центробежной силы. После интегрирования по объему жидкости, ограниченному найденной выше поверхностью, в размерном виде получается:

$$M_z = -c_2 \frac{R_1^{12} \rho \nu^{1/2} G^2 M^2 R_0^6}{(R_1^5 - 1)^2 g^2 R^6} \Omega^{3/2}, \quad c_2 = \frac{\pi 12\sqrt{2}}{5} c_1 .$$

Следует отметить, что подход, применяемый к рассматриваемой задаче, дает возможность вычислить гидродинамический момент с помощью решения линейной задачи.

ЭВОЛЮЦИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВИХРЯ СКОРОСТИ ПРИ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О.Н.Шабловский
Гомельский политехнический институт им. П.О.Сухого (Гомель)

В современной гидродинамике важное место занимает проблема изучения свойств вихревого движения вязкой жидкости. Анализ возникновения, эволюции и распространения вихря скорости имеет большое значение. С физической точки зрения решение этих задач необходимо для обнаружения новых нелинейных свойств потока, для выяснения структуры его пространственной неоднородности. С позиций вычислительной гидродинамики эти вопросы актуальны, поскольку при численном моделировании двумерных течений для системы уравнений Навье-Стокса применяются переменные «вихрь-функция тока». В работах [1−5] было показано, что ведущими факторами, которые управляют вихревыми процессами в вязкой жидкости, являются следующие: 1) релаксация вязких напряжений; 2) скорость скольжения жидкости на границах области течения; 3) скачки гидродинамических величин при переходе через линию сильного разрыва потока. В докладе представлены новые результаты исследований по этой проблеме.

1. Для учета релаксации вязких напряжений применяем реологическое уравнение состояния вязкоупругой жидкости Олдройда ($\Upsilon_1\Upsilon_2 \neq 0$) и Максвелла ($\Upsilon_2 = 0$) в следующей форме записи

$$\tau_{ij} + \gamma_1 \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\mu\left(e_{ij} + \gamma_2 \frac{De_{ij}}{Dt}\right),$$

$$\frac{DB_{ij}}{Dt} = \frac{dB_{ij}}{dt} + m\left[B_{ik}\omega_{kj} - \omega_{ik}B_{kj} - l(B_{ik}e_{kj} + e_{ik}B_{kj})\right]$$

$$2e_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}, \quad 2\omega_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}; \quad i, j = 1,2$$

где Υ_1 − время релаксации, Υ_2 − время ретардации, τ_{ij} − компоненты девиатора тензора напряжений; μ − коэффициент динамической вязкости; v_i − компоненты вектора скорости. Оператор дифференцирования при $m = 0$ есть субстанциональная производная по времени; при $m = 1$, $l = 0$ − конвективная производная Яуманна, при $m = 1$, $l = \pm 1$ − две производные Олдройда.

Рассматривается класс течений жидкости, характеризующийся функциями

$$v_1 = xU(y, t), \quad v_2 = v(y, t), \quad p = p(y, t), \quad |x| < \infty,$$

$$\tau_{11} = -\tau_{22} = \rho\,\sigma_1(y, t), \quad \tau_{12} = \tau_{21} = x\,\rho\,\sigma_0(y, t).$$

Динамические процессы анализируются вблизи линии растекания $x = 0$.

2. Перечислим обнаруженные свойства течения в окрестности критической точки. Движение направлено из бесконечности к подвижной непроницаемой стенке, вдоль которой скользит жидкость: $y=y_w(t)$, $v_1 = \zeta\partial v_1/\partial y$, $v_2 = dy_w/dt$. Оказалось, что скорость скольжения на стенке прямо пропорциональна завихренности: $(v_1)_w = -2\zeta(\omega)_w$, где ζ − коэффициент скольжения. Эта связь не зависит явно от времени и не содержит реологических параметров жидкости. Соотношение между касательным напряжением и завихренностью дается формулой $(\tau_{12}/\rho\omega)_w=2\zeta^2\sigma$, причем функция $\sigma = \sigma(t) \cong \mathrm{const}$ очень слабо меняется во времени. При фиксированных Re, ζ с ростом Υ_1, одному и тому же значению касательного напряжения отвечает большая по модулю завихренность. Такая же картина наблюдается при фиксированных Re, Υ_1 по мере убывания ζ. Влияние эффекта скольжения на релаксацию касательного напряжения: на стенке с меньшим ζ, т.е. с сильнее выраженным эффектом прилипания, релаксация $\tau_{12,w}(t)$ происходит быстрее. Если увеличивать число Рейнольдса Re, то это повлияет на релаксацию $\tau_{12,w}$ в качественном отношении так же, как увеличение коэффициента скольжения; в количественном отношении этот фактор проявляется слабее. Отметим еще монотонно убывающую зависимость $(\tau_{12}/\omega)_w$ от числа Re: такая ситуация имеется и для вязкоупругой жидкости, и для классической ньютоновской жидкости. Получены аналитические зависимости, которые показывают, что конечное время релаксации $\Upsilon_1 > 0$ оказывает сглаживающее влияние на эволюцию вихря скорости во времени: $(d\omega_w/dt)_{t=0} \to \infty$, если $\Upsilon_1 \to 0$.

3. Поток жидкости ($v_\infty > 0$) натекает на стенку, которая движется влево, навстречу ему. Тогда существует линия торможения, разделяющая поток на две области прямого и обратного течений. В ходе релаксационного процесса напряжение $\tau_{12,w}$ монотонно растет в конечном диапазоне, причем интенсивность этого роста в значительной степени обусловлена скоростью v_∞ набегающего потока: с ростом v_∞ сужается диапазон, в котором релаксируется вязкое касательное напряжение. При движении стенки навстречу потоку знак дроби $(\tau_{12}/\omega)_w$ отрицательный, в отличие от первого варианта, когда линия торможения отсутствует, и $(\tau_{12}/\omega)_w > 0$. При фиксированных Re, Υ_1, аналогично первой задаче, при одинаковых $\tau_{12,w}$ большая по модулю завихренность присутствует в потоке с сильнее выраженным эф-

фектом прилипания. С увеличением Re дробь $(\tau_{12}/\omega)_w$ убывает по модулю. На линии торможения вихрь скорости равен $\omega_* = -xv_\infty/(2\zeta^2)$, а это означает, что поперечный градиент завихренности, параллельный стенке, обладает свойствами: 1) он весьма чувствителен к эффекту скольжения на стенке, инициирующей обратное течение; 2) выражение ω_* не зависит от реологических свойств жидкости; 3) формула для ω_* включает в себя информацию о свойствах течения по обе стороны линии торможения (слева – v_∞, справа – ζ).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шабловский О.Н. Влияние релаксации вязких напряжений на вихревое течение несжимаемой жидкости // Гидромеханика. Киев: Наукова думка, 1991. № 63, – с. 35-38.
2. Шабловский О.Н. Нелинейный теплоперенос при течении вязкоупругой жидкости через проницаемую поверхность // Реофизика и теплофизика неравновесных систем. Ч. 1. Матер. Международ. шк.- семин. Минск: АНК ИТМО АН БССР, 1991, – с. 151-153.
3. Шабловский О.Н. Исследование неизотермических свойств завихренности при движении вязкоупругой жидкости // Инж.- физ. журн. 1991. Т. 60. № 3, – с. 499.
4. Шабловский О.Н. Стационарный сильный разрыв в потоке неоднородной жидкости и условия изменения типа уравнения для завихренности // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1992. Вып. 105: Акустика неоднородных сред, – с. 249-253.
5. Шабловский О.Н. Динамические и тепловые свойства вихря скорости на сильном разрыве в потоке вязкой релаксирующей жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./ РАН. Сиб. отд-е. Ин-т Гидродинамики. 1995. Вып. 110: Акустика неоднородных сред, – с.177.

ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ В ТЕОРИИ РЕЛАКСАЦИОННОГО ТЕПЛОПЕРЕНОСА

О.Н.Шабловский
Гомельский политехнический институт им. П.О.Сухого (Гомель)

Задачи нестационарной газовой динамики имеют важные практические приложения. Это обстоятельство стимулировало сильное развитие аналитических и численных методов интегрирования квазилинейных систем уравнений в частных производных гиперболического типа. Представляется естественным стремление распространить и развить методы нестационарной газодинамики в другой области нелинейной физики, а именно: в теории переноса тепловой энергии в локально-неравновесных условиях [1]. Подробный анализ гиперболической модели теплопереноса и возникающих нелинейных эффектов имеется в [2–7]. В данном докладе излагаются новые результаты исследований по этой проблеме.

1. Уравнения релаксационного теплопереноса запишем в форме

$$u_t = -q_x,\ \ L_x + q_t = -q/\gamma,\ \ L = L(u),$$

$$du/dT = c(T),\ \ dL/du = w^2 = \lambda/(c\,\gamma),$$

где C – удельная объемная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, T – температура, t – время, x – декартова координата, Υ – время релаксации теплового потока q. Эта система по форме записи близка к уравнениям одномерного нестационарного изоэнтропического течения газа в лагранжевых координатах ξ, t:

$$u_\xi = v_t,\quad u_t = -p_\xi,\quad p = p\,(v),$$

где u – скорость одномерного движения газа, v – удельный объем, p – давление. В записи обеих систем уравнений независимые переменные в роли нижних индексов означают частное дифференцирование. Аргументам и функциям, определяющим теплоперенос {t; x; u; q; L} соответствуют газодинамические параметры {t; ξ; v; -u; -p}. В связи с внешним сходством уравнений релаксационного теплопереноса с уравнениями газодинамики нужно сказать, что применение к тепловым задачам известных газодинамических решений, рассматриваемых как формальные математические решения соответствующих уравнений, требует творческого переосмысления. Во-первых, рассматриваемые системы уравнений не совпадают полностью: присутствие дополнительных слагаемых в тепловой модели значительно затрудняет реализацию известных в газодинамике алгоритмов, требует их модификации. Во-вторых, нужно дать полученным решениям новую - теплофизическую интерпретацию.

2. Установлены качественные и количественные закономерности взаимосвязи температурного градиента неравномерно нагретой среды, в которой распространяется тепловая волна (ТВ), с градиентом температуры в возмущенной области. Оказалось, в частности, что существуют процессы, где эта связь имеет немонотонный характер. В нелинейной бегущей ТВ изучено воздействие на gradT коэффициента теплопроводности $\lambda = \lambda(T)$ и времени релаксации $\Upsilon = \Upsilon(T)$: установлено, что зависимость градиента от Υ более чувствительна к зна-