Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

Е. Я. РЕМЕЗ

ОБ ОСТАТОЧНЫХ ЧЛЕНАХ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИЗА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 XI 1939)

Пусть имеем систему линейно-независимых на сегменте $[a, b]$ функций $\{u_i(x)\}$ $(i=0, 1, 2, 3, \ldots)$, относительно которых предположим здесь, что они обладают непрерывными производными тех порядков, которые фактически войдут в наши рассуждения, и что по крайней мере для некоторых значений μ выполняется условие

$$W(u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1}) \neq 0 \quad \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

где W обозначает детерминант Вронского. Для тех же значений μ линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{W(u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1}, y)}{W(u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1})} \equiv L_\mu(y|x) \equiv \frac{d^\mu y}{dx^\mu} + X_{1,\mu}(x)\frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}} + \ldots + X_{\mu,\mu}(x)\,y = 0\,^* \tag{2}$$

имеет, конечно, непрерывные на $[a, b]$ коэффициенты.

Пусть $A[f(x)]$ обозначает какой-нибудь линейный функционал, определенный в функциональном пространстве C_m функций $f(x)$ с непрерывными на $[a, b]$ производными до порядка m включительно $[m \geqslant 0,$ $f^{(0)}(x) \equiv f(x)]$ и обращающийся в нуль при

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} k_i u_i(x),$$

где $k_0, k_1, \ldots, k_n$—произвольные постоянные $(n \geqslant m-1$, 0 дано).

Разумея далее под $f(x)$ функцию, обладающую непрерывными производными до порядка μ включительно, мы для каждого значения μ, взятого в пределах $m \leqslant \mu \leqslant n+1$ и удовлетворяющего условию (1), будем иметь

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} L_\mu(f|z) \cdot H_\mu(x, z)\,dz + \sum_{i=0}^{\mu-1} c_i u_i(x), \tag{3}$$

---

* $L_0(y|x) \equiv y$.

где $H_\mu(x, z)$ обозначает функцию Коши дифференциального уравнения (2), а $L_\mu(f|z)$ обозначает результат замены в дифференциальном выражении $L_\mu(y|x)$ величин y и x на $f(z)$ и z соответственно. Легко видеть, что значение оператора $A[f(x)]$, где $f(x)$ пробегает функциональное пространство C_μ, может быть рассматриваемо также как линейный функционал от $L_\mu(f|x) = l(x)$ в пространстве C непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций $l(x)$. В таком случае в силу известной основной теоремы Ф. Рисса [1] может быть построена (для каждого из упомянутых значений μ) фиксированная функция ограниченной вариации $\alpha_\mu(x)$ такая, что для всякой $f(x)$ с непрерывной на $[a, b]$ производной порядка μ имеем

$$A[f(x)] = \int_a^b L_\mu(f|x) \cdot d\alpha_\mu(x), \tag{4}$$

где интеграл понимается в смысле Стильтьеса. При $\mu > m$ (сохраняя другие условия, сформулированные для μ) функции $\alpha_\mu(x)$ оказываются абсолютно непрерывными, и представление (4) может быть заменено представлением вида

$$A[f(x)] = \int_a^b L_\mu(f|x) \cdot \varkappa_\mu(x)\, dx, \tag{5}$$

где $\varkappa_\mu(x)$ [«почти производная» от $\alpha_\mu(x)$]—функция ограниченной вариации, которая при $\mu > m+1$ сама является абсолютно непрерывной.

Линейными функционалами рассматриваемого здесь вида $A[f(x)]$ являются остаточные члены весьма разнообразных формул приближенного анализа: различных формул механических квадратур и суммации, численного дифференцирования, интерполирования, разложения функций по ортогональным полиномам и т. п. Построение выражений определяющих функций $\alpha_\mu(x)$ или их (обобщенных) производных $\varkappa_\mu(x)$ выполняется на основе общего метода, указанного Ф. Риссом (op. cit) для построения аналитического представления линейного функционала в пространстве C. Более подробная работа автора, которая будет напечатана в ближайшее время в журнале Института математики Академии Наук УССР, наряду с явными формулами для построения функций $\alpha_\mu(x)$ и $\varkappa_\mu(x)$ * содержит, с одной стороны, систематическое исследование основных свойств этих функций [существование производных последовательных порядков, их структурные свойства и граничные значения, различные дифференциальные и интегральные соотношения между функциями $\varkappa_\mu(x)$ или $\alpha_\mu(x)$, соответствующими разным значениям μ, и т. д.] и свойств самих интегральных представлений остаточных членов, а с другой стороны, применение к нахождению новых оценок остаточных членов для некоторых практически важных конкретных случаев.

При оценке остаточных членов представляет несомненный интерес вопрос о нахождении для них выражений через средние значения. В том случае, когда множитель $\varkappa_\mu(x)$ в (5) сохраняет постоянный знак или функция $\alpha_\mu(x)$ в (4) является монотонной, применение соответствующей теоремы о среднем значении приводит к представлению вида

$$A[f(x)] = c_\mu \cdot L_\mu(f|\xi) \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{6}$$

---

* Как частные случаи таким путем получаются разные интегральные представления остаточных членов, которые указывались в последние годы R. Mises'ом [2], J. Radon'ом [3] и другими авторами [4] на основе различных теоретических соображений. Сюда же, безусловно, должен быть отнесен и значительно более ранний мемуар G. D. Birkhoff'a [5].

С другой стороны, нетрудно убедиться, что представления (6) заведомо не существует, если в (5) функция $\varkappa_\mu(x)$ (которую тут можно всегда предположить непрерывной справа) меняет знак в (a, b) или когда в (4) функция $\alpha_\mu(x)$ не является монотонной на $[a, b]$. Нижеследующие результаты (повидимому, никем до сих пор не отмеченные) получены мною путем применения рассматриваемых методов к некоторым конкретным случаям.

1. *Суммационно-квадратурная формула Лапласа с внутренними ординатами* ([6]):

$$\int_a^{a+rh} f(x)\,dx - (T + hU_s) = R_s \qquad (r \geqslant 2s > 0; \quad r,\ s\text{—целые}), \tag{7}$$

где, полагая

$$f(x) = y, \quad a + ih = x_i, \quad f(x_i) = y_i,$$

имеем:

$$T = h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{r-1} + \frac{1}{2}y_r\right),$$

$$U_s = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i+1} L_{i+1} [\Delta^i y_{r-i} + (-1)^i \Delta^i y_0];$$

$$L_i = \int_0^1 \frac{t(t-1)\ldots(t-\overline{i-1})}{i!}\,dt$$

$$\left(L_2 = -\frac{1}{12}, \quad L_3 = \frac{1}{24}, \quad L_4 = -\frac{19}{720}, \quad L_5 = \frac{3}{160}, \ldots\right).$$

Для всех четных значений s остаточный член оказывается представимым в виде

$$R_s = -h^{s+3}[2L_{s+3} - (r-s-1)L_{s+2}]\, f^{(s+2)}(\xi) \qquad (a < \xi < a + rh). \tag{8}$$

Для нечетных же s представления вида (6) вовсе не существует *.

Эти результаты устанавливаются, принимая во внимание, с одной стороны, симметрические свойства течения соответствующих функций $\varkappa_\mu(x)$ на $[a, a+rh]$ и периодичность их на $[a+sh,\ a+\overline{r-s}h]$, а с другой стороны, сопоставляя эти функции между собой и с соответствующими функциями $\tilde{\varkappa}_\mu(x)$ для другой формулы Лапласа—с внешними ординатами ([7]), где функция $\tilde{\varkappa}_\mu(x)$ с наивысшим индексом заведомо сохраняет знак на $[a,\ a+\overline{r+s}h]$.

2. *Формулы квадратур Чебышова* ([8]):

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} f(x_{\nu,i}) = R_\nu, \tag{9}$$

где $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$. Академик С. Н. Бернштейн ([9]) доказал, что эти значения ν—единственные, при которых рассматриваемые здесь

* Для этих значений s имеем лишь представление R_s в следующем, несколько более сложном виде:

$$R_s = -2L_{s+2}h^{s+2} f^{(s+1)}(\xi_1) - h^{s+4}[2L_{s+4} - (r-s-2)L_{s+3}]\, f^{(s+3)}(\xi_2)$$
$$(a < \xi_1, \xi_2 < a + rh).$$

формулы Чебышова существуют. Произведенное мною исследование показало, что остаточный член R, для всех этих формул Чебышова допускает представление вида (6). Таким образом получаем:

$$R_{2k+1}=c_{2k+1}(b-a)^{2k+3}f^{(2k+2)}(\xi_{2k+1}),\quad R_{2k}=c_{2k}(b-a)^{2k+3}f^{(2k+2)}(\xi_{2k}),\qquad (10)$$

где при $a<\xi_{2k+1},\ \xi_{2k}<b$ имеем *

$$c_3=\frac{1}{11\,520}\approx 0{,}0^4868;\quad c_4=\frac{1}{2\,721\,600}\approx 0{,}0^6367;\quad c_5=\frac{13}{69\,672\,960}\approx 0{,}0^6187;$$

$$c_6=\frac{0{,}001}{2\,032\,128}\approx 0{,}0^9492;\quad c_7=\frac{0{,}281}{1\,003\,290\,624}\approx 0{,}0^9280;$$

$$c_9=\frac{0{,}163}{549\,357\,355\,008}\approx 0{,}0^{12}297.$$

3. *Формулы численного дифференцирования для основного ряда эквидистантных значений аргумента, выводимые последовательным дифференцированием*** *из интерполяционных формул Стирлинга и Бесселя.*

Общее исследование данного вопроса показывает, что остаточные члены этих формул допускают представление вида (6), причем выражение остаточного члена через среднее значение производной имеет вид, аналогичный тому, какой получается для первого отбрасываемого члена соответствующего формального разложения по разностям (однако с более узким интервалом для среднего значения аргумента). В частности, например, формальным разложениям [10]

$$f'\left(a+\frac{1}{2}h\right)\sim\frac{1}{h}\left(\delta f_{1/2}-\frac{1}{24}\delta^3 f_{1/2}+\frac{3}{640}\delta^5 f_{1/2}-\right.$$

$$\left.-\frac{5}{7\,168}\delta^7 f_{1/2}+\frac{35}{294\,912}\delta^9 f_{1/2}-\ \ldots\right),$$

$$f''(a)\sim\frac{1}{h^2}\left(\delta^2 f_0-\frac{1}{12}\delta^4 f_0+\frac{1}{90}\delta^6 f_0-\frac{1}{560}\delta^8 f_0+\frac{1}{3\,150}\delta^{10} f_0-\ \ldots\right)$$

соответствуют два бесконечных ряда формул с остаточными членами:

$$f'\left(a+\frac{1}{2}h\right)=\frac{1}{h}\delta f_{1/2}-\frac{1}{24}h^2 f'''(\xi_1)=$$

$$=\frac{1}{h}\left(\delta f_{1/2}-\frac{1}{24}\delta^3 f_{1/2}\right)+\frac{3}{640}h^4 f^{(5)}(\xi_2)=\ \ldots,\qquad (11)$$

$$f''(a)=\frac{1}{h^2}\delta^2 f_0-\frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\eta_1)=\frac{1}{h^2}\left(\delta^2 f_0-\frac{1}{12}\delta^4 f_0\right)+\frac{1}{90}h^4 f^{(6)}(\eta_2)=\ \ldots,\qquad (12)$$

где

$$a-\overline{i-1}\,h<\xi_i<a+ih,\quad a-ih<\eta_i<a+ih\quad (i=1,2,3,\ldots).$$

4. *Тригонометрическое интерполирование.*

Имеет место следующая формула тригонометрического интерполирования с остаточным членом вида (6):

$$f(x)-\sum_{i=1}^{2k+1} f(x_i)\,Q_i(x;x_1,\ \ldots\ ,x_{2k+1})=$$

$$=L_{2k+1}(f|\xi)\cdot\left[\frac{x}{(k!)^2}-\sum_{i=1}^{2k+1}\frac{x_i}{(k!)^2}Q_i(x;x_1,\ \ldots\ ,x_{2k+1})\right],\qquad (13)$$

---

* Выражения R_1, R_2 оставляем в стороне как известные.

** Произвольное число раз, безразлично четное или нечетное.

где

$$Q_i(x; x_1, \ldots, x_{2k+1}) = \frac{\sin\frac{x-x_1}{2} \ldots \sin\frac{x-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x-x_{i+1}}{2} \ldots \sin\frac{x-x_{2k+1}}{2}}{\sin\frac{x_i-x_1}{2} \ldots \sin\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\sin\frac{x_i-x_{i+1}}{2} \ldots \sin\frac{x_i-x_{2k+1}}{2}};$$

$$L_{2k+1}(f|x) = D(D^2+1)(D^2+4) \ldots (D^2+k^2) f(x);$$

$$0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, \quad x < 2\pi;$$

$$\inf\{x_1, \ldots, x_{2k+1}, x\} < \xi < \sup\{x_1, \ldots, x_{2k+1}, x\}.$$

Эта формула, также никем, кажется, не отмеченная, может быть установлена тем же общим методом на основе интегрального представления остаточного члена, если учесть известные интерполяционные свойства системы тригонометрических функций и принять во внимание одну теорему G. Pólya (11).

Институт математики
Академия Наук УССР
Киев

Поступило
23 XI 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Riesz, Annal. de l'École Normale, 31 (1914). [2] R. Mises, Journ. f. d. reine u. angew. Math., 174 (1935). [3] J. Radon, Monatshefte f. Math. u. Phys. (1935). [4] G. Peano, Atti d. Reale Acc. dei Lincei (1913); И. Штаерман, Вісті Київ. Політехн. Ін-ту (1926); G. Kowalewski, Interpolation u. genäh. Quadratur (1932); W. Wirtinger, ZS. f. ang. Math. u. Mech. (1933); R. Schmidt, Journ. f. d. reine u. angew. Math., 173 (1935). [5] G. D. Birkhoff, Trans. of the Amer. Math. Soc. (1906). [6] Laplace, Oeuvres, IV, 229—230; А. Н. Крылов, Прибл. числ. инт. об. дифф. уравнений, стр. 33 (1923). [7] Laplace, loc. cit.; J. Steffensen, Interpolation, 104—106 (1927); H. Nielsen, Arkiv f. Mat., Astr. och Phys. (1908). [8] П. Чебышов, Сочинения, II, 165—180; А. Н. Крылов, Лекц. о прибл. выч., 88 — 97 (1933). [9] С. Н. Бернштейн, ДАН, XIV, № 6 (1937). [10] Fr. A. Willers, Praktische Analysis (1928). [11] G. Pólya, Trans. of the Am. Math. Soc., 24, theorem IV (1924).