Доклады Академии Наук СССР
1940. Том XXVI, № 2

МАТЕМАТИКА

В. С. ФЕДОРОВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 20 XI 1939)

1. Пусть $f(z)$ — функция комплексного переменного $z=x+iy$, однозначная и непрерывная (но вообще не аналитическая) в некоторой открытой и связной области D; пусть (z, r)—круг с центром z и с радиусом r, $\Gamma(z, r)$—его окружность с текущей точкой $z+re^{\varphi i}$. Рассмотрим для всякой точки z области D все круги (z, r), расположенные в D. Для каждой окружности $\Gamma(z, r)$ рассмотрим коэффициенты Фурье, a_n и b_n, функции $F(\varphi)=f(z+re^{\varphi i})$. Положим

$$a_n=a_n(z, r), \quad b_n=b_n(z, r),$$

$$L_n=L_n(z, r)=\pi i r^n\cdot[a_n(z, r)+ib_n(z, r)],$$

$$I_n=I_n(z, \rho)=-i\int\limits_0^\rho L_n(z, r)\, r\, dr=\iint\limits_{(z, r)} f(t)\cdot(t-z)^n\cdot d\sigma,$$

$$q_n=q_n(z, \rho)=\frac{1}{\rho^{2n+2}}|I_n(z, \rho)|$$

[мы всегда предполагаем—здесь и ниже,—что точки z и круги (z, ρ) расположены в области D].

2. Пусть $\{f\}$ есть такое семейство функций $f(z)$, что всякая функция этого семейства—однозначная и непрерывная в области D и обладает для данного натурального n по крайней мере одним из следующих свойств:

A_n) $I_n=0$ для всякого круга (z, ρ);

A'_n) $L_n=0$ для всякого круга (z, r);

A''_n) $q_n\to 0$ при $\rho\to 0$ и для каждой точки z;

a_n) для каждой точки z существует такое положительное число $\rho(z)$, что $I_n=0$ всякий раз, когда $\rho\leqslant\rho(z)$;

α_n) рассмотрим множество всех кругов, содержащих одну и ту же точку ζ.

Для всякого круга (z, ρ) этого множества имеем $q_n(z, \rho)<\Phi(\zeta)$, где положительная функция $\Phi(\zeta)$—конечная в области D.

B_n) существует по крайней мере один такой круг (z_0, ρ_0), для которого $I_{n-1}(z_0, \rho_0)$ не равен нулю;

B'_n) существует по крайней мере одна такая окружность $\Gamma(z_0, r_0)$, что $L_{n-1}(z_0, r_0)$ не равен нулю;

B''_n) существует по крайней мере одна такая точка z_0, что $q_{n-1}(z_0, \rho)$ не стремится к нулю вместе с ρ;

h_n) имеем в области D: $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} h_k(z)\, x^k$, где $h_k(z)$ — голоморфные в D;

H_n) имеем свойство h_n и $h_{n-1}(z)$ не равна тождественно нулю.

3. Для всяких двух свойств P и Q функции $f(z)$ символическая формула $P \sim Q$ будет означать, что P и Q—эквивалентные, т. е. $f(z)$ обладает свойством P всякий раз, когда она обладает свойством Q и наоборот. Мы употребляем символ (P, Q) для указания, что $f(z)$ обладает одновременно свойствами P и Q.

Наконец, будем обозначать через $\pi_n(x, y)$ всякий полином степени n от x и y с какими угодно комплексными коэффициентами и через $P_n(x, y)$—такой полином с действительными коэффициентами.

4. Автор доказал следующие теоремы:

Теорема 1. *Для всякого натурального числа n имеем:* $A_n \sim h_n$, $(A_n, B_n) \sim H_n$, $(A''_n, \alpha_n) \sim A_n$, $(A''_n, \alpha_n, B''_n) \sim (A_n, B_n)$.

Теорема 2. *Существуют такие функции семейства $\{f\}$, которые обладают свойством a_{n_k} (и тем более свойством A''_{n_k}) для бесконечной последовательности натуральных чисел n_k, но не обладают свойством A_{n_k} для всех этих чисел n_k.*

Теорема 3. *Из свойства A''_n следует, что во всякой области, расположенной в области D, найдется такая область, в которой $f(z)$ обладает свойством A_n (т. е. $I_n = 0$ для всякого круга, расположенного в последней области).*

Теорема 4. *Всякая функция семейства $\{f\}$, которая принимает только действительные значения в области D и обладает для данного натурального числа n свойством A_n, есть полином вида*

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} (x^2+y^2)^{n-k} \cdot P_{m_k}(x, y), \\ \text{где}\quad &m_k \leqslant k-1, \end{aligned}\right\} \qquad (P)$$

и, наоборот, всякий полином (P) обладает свойством A_n.

Наконец, очевидно, что для всякого натурального n имеем

$$A'_n \sim A_n, \quad B'_n \sim B_n.$$

Следствие 1. Необходимое и достаточное условие того, что некоторая функция $f(z)$, непрерывная и действительная в области D, есть полином от x и y, можно формулировать так: для всякой области $\overline{\Delta}$, расположенной вместе со своей границей внутри D, найдется такое натуральное число n, что $\frac{a_n(z, r)}{r^n}$ и $\frac{b_n(z, r)}{r^n}$ стремятся к нулю вместе с r равномерно в области $\overline{\Delta}$ (при постоянном n).

Следствие 2. Всякая функция семейства $\{f\}$, обладающая для данного натурального n свойством A_n, обладает также свойствами A_m $(m > n)$.

Следствие 3. Всякий полином $\pi_m(x, y)$ обладает свойством A_n для $n > m$, а полином $\pi_n(x, y)$ обладает этим свойством при следующем необходимом и достаточном условии: если положить

$$\pi_n(x, y) = \sum a_{pq} x^p y^q,$$

то имеем

$$(a_{n0} - a_{n-2,2} + a_{n-4,4} - \ldots) + i(a_{n-1,1} - a_{n-3,3} + \ldots) = 0.$$

Наконец, заметим, что среди полиномов от x и y, которые обладают свойством A_n для данного n, действительные полиномы отличаются от прочих полиномов тем свойством, что первые имеют степень, самое большее, $2n-2$, в то время как вторые могут быть произвольной степени.

Поступило
21 XI 1939