

УДК 621.396

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЯ КАНАЛА ИМПУЛЬСНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ПРИСУТСТВИИ СФЕРИЧЕСКОГО ЭКРАНА И ТОНКОГО ПРОВОДЯЩЕГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ ТЕОРЕМ СЛОЖЕНИЯ

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

Учреждение образования «Белорусский государственный университет», г. Минск

Д. В. КОМНАТНЫЙ, Е. В. ЛОЗОВСКАЯ

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

Одной из задач, возникающих при проектировании оборудования высокого напряжения, является задача вычисления параметров электростатического поля в разрядных промежутках на различных этапах развития электрического разряда [1]. Решение этой задачи, поставленной для системы проводящих тел различной геометрической формы, возможно численными методами. В частности, широкое применение находит метод интегральных уравнений [1]. Применение этого метода приводит к необходимости строить сложные сетки граничных элементов и решать большие системы линейных алгебраических уравнений. Можно добиться уменьшения размерности сетки граничных элементов и системы линейных алгебраических уравнений, применяя метод теорем сложения [2], [3]. В [3] метод теорем сложения использован для решения задач экранирования электростатического поля. В настоящей статье этот метод применяется к анализу электростатического поля импульсного электрического разряда на лидерной стадии развития.

Постановка задачи

В пространстве R^3 с диэлектрической проницаемостью среды ϵ_0 , в котором введена система координат $Oxyz$, размещена электродинамическая система, состоящая из объектов (рис. 1):

$D_1 = \{x^2 + y^2 < r_0^2; 0 < z < h\}$ – заземленный металлический стержень высоты h и радиуса r_0 ;

$D_2 = \{(x - x_2')^2 + (y - y_2')^2 + (z - z_2')^2 < R^2\}$ – заземленный металлический шар радиуса R с координатами центра x_1', y_2', z_2' ;

$D_3 = \{x = x_3'; y = y_3'; z_1 < z < z_2\}$ – нить, вдоль которой распределены электрические заряды с заданной линейной плотностью $\sigma(z)$ Кл/м.

Вводятся обозначения: область $D = R^3 / (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$; Γ_1 – боковая поверхность стержня D_1 ; Γ_2 – поверхность шара D_2 . Электростатическое поле в области D описывается потенциальными функциями: u_1 – потенциал поля индуцированных на стержне зарядов; u_2 – потенциал поля индуцированных на шаре зарядов; u_0 – потенциал поля заряженной нити; $u = u_1 + u_2 + u_0$ – суммарный потенциал поля в области D .

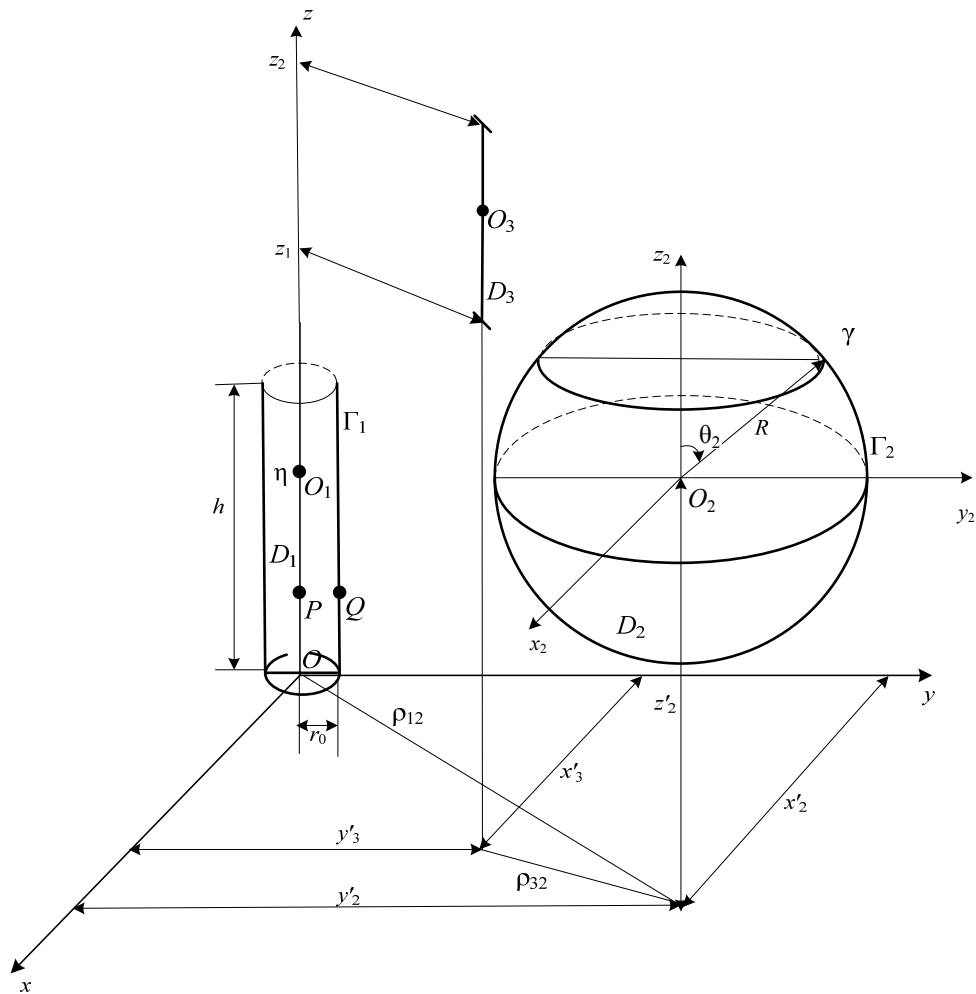


Рис. 1. Электродинамическая система для анализа электрического поля при импульсном разряде

Для поля в области D формулируется краевая задача. Для потенциала u справедливо уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } D. \quad (1)$$

Граничные условия:

$$u|_{\Gamma_1} = 0; \quad (2)$$

$$u|_{\Gamma_2} = 0. \quad (3)$$

Условия на бесконечности:

$$u_1 \rightarrow 0; \quad u_2 \rightarrow 0; \quad u_0 \rightarrow 0 \quad \text{при } M \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $M(x; y; z) \in D$.

На основании решения краевой задачи (1)–(4) требуется вычислить распределение электрических зарядов на поверхностях Γ_1 и Γ_2 .

Вывод расчетных соотношений

Для решения краевой задачи (1)–(4) искомые потенциалы представляются в виде:

$$u_1(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^h \frac{\tau(\eta)}{r_1} d\eta, \quad (5)$$

где $\tau(\eta)$ – искомая линейная плотность электрических зарядов стержня, Кл/м; $r_1 = R_{MO_1} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \eta)^2}$ – расстояние между точкой на оси стержня $O_1(0, 0, \eta)$ и точкой в пространстве, вычисленное в глобальной системе координат.

$$u_2(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{X_{mn}}{r_2^{n+1}} Y_n^m(\theta_2; \varphi_2), \quad (6)$$

где $Y_n^m(\theta_2; \varphi_2) = P_n^m(\cos \theta_2) \exp(j\varphi_2)$; P_n^m – присоединенная функция Лежандра [2]; $r_2 = R_{MO_2} = \sqrt{(x - x'_2)^2 + (y - y'_2)^2 + (z - z'_2)^2}$ – расстояние между центром шара и точкой в пространстве. Таким образом, потенциал шара представлен в системе сферических координат, связанных с центром шара $O_2(r_2, \theta_2, \varphi_2)$:

$$u_0(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sigma(a)}{r_3} da, \quad (7)$$

где $r_3 = R_{MO_3} = \sqrt{(x - x'_3)^2 + (y - y'_3)^2 + (z - a)^2}$ – расстояние между точкой пространства и точкой нити $O_3(x'_3; y'_3; a)$, вычисленное в глобальной системе координат.

Граничное условие (2) записывается в виде:

$$u_1(Q) + u_2(P) + u_0(P) = 0, \quad (8)$$

где точка $Q(x_0; y_0; \xi) \in \Gamma_1$, точка $P(0; 0; \xi)$ лежит на оси стержня и $0 \leq \xi \leq h$.

Потенциал (7) в точке P выражается следующим образом:

$$u_0(P) = k \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sigma(a)}{R_{PO_3}} da = k \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sigma(a)}{S_1(\xi - a)} da = F(\xi), \quad (9)$$

где $S_1(\xi - a) = R_{PO_3} = \sqrt{(x'_3)^2 + (y'_3)^2 + (\xi - a)^2}$; $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Потенциал (5) в точке Q имеет вид:

$$u_1(Q) = k \int_0^h \frac{\tau(\eta)}{R_{QO_1}} d\eta = k \int_0^h \frac{\tau(\eta)}{S_2(\xi - \eta)} d\eta, \quad (10)$$

где $S_2(\xi - \eta) = R_{QO_1} = \sqrt{r_0^2 + (\xi - \eta)^2}$.

Далее потенциал (6) в точке P :

$$u_2(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n X_{mn} G_{mn}(\xi), \quad (11)$$

где $G_{mn}(\xi) = \frac{(-1)^m (x'_2 + jy'_2)^m}{\rho_{12}^m (L(\xi))^{n+1}} P_n^m \left(\frac{\xi - z'_2}{L(\xi)} \right)$; $\rho_{12} = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2}$, положение этого отрезка показано на рис. 1; $L(\xi) = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + (\xi - z'_2)^2}$.

Подстановка (9)–(11) в (8) дает

$$k \int_0^h \frac{\tau(\eta)}{S_2(\xi - \eta)} d\eta + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n X_{mn} G_{mn}(\xi) + F(\xi) = 0. \quad (12)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию (3) необходимо потенциалы (5) и (7) разложить по сферическим функциям в сферической системе координат, связанной с центром шара O_2 . Для этого применяется известная теорема сложения, связывающая гармонические функции в двух системах сферических координат, центры которых сдвинуты произвольным образом в пространстве [2]. Теорема в частном случае $m = 0$, $n = 0$ имеет вид:

$$\frac{1}{r_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=-k}^k A_{pk}(O_1, O_2) r_2^k Y_k^p(\theta_2; \varphi_2);$$

$$A_{pk}(O_1; O_2) = \frac{(j(y'_2 - y'_1) - (x'_2 - x'_1))^p}{\rho_{12}^p r_{12}^{k+1}} P_k^{-p} \left(\frac{z'_2 - z'_1}{r_{12}} \right), \quad (13)$$

где r_{12} – расстояние между центрами систем координат, м; ρ_{12} – расстояние между центром системы координат 1 и проекцией центра системы координат 2 на плоскость $x'_1 O y'_1$, м.

Тогда разложение потенциала (5) на основании (13) имеет вид:

$$u_1(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{mn} r_2^n Y_n^m(\theta_2; \varphi_2); \quad (14)$$

$$B_{mn} = k \int_0^h \tau(\eta) A_{mn}^{(1)}(\eta) d\eta; \quad (15)$$

$$A_{mn}^{(1)}(\eta) = \frac{(jy'_2 - x'_2)^m}{\rho_{12}^m (L(\eta))^{n+1}} P_n^{-m} \left(\frac{z'_2 - \eta}{L(\eta)} \right);$$

$$L(\eta) = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + (z'_2 - \eta)^2}.$$

Разложение потенциала (7) по сферическим функциям имеет вид:

$$u_0(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_{mn} r_2^n Y_n^m(\theta_2; \varphi_2); \quad (16)$$

$$C_{mn} = k \int_{z_1}^{z_2} \sigma(a) A_{mn}^{(3)}(a) da; \quad (17)$$

$$A_{mn}^{(3)}(a) = \frac{(j(y'_2 - y'_3) - (x'_2 - x'_3))^m}{\rho_{32}^m (r_{32}(a))^{n+1}} P_n^{-m} \left(\frac{z'_2 - a}{r_{32}(a)} \right);$$

$$\rho_{32} = \sqrt{(x'_3 - x'_2)^2 + (y'_3 - y'_2)^2}.$$

Положение этого отрезка показано на рис. 1.

$$r_{32}(a) = \sqrt{(x'_3 - x'_2)^2 + (y'_3 - y'_2)^2 + (z'_2 - a)^2}.$$

После подстановки (6), (14) и (16) в (3) получается:

$$u \Big|_{r_2 = R} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{X_{mn}}{R^{n+1}} + R^n B_{mn} + R^n C_{mn} \right) Y_n^m = 0.$$

После приравнивания коэффициентов гармоник нулю получается соотношение

$$X_{mn} = -R^{2n+1} (B_{mn} + C_{mn}). \quad (18)$$

Из уравнения (12) исключаются коэффициенты X_{mn} с помощью (19), после подстановки в уравнение формул (15) и (17) и необходимых преобразований получается интегральное уравнение первого рода типа Поклингтона относительно неизвестной плотности заряда на стержне:

$$\int_0^h \tau(\eta) K(\xi, \eta) d\eta = g(\xi). \quad (19)$$

Ядро уравнения (19) имеет вид:

$$K(\xi, \eta) = \frac{1}{S_2(\xi - \eta)} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R^{2n+1} A_{mn}^{(1)} G_{mn}(\xi).$$

Правая часть (19) такова:

$$g(\xi) = \int_{z_1}^{z_2} \sigma(a) G(\xi, a) da,$$

где обозначено $G(\xi, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n R^{2n+1} A_{mn}^{(3)} G_{mn}(\xi) - \frac{1}{S_1(\xi - a)}$.

Для поверхностной плотности заряда на поверхности сферы Γ_2 с учетом (18) справедлива формула

$$\sigma_2(\theta_2, \varphi_2) = -\varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial r_2} \Big|_{r_2=R} = -\varepsilon_0 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (2n+1) R^{n-1} (B_{mn} + C_{mn}) Y_n^m(\theta_2; \varphi_2). \quad (20)$$

Вычислительный эксперимент

Решение интегрального уравнения первого рода типа (19) в [4] предлагается производить наиболее простым методом саморегуляризации. При этом уравнение (19) сводится к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{s=1}^N \tau(\eta_s) \int_{\eta_{s-1}}^{\eta_s} K(\xi_k, \eta) d\eta = g(\xi_k), \quad (21)$$

где $k = 1; 2; \dots; N; s = 1; 2; \dots; N$.

Точки наблюдения задаются в методе саморегуляризации по соотношению $\xi_k = \frac{\eta_{k-1} + \eta_k}{2}$, что обеспечивает сходимость решения.

Размеры объектов задачи приняты по данным литературных источников [5], [6]: $h = 20$ м; $r_0 = 0,04$ м; $x'_3 = 4$ м; $y'_3 = 3$ м; $z_1 = 30$ м; $z_2 = 50$ м; $R = 2$ м; $x'_2 = 10$ м; $y'_2 = 17,32$ м; $z'_2 = 5$ м. Заряд нити принят равным заряду наиболее распространенного в природе лидера молнии, а именно $\sigma = -3,7 \cdot 10^{-3}$ Кл/м [5]. Для оценки числа слагаемых в рядах, входящих в состав ядра и правой части уравнения (19), использованы неравенства:

$$\left(\frac{R}{l_1}\right)^N < 10^{-5}; \quad \left(\frac{R}{l_2}\right)^N < 10^{-5}, \quad (22)$$

где l_1 – расстояние между центром шара и нитью, м; l_2 – расстояние между центром шара и стержнем, м. Оценка по соотношению (22) показывает, что для получения корректного решения достаточно удерживать 6 слагаемых в первых суммах каждого ряда. Промежуток интегрирования разделялся на 80 участков ($N = 80$).

Вычисление коэффициентов и решение системы (21) осуществлялось при помощи программ компьютерной математики. На рис. 2 показан полученный в результате расчетов график распределения плотности заряда вдоль стержня.

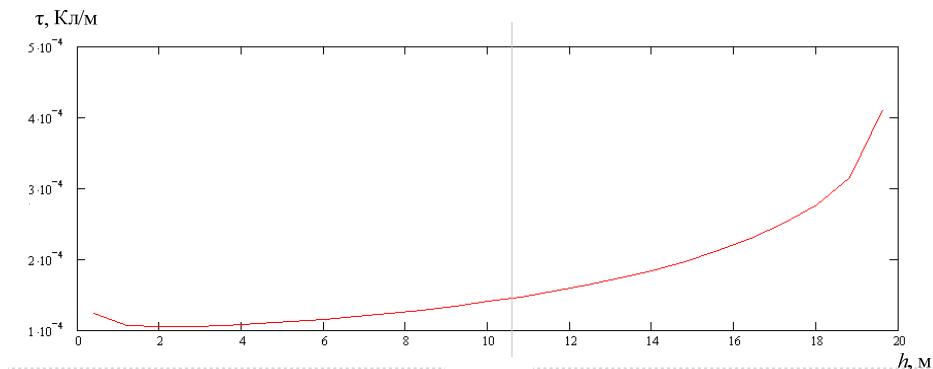


Рис. 2. Распределение плотности заряда вдоль стержня

Анализ графика показывает, что распределение плотности заряда является гладким, индуцированный заряд имеет положительный знак, плотность заряда возрастает к концам стержня, причем становится наибольшей у конца стержня, близкого к заряженной нити. Таким образом, рассчитанное распределение плотности заряда соответствует физическим соображениям об особенностях распределения плотности заряда.

На рис. 3 показано распределение заряда по поверхности сферы на окружности γ (рис. 1) при сферической координате $\theta_2 = \pi/4$. На основании формулы (20) имеем $\sigma_2 = \sigma_2\left(\frac{\pi}{4}, \varphi_2\right)$. Видно, что распределение является гладким, индуцированный заряд имеет положительный знак; это также соответствует физическим соображениям.

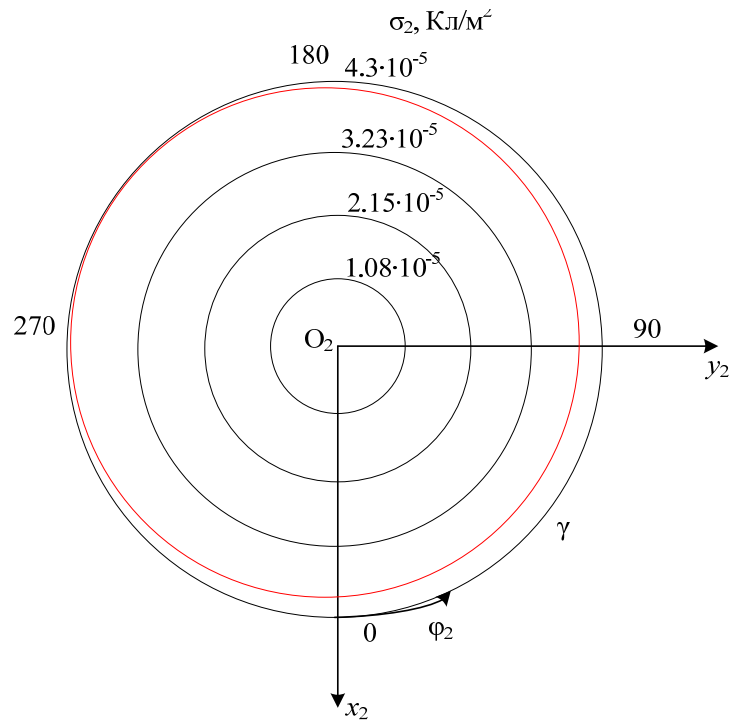


Рис. 3. Распределение плотности заряда по поверхности сферического экрана

С целью демонстрации возможностей рассматриваемого метода для решения возникающих на практике задач был осуществлен расчет полного заряда, индуцированного на стержне в зависимости от высоты стержня. Известно [5], что вероятность поражения объекта каналом разряда прямо пропорциональна наведенному на объекте заряду. Следовательно, если заземленный стержень предназначен для защиты объекта от поражения импульсным разрядом, то по величине индуцированного на стержне заряда можно судить об эффективности защитной конструкции, вероятность поражения которой должна быть достаточно высока. Результаты расчета сведены в таблицу.

Таблица зависимости полного заряда стержня от его высоты

Высота стержня h , м	Полный заряд стержня Q , Кл
10	$1,17 \cdot 10^{-5}$
15	$2,49 \cdot 10^{-5}$
20	$1,01 \cdot 10^{-4}$
25	$3,56 \cdot 10^{-4}$
30	$8,99 \cdot 10^{-4}$
35	$1,57 \cdot 10^{-3}$

Из таблицы следует, что в общем случае заряд стержня возрастает с увеличением высоты стержня. Соответственно возрастает и вероятность поражения стержня разрядом и эффективность стержня в качестве элемента защиты.

Заключение

Результаты вычислительного эксперимента позволяют сделать вывод, что расчет электромагнитных процессов в разрядной системе может быть выполнен путем сведения краевой задачи электростатики к интегральному уравнению первого рода типа

Поклингтона. Метод теорем сложения дает возможность получить расчетные уравнения для системы, включающей граничные поверхности различной геометрической формы. Уравнение Поклингтона является одномерным и успешно решается простым методом саморегуляризации. Размерность системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей уравнению Поклингтона, невелика. Следовательно, численное решение задачи не содержит значительных трудностей.

С помощью рассмотренного метода возможно решать возникающие на практике задачи моделирования устройств защиты энергетических установок, определять эффективность этих устройств. Следует также отметить, что рассматриваемым методом можно вычислить заряд, индуцированный на объекте, моделирующем защитный экран электроустановки. Этот заряд является начальным условием для расчета волн перенапряжения, возникающих после завершения импульсного разряда, при нейтрализации заряда, наведенного на объектах.

Таким образом, допустимо считать, что метод теорем сложения может найти широкое применение для решения задач электроэнергетики и техники высоких напряжений.

Литература

1. Колечицкий, Е. С. Расчет электрических полей устройств высокого напряжения / Е. С. Колечицкий. – М. : Энергоатомиздат, 1983. – 168 с.
2. Ерофеенко, В. Т. Теоремы сложения / В. Т. Ерофеенко. – Минск : Наука и техника, 1989. – 254 с.
3. Шушкевич, Г. Ч. Расчет электростатических полей методом парных тройных уравнений с использованием теорем сложения / Г. Ч. Шушкевич. – Гродно : ГрГУ, 1999. – 238 с.
4. Дмитриев, В. И. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики / В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. – М. : Изд-во МГУ, 1987. – 165 с.
5. Александров, Г. И. Молния и молниезащита / Г. И. Александров. – М. : Наука, 2008. – 274 с.
6. Александров, Г. И. Изоляция электрических аппаратов высокого напряжения / Г. И. Александров, В. И. Иванов. – М. : Энергоатомиздат, 1994. – 207 с.

Получено 16.05.2012 г.