Доклады Академии Наук СССР
1938. Том XVIII, № 4—5

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

К ТЕОРИИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 26 XII 1937)

В настоящей заметке мы приведем ряд соображений, тесно примыкающих к недавним исследованиям J. Favard'a (1), Н. И. Ахиезера (2,4) и автора.

Пусть

$$G(\varphi) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \mu_k e^{ki\varphi} \qquad (\mu_{-k} = \overline{\mu}_k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots)$$

есть некоторая вещественная непрерывная функция с периодом 2π. Положим

$$H_n(\varphi) = G(\varphi) - G\left(\varphi + \frac{\pi}{n}\right) + G\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) - \ldots - G\left(\varphi + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right).$$

Так как $H_n\left(\varphi + \frac{\pi}{n}\right) = -H_n(\varphi)$, то существуют точки, в которых функция $H_n(\varphi)$ обращается в нуль.

Определим величины $\xi_k(\alpha)$ $(k = 0, 1, \ldots n-1)$ и $\eta_k(\alpha)$ $(k = 1, \ldots n-1)$ так, чтобы функция

$$R(\varphi) = G(\varphi) - \sum_{0}^{n=1} (\xi_k(\alpha) \cos k\varphi + \eta_k(\alpha) \sin k\varphi)$$

обращалась в нуль в точках $\alpha, \alpha + \frac{\pi}{n}, \ldots, \alpha + \frac{(2n-2)\pi}{n}$. Эта функция будет обращаться в нуль в точке $\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}$ тогда и только тогда, если $H_n(\alpha) = 0$. Действительно

$$R\left(\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}\right) = -\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k R\left(\alpha + \frac{k\pi}{n}\right) = -H_n(\alpha).$$

Условимся говорить, что функция $G(\varphi)$ обладает свойством (A_n), если при любом α таком, что $H_n(\alpha) = 0$, функция $R(\varphi)$ имеет точки $\alpha + \frac{k\pi}{n}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ своими узлами и притом единственными.

Лемма 1. *Если функция $G(\varphi)$ обладает свойством (A_n), то*

$$\min_{\xi, \eta} \int_0^{2\pi} \left| G(\varphi) - \sum_0^{n-1} (\xi_k \cos k\varphi + \eta_k \sin k\varphi) \right| d\varphi = \max F_n(\varphi),$$

где

$$F_n(\varphi) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \int_{\varphi + \frac{(k-1)\pi}{n}}^{\varphi + \frac{k\pi}{n}} G(\varphi)\, d\varphi \sim \frac{4}{i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_{(2k+1)n}\, e^{(2k+1)ni}}{2k+1}.$$

Все экстремумы функции $F_n(\varphi)$ по абсолютной величине равны между собой и достигаются в тех точках α, где $H_n(\alpha) = 0$.

Доказательство. Пусть α—некоторый нуль функции $H_n(\varphi)$. Тогда при любых ξ_k и η_k

$$\int_0^{2\pi} \left| G(\varphi) - \sum_0^{n-1} (\xi_k \cos k\varphi + \eta_k \sin k\varphi) \right| d\varphi \geqslant$$

$$\geqslant \left| \int_0^{2\pi} \left\{ G(\varphi) - \sum_0^{n-1} (\xi_k \cos k\varphi + \eta_k \sin k\varphi) \right\} \operatorname{sgn} \sin n(\varphi - \alpha)\, d\varphi \right| =$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} G(\varphi) \operatorname{sgn} \sin n(\varphi - \alpha)\, d\varphi \right| = |F_n(\alpha)|.$$

С другой стороны, если здесь положить $\xi_k = \xi_k(\alpha)$ $(k = 0, 1, \dots n-1)$, $\eta_k = \eta_k(\alpha)$ $(k = 1, 2, \dots n-1)$, то в первом соотношении мы будем иметь знак $=$, что и доказывает лемму.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество функций $f(\varphi)$, допускающих представление

$$f(\varphi) = \int_0^{2\pi} G(\varphi - \psi)\, h(\psi)\, d\psi, \tag{1}$$

где $h(\psi)$ измеримая, вообще говоря, комплексно-значная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|h(\psi)| \leqslant 1.$$

Через $E_{n-1}(f)$, как обычно, будем обозначать наилучшее приближение функции $f(\varphi)$ тригонометрическими суммами порядка $n-1$.

Лемма 2. *Если функция $G(\varphi)$ обладает свойством (A_n), то*

$$\sup_{f \subset \mathfrak{M}} E_{n-1}(f) = \max F_n(\varphi).$$

Supremum *достигается для функции $f(\varphi) = F_n(\varphi)$, соответствующей функции $h(\varphi) = -\operatorname{sgn} \sin n\varphi$.*

Доказательство. Действительно, функция $f_0(\varphi)$, принимает свой абсолютный экстремум с чередующимися знаками в точках α, $\alpha + \frac{\pi}{n}, \dots$, $\alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}$; следовательно по теореме Чебышева $E_{n-1}(f_0) = \max f_0(\varphi) = \max F_n(\varphi)$.

С другой стороны, если

$$f(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \tag{2}$$

есть произвольная функция из $\mathfrak{M}$, то при

$$\mu_0 a_0' = a_0 \xi_0(\alpha), \qquad \begin{matrix} 2\mu_k a_k' = \xi_k(\alpha) a_k - \eta_k(\alpha) b_k \\ 2\mu_k b_k' = \eta_k(\alpha) a_k + \xi_k(\alpha) b_k \end{matrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

имеет место соотношение

$$\left| f(\varphi) - \sum_0^{n-1} (a_k' \cos k\varphi + b_k' \sin k\varphi) \right| =$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} \left\{ G(\psi) - \sum_0^{n-1} (\xi_k(\alpha) \cos k\psi + \eta_k(\alpha) \sin k\psi) \right\} h(\varphi - \psi)\, d\psi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \left| G(\psi) - \sum_0^{n-1} (\xi_k(\alpha) \cos k\psi + \eta_k(\alpha) \sin k\psi) \right| d\psi = \max F_n(\varphi),$$

откуда $E_{n-1}(f) \leqslant \max F_n(\varphi)$.

Лемма 3. *Пусть мнимые части корней вещественного квадратного трехчлена $P(D) = D^2 + pD + q$ не превосходят числа $\mu > 0$. Если некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ имеет $n+2$ нуля $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n < \alpha_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$ таких, что*

$$|\alpha_i - \alpha_{i+1}| \leqslant \frac{\pi}{\mu} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

то либо функция $y(x) = P(D) f(x)$ обращается тождественно в нуль на некоторой части интервала (α_0, α_{n+1}) либо внутри этого интервала она имеет по крайней мере n узлов.

Эта лемма является частным следствием некоторого общего предложения, касающегося операторов Штурма-Лиувилля, доказательство которого мы приведем в другом месте. Из леммы 3 без труда выводится

Лемма 4. *Пусть вещественный полином*

$$P(D) = D^p + A_1 D^{p-1} + \ldots + A_p$$

имеет всего $k \left(0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{p}{2}\right]\right)$ пар комплексных корней и пусть мнимые части этих корней не превосходят числа $\mu > 0$.

Если p раз непрерывно дифференцируемая периодическая функция $f(\varphi)$ имеет $2n$ нулей $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2n}$ $(0 \leqslant \alpha_1, \alpha_{2n} < 2\pi)$ таких, что

$$|\alpha_i - \alpha_{i+1}| < \delta \quad (i = 1, 2, \ldots 2n;\ \alpha_{2n+1} = \alpha_1 + 2\pi),$$

*где $\delta = \frac{\pi}{3^{k-1}\mu}$ *, то либо функция $g(\varphi) = P(D) f(\varphi)$ обращается тождественно в нуль на некотором интервале либо она имеет $2n$ узлов в интервале $< 0, 2\pi)$.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ означает множество всех периодических p раз дифференцируемых функций $f(\varphi)$ таких, что*

$$|f^{(p)}(\varphi) + A_1 f^{(p-1)}(\varphi) + \ldots + A_p f(\varphi)| \leqslant 1.$$

Тогда существует такое N, что при $n > N$ **

$$\sup_{f \subset \mathfrak{M}} E_{n-1}(f) = \frac{2}{\pi} \max \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2k+1)ni\varphi}}{(2k+1) P[(2k+1)ni]} \right| = I_n.$$

---

* Вероятно, степень 3^{k-1} в выражении для δ можно отбросить.

** Если корни полинома $P(D)$ вещественны, то при всяком n.

Доказательство. Чтобы несколько упростить рассуждения, предположим, что полином $P(D) = D^p + A_1 D^{p-1} + \ldots + A_p$ не обращается в нуль ни в одной точке ki $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Если положить

$$G(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ki\varphi}}{P(ki)},$$

то функции $f(\varphi) \subset \mathfrak{M}$ и $h(\varphi) = P(D) f$ окажутся связанными соотношением (1). Для доказательства теоремы остается показать, что при достаточно большом n разность

$$R(\varphi) = G(\varphi) - \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k(\alpha) \cos k\varphi + \eta_k(\alpha) \sin k\varphi) \qquad (H_n(\alpha) = 0)$$

имеет узлы (и притом единственные) в точках $\alpha, \alpha + \frac{\pi}{n}, \ldots, \alpha + \frac{(2n-1)\pi}{n}$. Допуская, что при некотором $n > 3^{k-1}\mu$ имеет место противное, мы сможем утверждать, что при некоторых ζ_k $(k = 0, 1, \ldots n-1)$, неравных одновременно нулю и достаточно близких к соответственным числам

$$\zeta_k(\alpha) \quad [\zeta_0(\alpha) = \xi_0(\alpha), 2\zeta_k(\alpha) = \xi_k(\alpha) - i\eta_k(\alpha) \quad (k = 1, 2, \ldots n-1)],$$

функция

$$R_1(\varphi) = G(\varphi) - \sum_{-n+1}^{n-1} \zeta_k e^{ki\varphi} \quad (\zeta_{-k} = \bar{\zeta}_k;\ k = 1, 2, \ldots n-1)$$

имеет в интервале $< 0, 2\pi)$ по крайней мере $2n + 2$ нуля, и при этом разность между любыми двумя соседними нулями этой функции меньше $\delta = \frac{\pi}{3^{k-1}\mu}$.

Пусть

$$P(D) = Q(D)(D^2 + pD + q).$$

По лемме 4 функция $Q(D) R_1(\varphi)$ будет иметь не менее $2n + 2$ нулей в интервале $< 0, 2\pi)$, и расстояние между любыми двумя соседними нулями этой функции будет меньше $\frac{\pi}{\mu}$. Но тогда по лемме 3 функция

$$P(D) R_1(\varphi) = (D^2 + pD + q) Q(D) R_1(\varphi) = -\sum_{-n+1}^{n-1} P(ki) \zeta_k e^{ki\varphi} \quad (P(D) G \equiv 0)$$

будет иметь внутри интервала $< 0, 2\pi >$, по крайней мере, $2n$ нулей, что невозможно. Теорема доказана.

Заметим, что если оператор $P(D)$ содержит только нечетные степени, то

$$I_n = \frac{2}{\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1) P[(2k+1) ni]} \right| \qquad (n > N);$$

если же только четные степени, то

$$I_n = \frac{2}{\pi} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1) P[(2k+1) ni]} \right| \qquad (n > N).$$

Теорема 1 для частного случая $P(D) = D^p$ была получена впервые Favard'ом (3) и несколько позже независимо от него Н. И. Ахиезером и автором [2]. Совсем недавно Н. И. Ахиезер [4] получил тот частный случай * теоремы, когда

$$P(D) = \prod_{k=1}^{m} (D^2 + \alpha_k) \quad \text{или} \quad D \prod_{k=1}^{m} (D^2 + \alpha_k),$$

где α_k $(k = 1, 2, \dots m)$ — вещественные числа.

Каждой функции $f(\varphi)$, допускающей разложение (2), отнесем функцию

$$f^*(\varphi) = \sum_{1}^{\infty} (b_k \cos k\varphi - a_k \sin k\varphi).$$

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть множество $\mathfrak{M}$ имеет тот же смысл, что и в теореме* 1. *Тогда существует такое N, что при $n > N$*

$$\sup_{f \subset \mathfrak{M}} E_{n-1}(f^*) = \frac{2}{\pi} \max \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2k+1)ni\varphi}}{|2k+1| \, P[(2k+1) ni\varphi]} \right|.$$

Пусть теперь $f(r, \varphi)$—гармоническая функция внутри круга $r < 1$. Обозначим через $E_{n-1}[f; \rho]$ $(\rho < 1)$ наилучшее приближение функции $f(r, \varphi)$ гармоническими полиномами порядка $n-1$ в круге $r \leqslant \rho$. Любопытно отметить, что указанные приемы позволяют решить вопрос об определении величины

$$\sup_{f \subset \mathfrak{N}} E_{n-1}[f; \rho], \tag{3}$$

где $\mathfrak{N}$ обозначает множество гармонических внутри круга $r < 1$ функций $f(r, \varphi)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(r, \varphi)| \leqslant 1 \qquad (0 \leqslant r \leqslant 1; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi),$$

или более общему (и в этом случае n должно быть достаточно большим):

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial r^p} f(r, \varphi) + A_1 \frac{\partial^{p-1}}{\partial r^{p-1}} f(r, \varphi) + \dots + A_p f(r, \varphi) \right| \leqslant 1 \quad (0 \leqslant r < 1; \, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

В первом случае величина (3) равна $\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} r^n$. В первом и во втором случае (при $n > N$) supremum достигается для функции $f(r, \varphi) = \frac{2}{\pi} \Im \lg \frac{1+z^n}{1-z^n}$.

Институт математики и механики.
Харьковский государственный университет.

Поступило
26 XII 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Favard, Bull. des Sciences Math., LXI, 209—224 (1937). [2] Н. Ахиезер и М. Крейн, ДАН, XV, 107—111 (1937). [3] J. Favard, C. R., 30 Novembre (1936). [4] Н. Ахиезер, ДАН, XVII, № 9, 451—454 (1937).

* И в этом случае, как показал Н. И. Ахиезер [4], можно положить $N = \mu$.