Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 8

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

О НЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЯХ ГРИНА ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 X 1939)

Приводимые ниже результаты представляют собою дальнейшее развитие и обобщение наших предыдущих исследований по теории осцилляционных функций Грина ([1], [2]). Эти результаты позволяют установить осцилляционные теоремы (аналогичные известным теоремам Штурма) для обширного класса краевых задач вне зависимости от того, самосопряжены ли эти задачи или нет, и каков их порядок.

1. Пусть

$$L(y)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)\frac{d^k y}{dx^k} \quad (n \geqslant 2)$$

—некоторый дифференциальный оператор, коэффициенты которого суть непрерывные функции в замкнутом интервале (a, b), и пусть

$$l_n(x) > 0 \quad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Пусть $G(x,s)$ $(a \leqslant x, s \leqslant b)$—какая-либо функция Грина оператора $L(y)$. Как известно, она всегда допускает представление

$$G(x,s)=\begin{cases} \sum_{j=1}^{q} \psi_j(x)\chi_j(s) & (x \leqslant s), \\ \sum_{j=1}^{p} \psi_j^*(x)\chi_j^*(s) & (x \geqslant s), \end{cases} \tag{1}$$

в котором $\psi_1(x), \ldots, \psi_q(x)$, равно как и $\psi_1^*(x), \ldots, \psi_p^*(x)$,—некоторые системы линейно независимых решений однородного уравнения $L(y)=0$, причем $p+q \geqslant n$.

В приводимых ниже теоремах речь будет итти о функциях Грина $G(x,s)$ оператора $L(y)$ таких, что $\varepsilon G(x,s)$ $(\varepsilon=\pm 1)$—осцилляционное ядро [определение осцилляционного ядра см. в работе автора ([2]) или в работе Крейна-Финкельштейна ([3]), где дано другое по форме, но эквивалентное определение].

Теорема 1. *Если* $\varepsilon G(x,s)$ $(\varepsilon=\pm 1)$—*осцилляционное ядро, то* $\varepsilon=(-1)^q$ и $p+q=n$ *.

* Кроме того $p, q > 1$ [см. статью ([2])].

Действительно, если $\varepsilon G(x,s)$ — осцилляционная функция Грина, допускающая представление (1), то по теореме Крейна-Финкельштейна ([3])

$$\varepsilon^n G\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_m \\ s_1 s_2 \dots s_m \end{pmatrix} > 0 \quad \left(a < \begin{matrix} x_1 < x_2 < \dots < x_n \\ s_1 < s_2 < \dots < s_n \end{matrix} < b\right)$$

при условии, что

$$x_i < s_{i+p} \ (i=1,2,\dots,m-q), \ s_i < x_{i+q} \ (i=1,2,\dots,n-p).$$

В частности

$$\varepsilon^{p+q} G\begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_{p+q} \\ s_1 s_2 \dots s_{p+q} \end{pmatrix} > 0$$

при

$$a < s_1 < s_2 \dots < s_p < x_1 < x_2 < \dots < x_{p+q} < s_{p+1} < \dots < s_{p+q} < b.$$

Но последнее неравенство показывает, что функции $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_q$, $\overset{*}{\psi}_1, \overset{*}{\psi}_2, \dots, \overset{*}{\psi}_p$ линейно независимы, откуда $p+q \leqslant n$, и так как, с другой стороны, $p+q \geqslant n$, то $p+q=n$.

Равенство $\varepsilon = (-1)^q$ доказывается значительно сложнее, и мы вынуждены опустить его доказательство.

Как легко видеть, равенство $p+q=n$ означает, что функция Грина $G(x,s)$ отвечает некоторой системе граничных условий, которую можно представить в следующем виде:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{ik} y^{(k)}(a) = 0 \quad (i=1,2,\dots,p), \\ &\sum_{k=0}^{n-1} \beta_{ik} y^{(k)}(b) = 0 \quad (i=1,2,\dots,q). \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Таким образом, если функция Грина при умножении на $\varepsilon = \pm 1$ обращается в осцилляционное ядро, то она отвечает некоторой системе граничных условий вида (2). На существование этого факта любезно обратил мое внимание П. Д. Калафати, получивший его иным и весьма сложным путем.

Несколько развивая методы, которые автор изложил в своих предыдущих статьях ([1], [2], [4]), можно доказать следующие теоремы.

Теорема 2. *Если некоторой системе граничных условий* (2) *отвечает функция Грина** $G(x,s)$ *оператора* $L(y)$ *такая, что* $(-1)^q G(x,s)$ — *осцилляционное ядро, то система граничных условий*

$$\left\{\begin{aligned} &y^{(i)}(a) = 0 \quad (i=0,1,\dots,p-1), \\ &\sum_{k=0}^{n-1} \beta_{ik} y^{(k)}(a) = 0 \quad (i=1,2,\dots,q) \end{aligned}\right. \tag{3}$$

обладает тем же свойством.

Ядро, соответствующее условиям (3), мы обозначим через $G^{(p)}(x,s)$.

В теореме 2 можно поменять местами концы a и b, поэтому имеет место следующее

Следствие. *Если для системы граничных условий* (2) *выполняются условия теоремы* 2, *то граничным условиям*

$$y(a) = y'(a) = \dots = y^{(p-1)}(a) = 0, \ y(b) = y'(b) = \dots = y^{(q-1)}(b) = 0 \tag{4}$$

отвечает функция Грина $G^{(p,q)}(x,s)$ *такая, что* $(-1)^q G^{(p,q)}(x,s)$ — *осцилляционное ядро.*

---

* И, следовательно, условия неособенны.

Имеет место следующий критерий того, когда $(-1)^q G^{(p,q)}(x, s)$— осцилляционное ядро.

Теорема 3. *Для того чтобы некоторой системе граничных условий* (4) $(1 \leqslant p < n)$ *отвечало осцилляционное ядро* $(-1)^q G^{(p,q)}(x, s)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1° *Дифференциальная система*

$$L(y) = 0, \ y(b) = y'(b) = \ldots = y^{(q-1)}(b) = 0$$

имеет p *решений* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ *таких, что* *

$$\omega_1 > 0, \ W(\omega_1, \omega_2) > 0, \ldots, \ W(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) > 0 \text{ при } a < x < b.$$

2° *Дифференциальная система*

$$L(y) = 0, \ y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(p-1)}(a) = 0$$

имеет q *решений* $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ *таких, что*

$$W(\omega_1, \ldots, \omega_p, \omega_{p+1}) > 0, \ldots, \ W(\omega_1, \ldots, \omega_q, \ldots, \omega_n) > 0 \text{ при } a < x < b.$$

Заметим, что если существуют требуемые в условиях 1°, 2° функции $\omega_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то их можно получить следующим образом: в качестве функции $\omega_k(x)$ при $k = 1, 2, \ldots, p$ можно взять любое решение дифференциальной системы

$$\begin{cases} L(y) = 0, \ y(b) = \ldots = y^{(q-1)}(b) = 0, \\ y(a) = y'(a) = \ldots = y^{(p-k-1)}(a) = 0, \ (-1)^{n+k-1} y^{(p-k)}(a) > 0, \end{cases}$$

а в качестве функции $\omega_{p+k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$—любое решение дифференциальной системы

$$\begin{cases} L(y) = 0, \ y(a) = \ldots = y^{(p-1)}(a) = 0, \\ y(b) = y'(b) = \ldots = y^{(q-k-1)}(b) = 0, \ (-1)^{p+k} y^{(q-k)}(b) > 0. \end{cases}$$

Теорема 4. *Условия* 1°, 2° *теоремы* 3 ** *эквивалентны тому условию, что оператор* $L(y)$ *допускает следующее представление внутри интервала* (a, b):

$$L(y) = \rho_0 \frac{d}{dx} \rho_1 \frac{d}{dx} \rho_2 \ldots \frac{d}{dx} \rho_n y, \tag{5}$$

где $\rho_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$—*положительные,* k *раз непрерывно дифференцируемые функции внутри интервала* (a, b).

Из теоремы 4 следует, что если для некоторого p ядро $(-1)^p G^{(p,q)}(x, s)$ — осцилляционно, то это имеет место для любого p $(1 \leqslant p < n)$, для которого существует функция Грина $G^{(p,q)}(x, s)$ [т. е. условия (4) неособенны].

Теорема 5. *Для того чтобы при каждом* p $(1 \leqslant p < n)$ *ядро* $G^{(p,q)}(x, s)$ *имело смысл и обращалось в осцилляционное ядро при умножении на* $(-1)^q$, *необходимо и достаточно, чтобы оператор* $L(y)$ *допускал в замкнутом интервале* (a, b) *представление* (5), *в котором* $\rho_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$—*положительные,* k *раз непрерывно дифференцируемые функции в замкнутом интервале* (a, b).

2. Пусть попрежнему $G(x, s)$ означает некоторую функцию Грина оператора $L(y)$, соответствующую системе граничных условий (2) и

---

* Через $W(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)$ мы обозначаем детерминант Вронского для функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

** При неособенности системы условий (4).

такую, что $(-1)^q G(x,s)$ — осцилляционное ядро. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b G(x,s)\,\varphi(s)\,d\sigma(s), \tag{6}$$

в котором $\sigma(x)$ — неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста.

Оно обладает всеми теми осцилляционными свойствами, которые мы уже отмечали для случая симметрических осцилляционных ядер ([2]) [см. по этому поводу статью Ф. Р. Гантмахера ([5]), где рассмотрено интегральное уравнение с несимметрическим ядром Келлога и с существенно растущей функцией $\sigma(x)$]. В частности все характеристические числа уравнения (6) являются простыми корнями детерминанта Фредгольма и имеют тот же знак, что и $(-1)^q$. Обозначим последовательные характеристические числа уравнения (6) через λ_i $(i=0,1,2,\ldots)$. Таким образом

$$0 < (-1)^p \lambda_0 < (-1)^p \lambda_1 < (-1)^p \lambda_2 < \ldots$$

Заменяя в уравнении (6) ядро $G(x,s)$ на ядро $G^{(p)}(x,s)$ (определение этого ядра дано непосредственно после теоремы 2) или ядро $G^{(p,q)}(x,s)$, мы получаем новые последовательности характеристических чисел $\lambda_i^{(p)}$ $(i=0,1,2,\ldots)$, соответственно $\lambda_i^{(p,q)}$ $(i=0,1,2,\ldots)$.

Теорема 6. *Числа* λ_i, $\lambda_i^{(p)}$ $(i=0,1,2,\ldots)$ *связаны между собой неравенствами*

$$(-1)^q \lambda_i < (-1)^q \lambda_i^{(p)} < (-1)^q \lambda_{i+p} \quad (i=0,1,2,\ldots).$$

Так как аналогично $(-1)^q \lambda_i^{(p)} < (-1)^q \lambda_i^{(p,q)} < (-1)^q \lambda_{i+q}^{(p)}$ $(i=0,1,2,\ldots)$, то

$$(-1)^q \lambda_i < (-1)^q \lambda_i^{(p,q)} < (-1)^q \lambda_{i+n}^{(p,q)} \quad (i=0,1,2,\ldots).$$

Эти неравенства при данном p выражают определенное экстремальное свойство системы граничных условий (4) в сравнении со всеми другими системами граничных условий вида (2), которым отвечают осцилляционные ядра $(-1)^q G(x,s)$.

В заключение укажем на то, что теоремы 2—5 доказаны нами в основном теми же методами, что и результаты наших прежних исследований. Для установления теоремы 6 нам пришлось ввести существенно новые рассмотрения и предварительно доказать ряд общих теорем о несимметрических ядрах Келлога.

Поступило
26 X 1939

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Крейн, Зап. Харьк. матем. об-ва, серия 4, XIII (1936). [2] М. Крейн, ДАН, IV (XIII), № 9 (113) (1936). [3] М. Крейн, Г. Финкельштейн, ДАН, № 3 (1939). [4] М. Крейн, Зап. Харьк. матем. об-ва, серия 4, XIV (1937). [5] Ф. Гантмахер, ДАН, I (X), 1 (78) (1936).