Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXV, № 1

ГЕОФИЗИКА

Академик П. П. ЛАЗАРЕВ

О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ИЗОЛИНИЙ

1. Взаимное положение изолиний и их пересечения представляют интерес для построений карт земного магнетизма и аномалий силы тяжести.

Цель настоящей работы состоит в изучении этого вопроса с точки зрения теории потенциала.

2. Пусть F—значение силы в точке A, помещенной вблизи поверхности земли и X, Y, Z—прямоугольные слагающие F.

X направлена к северу, Y к востоку и Z представляет вертикальную составляющую. Мы допустим, что земная поверхность является плоскостью и что X, Y, Z представляются функциями координат x, y, z точки A и имеют потенциал V.

Мы можем написать

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x}; \quad Y=-\frac{\partial V}{\partial y}; \quad Z=-\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Если K_1, K_2, K_3—постоянные, то уравнения

$$X=-\frac{\partial V}{\partial x}=K_1, \quad Y=-\frac{\partial V}{\partial y}=K_2, \quad Z=-\frac{\partial V}{\partial z}=K_3 \tag{1}$$

представляют поверхности, на которых соответствующие составляющие остаются постоянными. Эти поверхности мы назовем изоповерхностями.

Пересекая изоповерхности (1) горизонтальными плоскостями, параллельными поверхности земли, получаем линии пересечения, вдоль которых составляющие X и Y постоянны. Эти линии называются изолиниями.

Уравнения (1) позволяют получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)_X=0; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)_Y=0; \tag{2}$$

здесь $\left(\frac{dy}{dx}\right)_X$—угловой коэффициент a_X касательной к изолинии X в точке A; $\left(\frac{dy}{dx}\right)_Y$—угловой коэффициент a_Y касательной, принадлежащей изолинии Y, в той же точке A.

Мы имеем

$$a_X=\left(\frac{dy}{dx}\right)_X=-\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}{\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}}\,;\quad a_Y=\left(\frac{dy}{dx}\right)_Y=-\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}. \tag{3}$$

Угол между касательными к обеим кривым X и Y в точке A выражается так:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{a_Y-a_X}{1+a_X a_Y}. \tag{4}$$

Заменяя значения a_X и a_Y через их выражения (3), мы находим

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)}. \tag{5}$$

3. Когда изолинии X, Y ортогональны, угловые коэффициенты a_X и a_Y касательных к кривым X и Y в точке A выполняют условие

$$a_X a_Y=-1 \quad \text{или} \quad a_X+\frac{1}{a_Y}=0.$$

Подставляя значения a_X и a_Y, взятые из уравнений (3), получаем

$$\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}}=0. \tag{6}$$

Значение $\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}$ не может быть бесконечным.

Чтобы выполнить условие ортогональности (6), необходимо, следовательно, чтобы

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0. \tag{7}$$

По теории потенциала, в поле не содержащем масс, частные производные потенциала V должны удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

Это уравнение вместе с уравнением (7) показывает, что, если изолинии X и Y пересекаются под прямым углом, величина $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ должна быть равна нулю. Это соотношение равносильно выражению

$$-\frac{\partial V}{\partial z}=Z=b=f\,(x,y).$$

Ортогональность двух систем изолиний X и Y наблюдается, когда Z постоянно над поверхностью земли, не завися от z.

Специальный случай соответствует условию $Z=0$. В этом случае сила целиком расположена в плоскости xy координат. Изолинии слагающей X, направленной к северу, ортогональны изолиниям слагающей Y, направленной к востоку.

Ортогональность наблюдается также, если $\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=0$ [см. формулу (5)].

Институт теоретической геофизики
Академии Наук СССР

Поступило
16 VIII 1939