Изменяя длину напорной трубки при различных скоростях волочения длинномерного изделия, была получена зависимость изменения толщины h формируемого слоя от длины l напорной трубки, вид которой приведен на рис. 4.

В результате проведенных экспериментов было установлено, что процесс формирования защитного покрытия необходимо производить при скорости волочения, превышающей скорость свободного истечения порошкового материала, и длине напорной трубки, равной 20...22 мм.

ЗАТУХАЮЩИЙ АПЕРИОДИЧЕСКИЙ ТЕПЛОВОЙ РЕЖИМ НА ФАЗОВОЙ ГРАНИЦЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого, Республика Беларусь

Некоторые современные способы получения твердых материалов характеризуются большими скоростями кристаллизации. Проблема разработки и анализа математических моделей локально-неравновесного затвердевания находится в начальной стадии развития. Состояние этого вопроса и библиография имеются в [1]. В данной работе изучаются некоторые эволюционные свойства фазовой границы (ФГ) в релаксационной тепловой задаче о высокоскоростной кристаллизации материала с нелинейными теплофизическими свойствами.

Изучаемая математическая модель состоит из уравнения энергии и уравнения для теплового потока эволюционного (релаксационного) типа:

$$\tilde{c}c\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0, \quad q+\gamma\frac{\partial q}{\partial t}=-\tilde{\lambda}\lambda\frac{\partial T}{\partial x}, \tag{1}$$

где T – температура; q – удельный тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности; $c=\rho c_p$ – удельная объемная теплоемкость; γ – время релаксации теплового потока; t – время; x – декартова координата. Безразмерные параметры $\tilde{\lambda}=(\lambda_b T_b)/(x_b q_b)$, $\tilde{c}=(c_b T_b x_b)/(t_b q_b)$ составлены из масштабов (они отмечены нижним индексом b) величин, применяемых для обезразмеривания уравнений (1). В последующих аналитических выкладках и численных расчетах все величины – безразмерные.

Условия динамической совместности и условия устойчивости на ФГ $x=x_j(t)$ имеют вид [2]:

$$q_j-q_*=\tilde{c}N(u_j-u_*)-L(N+\gamma dN/dt), \quad (q_j-q_*)N=\tilde{\lambda}(V_j-V_*), \quad N=dx_j/dt, \tag{2}$$

$$w_*^2<N^2\tilde{N}^2<(V_*-V_j)/(u_*-u_j)<w_j^2, \tag{3}$$

где $dV/dT=\lambda/\gamma$; $du/dT=c$; $L=L_b x_b/(t_b q_b)$; $\tilde{N}^2=\tilde{c}/\tilde{\lambda}$; L_b – теплота фазового перехода единицы объема вещества; $w^2=\lambda/(c\gamma)$ – квадрат скорости распространения тепловых возмущений; индексами $*, j$ отмечены значения функций, соответственно, справа (жидкая фаза) и слева (твердая фаза) от ФГ. Неравенства (3) характеризуют устойчивость разрыва при знакопостоянной выпуклости функции $V=V(T)$. Ситуация со знакопеременной выпуклостью обсуждается в [2, 3]. Действуя аналогично [4], выделяем температурные интервалы $[T_j, T_c]$ и $[T_c, T_*]$ слева и справа от точки фазового перехода $T_c \equiv const$. Теплофизические параметры среды для каждого интервала свои и описываются зависимостями вида $\lambda = \lambda^0 + \lambda^1 T, \gamma \equiv const,$ а также $c = c_0/(T_c - T)^a$, $0 < a < 1$ и $c = \hat{c}_0/(T - T_c)^{\hat{a}}$, $0 < \hat{a} < 1$. Решение уравнений (1) находим в зоне кристаллизации $x \in [x_w, x_j]$. Граничное условие на левой неподвижной границе $x = x_w: T = T_w$ либо $q = q_w$. Эволюционные свойства фронта фазовых превращений изучим, применяя численно–аналитический подход [2] к задаче о ФГ кристаллизации. В данной работе рассмотрим апериодический режим затухания во времени свойств теплового поля за разрывом $x = x_j(t)$. Это дает возможность охарактеризовать один из физически допустимых вариантов установления квазистационарного режима движения ФГ. Изучение эволюционных (периодических и непериодических) режимов установления постоянной скорости ФГ важно, в частности, потому, что в настоящее время основные аналитические результаты исследования релаксационных задач кристаллизации получены в рамках допущения $N \equiv const$, [1].

Выполним преобразование независимых переменных [2] , перейдем от (x,t) к аргументам (z,α,β):

$$\alpha = \alpha_0 \exp(k-n)t, \quad \beta = \beta_0 \exp(-k-n)t; \quad 0 < k < n, \quad \alpha_0, \beta_0 \in (0,1);$$

$$z = x - N_0 t + l_1\alpha + l_2\beta + l_3\alpha^2 + l_4\beta^2 + l_5\alpha\beta + l_6\alpha^3 + l_7\alpha^2\beta + l_8\alpha\beta^2 +$$

$$+ l_9\beta^3 + \ldots; \; l_i - const, \; i \geq 1.$$

Линия $z_j = 0$ является образом ФГ. Уравнения теплопереноса (1) и граничные условия (2), (3) удовлетворяются функциональными степенными разложениями:

$$T = T_0(z) + \alpha T_1(z) + \alpha^2 T_2(z) + \beta\Theta_1(z) + \beta^2\Theta_2(z) + \alpha\beta\psi_2(z) +$$

$$+ \alpha^3 T_3(z) + \beta^3\Theta_3(z) + \alpha^2\beta\psi_3(z) + \alpha\beta^2\tilde{\psi}_3(z) + \ldots; \tag{4}$$

$$q = q_0(z) + \alpha q_1(z) + \alpha^2 q_2(z) + \beta\aleph_1(z) + \beta^2\aleph_2(z) + \alpha\beta\chi_2(z) +$$

$$+ \alpha^3 q_3(z) + \beta^3\aleph_3(z) + \alpha^2\beta\chi_3(z) + \alpha\beta^2\tilde{\chi}_3(z) + \ldots; \tag{5}$$

$$N = N_0 + \alpha N_1 + \alpha^2 N_3 + \beta N_2 + \beta^2 N_4 + \alpha\beta N_5 + \alpha^3 N_6 + \alpha^2\beta N_7 + \alpha\beta^2 N_8 + \beta^3 N_9 + \ldots.$$

Аналитические выкладки проводим при $u_* \equiv const, q_* \equiv 0$. В зоне кристаллизации $[T_w, T_j]$ берем $c \equiv const; \gamma \equiv const; \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T; 0 < T_j(t) \leq T_{j\max} < T_c$. Тепловое состояние на левой границе определяем по формулам:

$$T_w = T(z_w, \alpha, \beta); \; q_w = q(z_w, \alpha, \beta); \; x_w \equiv const < 0,$$

причем априорное задание констант l_i опосредованным образом влияет на T_w, q_w – обратная задача. Начальные значения $T_{i-1}(0), q_{i-1}(0), i \geq 1$ находим из условий (2) на

ФГ – прямая задача. Приведем здесь формулы для коэффициентов нулевого и первого приближений по $\alpha,\ \beta$:

Нулевое приближение:

$$cN_0\frac{dT_0}{dz}=\frac{dq_0}{dz};\ \gamma N_0\frac{dq_0}{dz}=q_0+\lambda(T_0)\frac{dT_0}{dz};\ \lambda(T_0)=\lambda_0+\lambda_1 T_0;$$

$$q_0(0)+\tilde{c}N_0B_{00}+LN_0=0;\ B_{00}=2c_0^*(T^*-T_c)+2c_0^jB_0;\ B_0=(T_c-T_0(0))^{1/2};$$

$$\tilde{\lambda}\left[V_s^*+v_j^0(T_c-T_0(0))+0.5v_j^1\left(T_c^2-T_0^2(0)\right)\right]+N_0q_0(0)=0;\ v_j^0=\lambda_j^0/\gamma_j;\ v_j^0=\lambda_j^0/\gamma_j;$$

$$N_0^2=\tilde{\lambda}\left[V_s^*+v_j^0(T_c-T_0(0))+0.5v_j^1\left(T_c^2-T_0^2(0)\right)\right]/(\tilde{c}B_{00}+L).$$

Первое приближение:

$$\frac{dq_1}{dz}+c\left[\left(T_1+l_1\frac{dT_0}{dz}\right)(k-n)-N_0\frac{dT_1}{dz}\right]=0;$$

$$\frac{d\aleph_1}{dz}-c\left[\left(\Theta_1+l_2\frac{dT_0}{dz}\right)(k+n)+N_0\frac{d\Theta_1}{dz}\right]=0;$$

$$q_1+\lambda(T_0)\frac{dT_1}{dz}+\gamma\left[\left(q_1+l_1\frac{dq_0}{dz}\right)(k-n)-N_0\frac{dq_1}{dz}\right]+\lambda_1T_1\frac{dT_0}{dz}=0;$$

$$\aleph_1+\lambda(T_0)\frac{d\Theta_1}{dz}+\gamma\left[\left(\aleph_1+l_2\frac{dq_0}{dz}\right)(k+n)+N_0\frac{d\aleph_1}{dz}\right]+\lambda_1\Theta_1\frac{dT_0}{dz}=0;$$

$$N_0q_1(0)-\tilde{\lambda}T_1(0)\left(v_j^0+v_j^1T_0(0)\right)+N_1q_0(0)=0;\ B_1=-(T_1(0)/2B_0);$$

$$N_0\aleph_1(0)-\tilde{\lambda}\Theta_1(0)\left(v_j^0+v_j^1T_0(0)\right)+N_2q_0(0)=0;\ B_3=-(\Theta_1(0)/2B_0);$$

$$q_1(0)+\tilde{c}N_1B_{00}+2\tilde{c}N_0c_0^jB_1+LN_1(1+\gamma(k-n))=0;$$

$$\aleph_1(0)+\tilde{c}N_2B_{00}+2\tilde{c}N_0c_0^jB_3+LN_2(1-\gamma(k+n))=0.$$

Расчеты были проведены с помощью отрезков рядов (4), (5), включающих члены разложений третьего порядка. Отметим хорошую практическую сходимость рядов. Так, для приведенных здесь вариантов различие в результатах расчета $T,\ q$ с учетом членов 2-го и 3-го порядков по $\alpha,\ \beta$ не превосходит 0,02%.

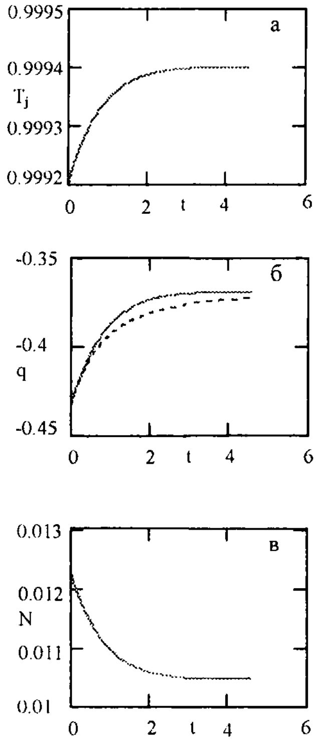

Рис. 1

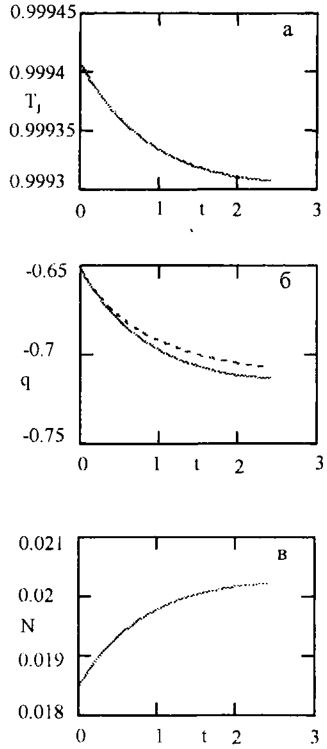

Рис. 2

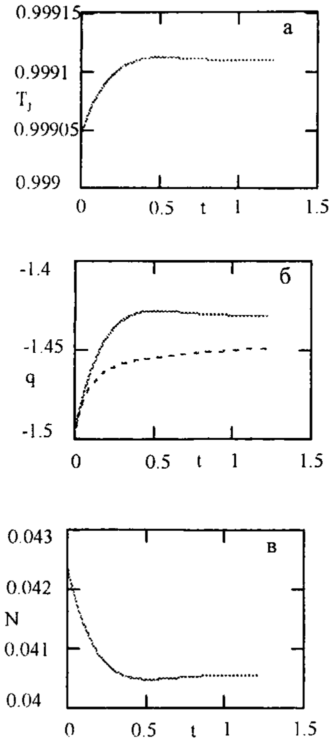

Рис. 3

Результаты расчетов трех типичных вариантов для железа представлены на рисунках 1–3. Номер рисунка соответствует номеру варианта. На рисунках, отмеченных буквами а, б, в, изображены, соответственно, $T_j(t)$, $q_j(t)$(сплошная линия), $q_w(t)$ (пунктирная линия), $N(t)$. Координата левой границы $x_w = -0{,}05$. Температура $T_* = 1{,}0001$. В области перед ФГ: $c = 6{,}46 \cdot 10^6$ Дж/м^{3}К; $\lambda_0 = 40.8$ Вт/мК; $\lambda_1 = -5 \cdot 10^{-4}$ Вт/мК^2; в области за ФГ: $c = 6{,}11 \cdot 10^6$ Дж/м^{3}К; $\lambda_0 = 42{,}0$ Вт/м К; $\lambda_1 = -2 \cdot 10^{-3}$ Вт/м К^2. Применялись следующие масштабы величин: T_b=1810К; $c_b = 6{,}11 \cdot 10^6$ Дж/м^{3}К; $x_b = 1 \cdot 10^{-3}$ м; $t_b = 1 \cdot 10^{-5}$ с; $L_b = 2{,}11 \cdot 10^9$ Дж/м^3; λ_b=42,0 Вт/мК; $q_b = 6 \cdot 10^9$ Вт/м^2. Остальные входные параметры задачи представлены в таблице.

	γ_*	γ_l	N_0	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	k	n
Вар. 1	0,5	$15 \cdot 10^{-4}$	0,0104	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-5}$	$25 \cdot 10^{-5}$	$25 \cdot 10^{-5}$	0,5	1,0
Вар. 2	0,2	$4 \cdot 10^{-4}$	0,02027	$-1 \cdot 10^{-3}$	$-1 \cdot 10^{-3}$	$-25 \cdot 10^{-5}$	$-25 \cdot 10^{-5}$	$-25 \cdot 10^{-5}$	0,5	1,0
Вар. 3	0,05	$1 \cdot 10^{-4}$	0,04055	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-5}$	$25 \cdot 10^{-5}$	$25 \cdot 10^{-5}$	4,5	5,0

Литература

1. Galenko P., Sobolev S. Local nonequilibrium effect on undercooling in rapid solidification of alloys // Physical Review E. 1997. Vol. 55. №1. P. 343–352
2. Шабловский О.Н. Релаксационные тепловые структуры и фазовые границы в нелинейных средах // Труды 2-й Российской национальной конференции по теплообмену. Т. 7. Теплопроводность, теплоизоляция. – М.: МЭИ, 1998. – С. 251–254
3. Шабловский О.Н. Нелинейные волновые задачи релаксационного теплопереноса // Газовая динамика. – Томск: Изд-во ун-та, 1991. – С.91–98
4. Шабловский О.Н. Некоторые задачи нелинейной динамики локально-неравновесных тепловых полей // Первый междисциплинарный семинар “Фракталы и прикладная синергетика”: Сб. тезисов. – М.: Изд-во РАН, 1999. – С. 54–55