Доклады Академии Наук СССР
1939. Том XXIII, № 8

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

О ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ, ОСТАВЛЯЮЩИХ ИНВАРИАНТНЫМ НЕКОТОРОЕ КОНИЧЕСКОЕ МНОЖЕСТВО

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 IV 1939)

Мы будем придерживаться в основном обозначений и терминологии известной книги Банаха ([1]).

Пусть E — некоторое линейное нормированное пространство и пусть $K \subset E$ — некоторое множество, обладающее следующими свойствами:

1. Если $x \in K$, то $\lambda x \in K$ при $\lambda > 0$.
2. Если $x \in K$ и $y \in K$, то $x + y \in K$.
3. Если $x \in K$, то $-x \bar{\in} K$.
4. Множество K является открытым.

В силу этих свойств множество K является внутренностью выпуклого «конического» тела с «вершиной» в точке $x = 0$. Следовательно по теореме Ascoli-Mazur'a ([2]) через точку 0 проходит по крайней мере одна опорная гиперплоскость к K, т. е. существует такой линейный функционал $f(x)$, что

$$f(x) > 0 \text{ при } x \in K. \tag{1}$$

Совокупность линейных функционалов f, удовлетворяющих условию (1), обозначим через K^*. Множество $K^* \subset E^*$ (E^* — сопряженное к E пространство), как легко видеть, обладает свойствами 1, 2, 3 и, вообще говоря, не обладает свойством 4.

Неравенство (1) может быть уточнено в следующем смысле. Если f принадлежит K^*, а точка u входит в K вместе со сферой $S(u; \rho)$ радиуса ρ, то

$$f(u) \geqslant \rho \, |f|. \tag{2}$$

Мы докажем следующую теорему *:

Т е о р е м а 1. *Если линейный оператор A ($AE \subset E$) оставляет множество K инвариантным ($AK \subset K$), то сопряженный оператор A^* имеет в K^* собственный вектор f_0:*

$$A^* f_0 = \lambda_0 f_0 \quad (\lambda_0 > 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что если $AK \subset K$, то $A^* K^* \subset K^*$.

* Первоначально автор формулировал теорему 1 при еще одном ограничении относительно множества K. Автор обязан М. А. Рутману любезным замечанием о том, что в рассуждениях автора используются исключительно свойства 1, 2, 3, 4 множества K.

Предположим сперва, что пространство E сепарабельно. Пусть $\{x_n\}$ — плотная последовательность в единичной сфере $|x| \leqslant 1$. В сопряженном пространстве E^* линейных функционалов f введем новую норму

$$|f|_1 = \sup_n \frac{|f(x_n)|}{n},$$

а следовательно и новое расстояние

$$\rho(g, f) = |g - f|_1 \quad (g, f \in E^*).$$

Легко видеть [([1]), стр. 185—186], что каждое ограниченное и слабо замкнутое в смысле слабой сходимости функционалов множество $H \subset E^*$ становится при новом определении расстояния компактом, причем сходимость в H по новому расстоянию совпадает со слабой сходимостью.

Пусть теперь $u \in K$ — произвольный элемент, входящий в K вместе со сферой $S(u, \rho)$. Обозначим через H множество всех $f \in E^*$, удовлетворяющих двум условиям:

$$f(u) = 1, \quad f \in K^*.$$

В силу неравенства (2) множество H ограничено; легко также видеть, что оно слабо замкнуто. Следовательно при новом определении расстояния H — компакт и очевидно выпуклый компакт.

Рассмотрим, с другой стороны, оператор Bf, определяемый равенством

$$Bf = \frac{A^*f}{f(Au)}.$$

Если $g = Bf$, то

$$g(x) = \frac{f(Ax)}{f(Au)}. \tag{3}$$

Полагая здесь $x = u$, находим, что $g(u) = 1$, откуда $BH \subset H$. С другой стороны, если $f \in K^*$, то

$$f(Au) > \sigma |f|, \tag{4}$$

где $\sigma > 0$ выбрано под единственным условием, что сфера $S(v, \sigma)$ с центром в точке $v = Au$ и радиуса σ принадлежит K. Кроме того, если $f(u) = 1$, то $|f||u| \geqslant 1$. Таким образом

$$f(Au) > \frac{\sigma}{|u|} \text{ при любом } f \in H.$$

Отсюда и из (3) нетрудно заключить, что оператор Bf слабо непрерывен на H, а следовательно при новом определении расстояния непрерывен в обычном смысле на H.

В виду всего этого к оператору B, рассматриваемому на H, применима известная теорема Шаудера ([3]) о фикспунктах. В силу этой теоремы существует вектор $f_0 \in H$ такой, что $Bf_0 = f_0$, или, что то же,

$$A^*f_0 = \lambda_0 f_0, \tag{5}$$

где

$$\lambda_0 = f_0(Au) > 0.$$

Итак, для случая, когда E сепарабельно, наша теорема доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая. Заметим сперва, что по определению сопряженного оператора A^* равенство (5) эквивалентно равенству

$$f_0(Ax - \lambda_0 x) = 0 \text{ при всех } x \in E. \tag{6}$$

С другой стороны, если $f_0 \in K^*$, то из (6) в силу (1) вытекает, что

$$Ax - \lambda_0 x \bar{\in} K \text{ при любом } x \in E. \tag{7}$$

Более того, это условие не только является необходимым, но также и достаточным для того, чтобы числу λ_0 отвечал некоторый вектор $f_0 \in K$ такой, что имеет место (5). Действительно, если вектор x пробегает E, то вектор $y = Ax - \lambda_0 x$ пробегает некоторое линейное множество $\mathfrak{F}$. При выполнении условия (7) это множество не имеет общих точек с K, и следовательно по теореме Ascoli-Mazur'a (2) существует опорная гиперплоскость к K, проходящая через $\mathfrak{F}$, т. е. существует такой функционал $f_0 \in K^*$, что (5) имеет место.

Заметим кроме того, что если числу $\lambda_0 > 0$ отвечает некоторый собственный вектор $f_0 \in K$ оператора A^*, то непременно

$$\sigma < \lambda_0 \leqslant \tau,$$

где число σ определено с помощью произвольно выбранного вектора $u \in K$ так, как это указано для (4), а $\tau = |A|$ есть норма оператора A.

Отнесем теперь каждому $x \in E$ свое множество $\mathfrak{M}_x$ всех тех чисел λ из замкнутого интервала $< \sigma, \tau >$, для которых

$$Ax - \lambda x \bar{\in} K.$$

Покажем, что, как бы ни были выбраны $x_i \in E$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, пересечение

$$\mathfrak{M}_{x_1} \mathfrak{M}_{x_2} \ldots \mathfrak{M}_{x_n} \neq 0, \tag{8}$$

т. е. не пусто.

Рассмотрим для этого линейную оболочку E_1 всех элементов вида

$$A^k u \text{ или } A^k x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots, A^0 x = x)$$

и пусть $K_1 = KE_1$. Легко видеть, что K_1, рассматриваемое в E_1, обладает всеми свойствами 1—4. Кроме того $AE_1 \subset E_1$ и $AK_1 \subset K_1$. Так как пространство E_1 сепарабельно, то к оператору A, рассматриваемому в E_1, применима доказываемая нами теорема. В силу этой теоремы должно существовать такое число $\lambda_1 (\sigma < \lambda_1 \leqslant \tau)$, что

$$Ax - \lambda_1 x \bar{\in} K_1$$

при всех $x \in E_1$, а значит, в частности при

$$x = x_i \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Таким образом (8) доказано. Так как каждое $\mathfrak{M}_x (x \in E)$ замкнуто, то из (8) следует, что все множества $\mathfrak{M}_x$ имеют общую точку $\lambda_0 (\sigma \leqslant \lambda_0 \leqslant \tau)$. Для этой точки λ_0 выполняется условие (7), а следовательно ей соответствует линейный функционал $f_0 \in K^*$ такой, что $A^* f_0 = \lambda_0 f_0$.

Теорема доказана.

Заметим, что для частного случая, когда оператор A вполне непрерывен, теорема 1 не является новой и была получена иным методом среди прочих теорем М. А. Рутманом (4). В этом случае и сам оператор A имеет собственный вектор (притом, как показал М. А. Рутман, в K или на его границе).

Однако в общем случае последнее обстоятельство, вообще говоря, не имеет места. Пусть например E совпадает с пространством $C(0, 1)$ непрерывных функций $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, а K—с совокупностью положительных функций $x(t) \in C(0, 1)$. Положим $Ax = p(t)\, x(t)$, где $p(t)$ $(0 \leqslant \leqslant t \leqslant 1)$—какая-либо положительная непрерывная монотонная функция от t. Тогда $AK \subset K$, вместе с тем оператор A очевидно не имеет собственного вектора в $C(0, 1)$.

Несколько усложняя наши рассуждения, можно также доказать следующее предложение:

Теорема 2. *Пусть G означает некоторую совокупность перестановочных друг с другом линейных операторов, а G^*—совокупность опе-*

раторов, сопряженных с операторами из G. Если каждый оператор $A \in G$ оставляет инвариантным множество K $(AK \subset K)$, то операторы $A^* \in G^*$ имеют в K^* общий им всем собственный вектор f_0:

$$A^* f_0 = \lambda_A f_0 \quad (\lambda_A > 0,\ A \in g). \tag{9}$$

Отметим следующее следствие теоремы 2.

С л е д с т в и е. Пусть выполняются условия теоремы 2; пусть кроме того операторы $A \in G$ имеют в K общую им всем неподвижную точку x_0:

$$Ax_0 = x_0 \quad (A \in G). \tag{10}$$

Тогда операторы $A^* \in G^*$ имеют в K^* общую им всем неподвижную точку.

Действительно, пусть f_0 — собственный вектор, о котором идет речь в теореме 2. Применяя к обеим частям равенства (10) функционал f_0, найдем, что $f_0(Ax_0) = f_0(x_0)$, а так как в силу (9) $f_0(Ax_0) = \lambda_A f_0(x_0)$ и $f_0(x_0) > 0$ $(f_0 \in K^*,\ x_0 \in K)$, то отсюда заключаем, что $\lambda_A = 1$, и следовательно

$$A^* f_0 = f_0 \quad (A^* \in G).$$

Приведем теперь пример на приложение следствия теоремы 2. Пусть E означает линейное пространство всех вещественных ограниченных функций $x(q)$, определенных на некотором множестве Q с нормой

$$\| x \| = \sup_{q \in Q} | x(q) |.$$

В качестве K для этого случая выберем совокупность тех функций $x(q) \in E$, для которых

$$\inf_{q \in Q} x(q) > 0.$$

Пусть теперь нам задана некоторая совокупность Γ однозначных отображений $q \to \varphi(q)$ множества Q в свою часть $(\varphi(Q) \subset Q)$, и пусть эти отображения перестановочны, т. е.

$$\varphi(\psi(q)) = \psi(\varphi(q)) \quad (\varphi, \psi \in \Gamma,\ q \in Q).$$

Каждое отображение $\varphi \in \Gamma$ порождает некоторый линейный оператор A_φ, где

$$A_\varphi x(q) = x(\varphi(q)) = x_\varphi.$$

Очевидно

$$A_\varphi K \subset K, \quad A_\varphi A_\psi = A_\psi A_\varphi \quad (\varphi, \psi \in \Gamma)$$

и кроме того

$$A_\varphi 1 = 1 \quad (\varphi \in \Gamma).$$

Таким образом к множеству операторов $A_\varphi (\varphi \in \Gamma)$ применимо следствие теоремы 2, и следовательно существует линейный функционал $f_0 \in K^*$ такой, что $A_\varphi^* f_0 = f_0 (\varphi \in \Gamma)$ или, что то же,

$$f_0(x_\varphi) = f_0(x) \quad (x \in E,\ \varphi \in \Gamma).$$

Существование такого функционала $f_0 \in K^*$ как раз и составляет содержание одной из теорем А. Маркова (5).

Одесский государственный университет.

Поступило
17 IV 1939.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B a n a c h, Théorie des opérations linéaires (1932). [2] M a z u r, Studia Mathematica, IV, 73—74 (1933). [3] J. S c h a u d e r, Studia Mathematica, II, 176 (1930). [4] M. A. Р у т м а н, ДАН, XVIII, № 9 (1938). [5] A. A. M a r k o v, ДАН, I (X), № 8 (1936).