

УДК 539.4+620.1

ДЕФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ КИНЕТИКИ ПОВРЕЖДАЕМОСТИ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

А. П. ГРАБОВСКИЙ, А. А. БОНДАРЕЦ

*Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»*

Введение

В условиях эксплуатации элементы конструкций и детали машин воспринимают сложный комплекс внешних воздействий, приводящих к целому ряду необратимых физико-химических процессов, которые протекают в материале конструкции на микро- и макроуровнях. Вследствие этого происходит изменение первичной структуры материала, зарождение, развитие и слияние пор, образование микротрещин, уменьшение эффективного поперечного сечения элемента конструкции и его дальнейшее разрушение. Для аналитического описания влияния большого количества микроповреждений на напряженно-деформированное состояние вводится параметр повреждаемости, не связанный непосредственно с физической картиной действующих процессов [1], [2].

В зависимости от величины упругопластической деформации при нагружении конструктивного элемента сформулированы несколько типов микро- и макроразрушений – хрупкое, квазихрупкое и вязкое разрушение [3]–[5].

Довольно плодотворной для развития феноменологических теорий прочности деталей является классификация типов разрушений, которая базируется на определении влияния вида напряженного состояния на характер разрушения. Согласно теории М. М. Давиденкова, которая была развита в работах Я. Б. Фридмана [6]–[8], различают разрушение деталей машин и механизмов при упругопластическом нагружении в результате отрыва или сдвига. В первом случае принимается, что разрушение целостности происходит под действием максимальных нормальных напряжений, а во втором – под действием максимальных касательных напряжений.

Основная часть

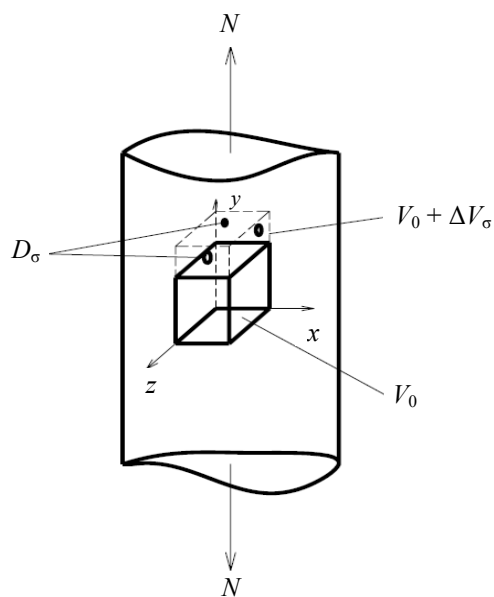
Рассмотрим особенности оценки кинетики накопления повреждений в деталях оборудования при упругопластическом осевом нагружении, сдвиге и объемном напряженном состоянии.

Осевое нагружение

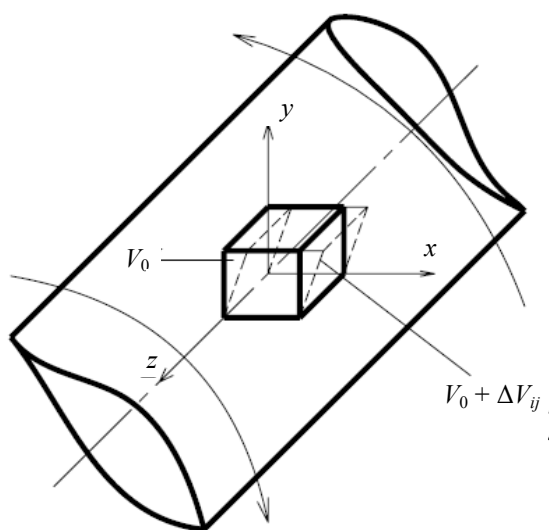
Повреждаемость выделенного единичного элемента (ВЕЭ) материала при упругопластическом осевом нагружении D_σ определяется по формуле

$$D_\sigma = \frac{V_{i\sigma} - V_0}{V_{i\sigma}} = 1 - \frac{V_0}{V_{i\sigma}}, \quad (1)$$

где V_0 и $V_{i\sigma}$ – соответственно, начальный и текущий объемы ВЕЭ при осевом нагружении.



a)



b)

Рис. 1. Принципиальная схема кинетики накопления повреждений ВЕЭ при упругопластическом: а – осевом нагружении; б – сдвиге

Величина текущего объема ВЕЭ при осевом нагружении определяется по формуле

$$V_{i\sigma} = V_0 + \Delta V_\sigma, \quad (2)$$

где ΔV_σ – изменение объема ВЕЭ, которое вызвано кинетикой накопления повреждений при осевом деформировании.

Из уравнений (1) и (2) следует:

$$\Delta V_\sigma = V_0 \frac{D_\sigma}{1 - D_\sigma}. \quad (3)$$

Зависимость кинетики накопления повреждений при осевом нагружении от изменяющегося в процессе упругопластического деформирования модуля упругости можно представить в виде [9]:

$$D_i = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{E}_i}{E_y}}, \quad (4)$$

где E_0 (E_y) и \tilde{E}_i – соответственно, начальный (устойчивый) и текущий модули упругости материала при осевом нагружении.

На рис. 2 (кривая 1) приведена характерная зависимость модуля упругости при упругопластическом осевом нагружении от величины текущей относительной пластической деформации ε_i , которая описывается уравнением [10]:

$$\tilde{E}_i = E_0 \left[1 - \varphi_\sigma \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\varepsilon_R} \right)^\alpha \right], \quad (5)$$

где $\varphi_\sigma = (E_0 - \tilde{E}_R)/E_0$ – относительный параметр изменения модуля упругости E от начального значения E_0 до конечной величины \tilde{E}_R , которая определяется в результате упругопластического нагружения при достижении предела прочности конструкционного материала; ε_R – относительная величина упругопластической деформации при достижении предела прочности материала, что соответствует модулю упругости \tilde{E}_R ; α – параметр, который характеризует пластические свойства материала при осевом нагружении.

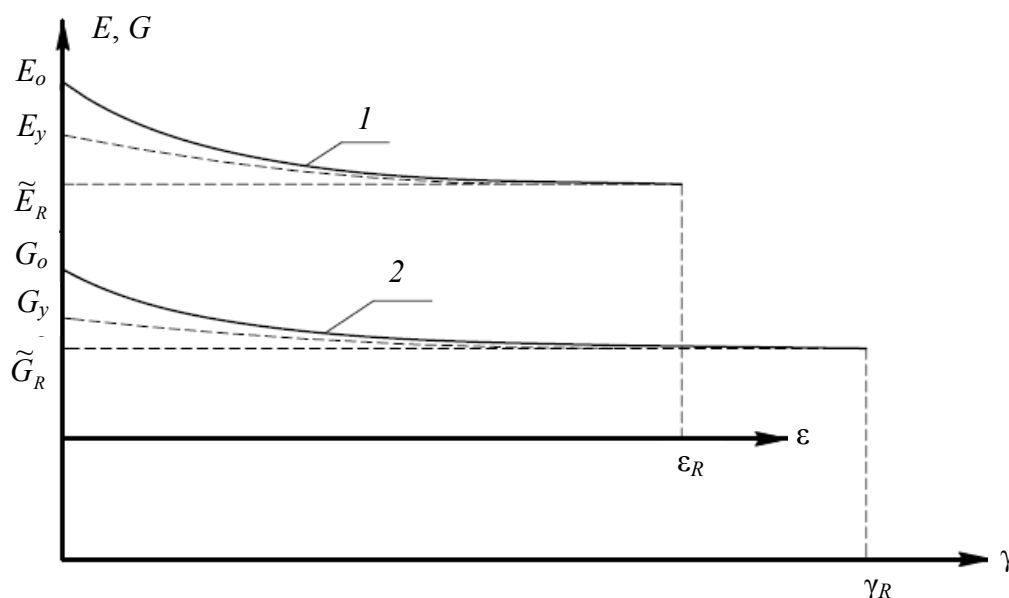


Рис. 2. Зависимость модулей упругости \tilde{E}_i (кривая 1) и \tilde{G}_i (кривая 2), соответственно, от относительной величины линейной деформации – ε_i при осевом нагружении, и от величины относительного угла закручивания – γ_i при кручении

Подставив отношение (5) в (4), получим уравнение для определения кинетики накопления повреждений при осевом упругопластическом нагружении:

$$D_{\sigma} = 1 - \sqrt{1 - \varphi_{\sigma} \left(\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\varepsilon_R} \right)^{\alpha}}, \quad (6)$$

Сдвиг (кручение)

Повреждаемость ВЕЭ при упругопластическом сдвиге – D_{τ} равна:

$$D_{\tau} = \frac{V_{i\tau} - V_0}{V_{i\tau}} = 1 - \frac{V_0}{V_{i\tau}}, \quad (7)$$

где $V_{i\tau}$ – текущая величина изменения формы ВЕЭ, вызванная дополнительной деформацией в результате его повреждаемости при сдвиге, которая определяется из выражения

$$V_{i\tau} = V_0 + \Delta V_{i\tau}, \quad (8)$$

где $\Delta V_{i\tau}$ – абсолютная величина дополнительного изменения формы ВЕЭ в результате повреждений при упругопластическом сдвиге.

Из уравнений (7), (8) имеем:

$$\Delta V_{i\tau} = V_0 \frac{D_{\tau}}{1 - D_{\tau}}. \quad (9)$$

С другой стороны, повреждаемость при сдвиге и величина изменения модуля упругости при сдвиге связаны следующей зависимостью [9]:

$$D_{i\tau} = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{G}_i}{G_y}}, \quad (10)$$

где G_0 (G_y) и \tilde{G}_i – начальный (устойчивый) и текущий модули упругости материала при сдвиге.

На рис. 2 (кривая 2) показана характерная зависимость изменения модуля упругости при сдвиге – \tilde{G}_i в случае упругопластического сдвига от величины текущего относительного угла сдвига – $\tilde{\gamma}_i$, которая описывается уравнением [10]:

$$\tilde{G}_i = G_0 \left[1 - \varphi_{\tau} \left(\frac{\tilde{\gamma}_i}{\gamma_R} \right)^{\beta} \right], \quad (11)$$

где $\varphi_{\tau} = (G_0 - \tilde{G}_R)/G_0$ параметр изменения модуля упругости G от начального (устойчивого) значения G_0 до конечной величины – \tilde{G}_R , которая стремится при упругопластическом сдвиге к пределу прочности конструкционного материала; γ_R – относительная величина упругопластической деформации сдвига при достижении предела прочности материала; β – параметр, который характеризует пластические свойства материала при кручении (сдвиге).

Подставив выражение (11) в зависимость (10), получим следующую формулу для определения кинетики накопления повреждений – D_{τ} при сдвиге:

$$D_\tau = 1 - \sqrt{1 - \varphi_\tau \left(\frac{\tilde{\gamma}_i}{\gamma_R} \right)^\beta}. \quad (12)$$

За количественную характеристику кинетики повреждаемости при растяжении и сдвиге – D можно принять параметр изменения удельного электрического сопротивления рабочей зоны образца, который оценивается соотношением [11]:

$$D = \frac{\rho_i - \rho_0}{\rho_0}, \quad (13)$$

где $\rho_0 = \frac{U_0 S_0}{l_0 I_0}$ и $\rho_i = \frac{U_i S_i}{l_i I_i}$ – соответственно, начальная и текущая величины удельного электрического сопротивления рабочей зоны образца, которые определяются до и во время деформирования; U_0, I_0 и U_i, I_i – соответственно, начальные и текущие величины электрического напряжения и тока, которые проходят через образец при испытаниях; l_0, S_0 и l_i, S_i – соответственно, начальные и текущие значения длины и площади поперечного сечения рабочей зоны образца при испытаниях.

Объемное напряженное состояние

Согласно работам [9], [17] зависимость общей повреждаемости, которая вызывает дополнительное изменение формы и объема ВЕЭ – D от величины объемной деформации – $\varepsilon_V^{(D)}$, имеет вид:

$$D = 1 - \frac{V_0}{V_i} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_i} = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon_V^{(D)}} = \frac{\varepsilon_V^{(D)}}{1 + \varepsilon_V^{(D)}}, \quad (14)$$

где V_0 – начальный объем ВЕЭ конструкционного материала до упругопластического деформирования; $V_i = V_0 + \Delta V_i$ – текущий объем ВЕЭ при упругопластическом деформировании, который включает общее дополнительное изменение его объема и формы в зависимости от величины повреждаемости; ΔV_i – абсолютная составляющая общего дополнительного изменения объема и формы ВЕЭ.

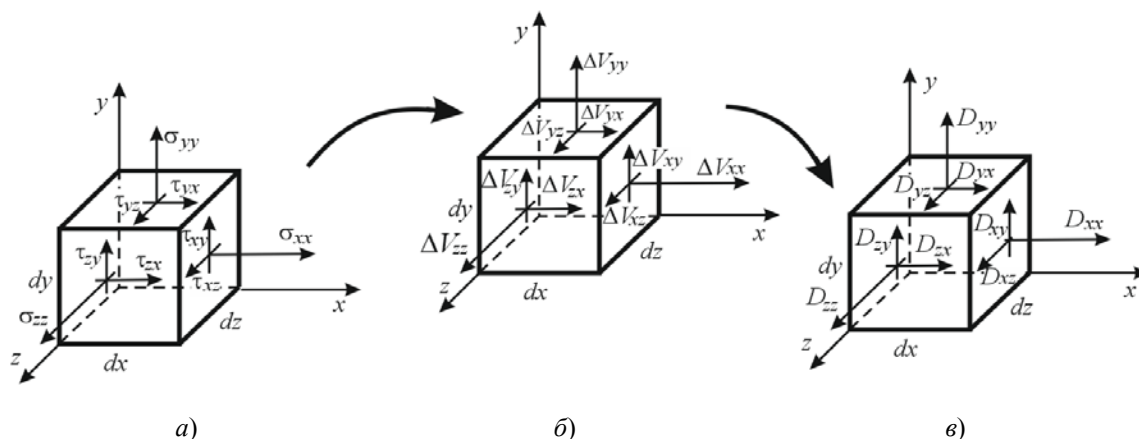


Рис. 3. Компоненты: а – напряжений; б – изменения объема и формы; в – повреждаемости, ВЕЭ конструкционного материала при упругопластическом нагружении

Кинетика накопления повреждений в ВЕЭ, которая вызвана величинами дополнительного изменения объема выражается через величины относительных деформаций в направлениях осей координат x, y, z следующим образом:

– в направлении оси x :

$$D_{xx} = 1 - \frac{V_0}{V_{xx}} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_{xx}} = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon_{xx}^{(D)}} = \frac{\varepsilon_{xx}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{xx}^{(D)}}; \quad (15)$$

– в направлении оси y :

$$D_{yy} = 1 - \frac{V_0}{V_{yy}} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_{yy}} = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon_{yy}^{(D)}} = \frac{\varepsilon_{yy}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{yy}^{(D)}}; \quad (16)$$

– в направлении оси z :

$$D_{zz} = 1 - \frac{V_0}{V_{zz}} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_{zz}} = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon_{zz}^{(D)}} = \frac{\varepsilon_{zz}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{zz}^{(D)}}; \quad (17)$$

где V_{xx}, V_{yy}, V_{zz} – текущие объемы ВЕЭ при упругопластическом нагружении, которые включают дополнительное изменение объема от повреждаемости в направлении осей x, y, z , соответственно; $\Delta V_{xx}, \Delta V_{yy}, \Delta V_{zz}$ – абсолютные составляющие дополнительного изменения объема ВЕЭ от повреждаемости в направлении осей x, y, z , соответственно; $\varepsilon_{xx}^{(D)}, \varepsilon_{yy}^{(D)}, \varepsilon_{zz}^{(D)}$ – относительная величина дополнительного изменения объема ВЕЭ от повреждаемости в направлении осей x, y, z , соответственно.

Кинетика накопления повреждений в ВЕЭ, которая вызывает дополнительное изменение формы при действии сдвиговых упругопластических деформаций с учетом парности касательных напряжений на его гранях в направлениях осей xy – yx, yz – zy, zx – xz , выражается соотношениями:

– на гранях в направлениях осей xy – yx :

$$D_{xy} = 1 - \frac{V_0}{V_{xy}} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_{xy}} = 1 - \frac{1}{1 + 1/2 \gamma_{xy}^{(D)}} = \frac{1/2 \gamma_{xy}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{xy}^{(D)}}; \quad (18)$$

$$D_{yx} = 1 - \frac{V_0}{V_{yx}} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_{yx}} = 1 - \frac{1}{1 + 1/2 \gamma_{yx}^{(D)}} = \frac{1/2 \gamma_{yx}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{yx}^{(D)}};$$

– на гранях в направлениях осей yz – zy :

$$D_{yz} = 1 - \frac{V_0}{V_{yz}} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_{yz}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \gamma_{yz}^{(D)}} = \frac{\frac{1}{2} \gamma_{yz}^{(D)}}{1 + \frac{1}{2} \gamma_{yz}^{(D)}}; \quad (19)$$

$$D_{zy} = 1 - \frac{V_0}{V_{zy}} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_{zy}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \gamma_{zy}^{(D)}} = \frac{\frac{1}{2} \gamma_{zy}^{(D)}}{1 + \frac{1}{2} \gamma_{zy}^{(D)}};$$

– на гранях в направлениях осей zx – xz :

$$D_{zx} = 1 - \frac{V_0}{V_{zx}} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_{zx}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\gamma_{zx}^{(D)}} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{zx}^{(D)}}{1 + \frac{1}{2}\gamma_{zx}^{(D)}}; \quad (20)$$

$$D_{xz} = 1 - \frac{V_0}{V_{xz}} = 1 - \frac{V_0}{V_0 + \Delta V_{xz}} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\gamma_{xz}^{(D)}} = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{xz}^{(D)}}{1 + \frac{1}{2}\gamma_{xz}^{(D)}},$$

где V_{xy} , V_{yx} ; V_{yz} , V_{zy} ; V_{zx} , V_{xz} – текущие дополнительные изменения формы ВЕЭ, вызванные повреждаемостью при упругопластическом деформировании на соответствующих площадках в направлениях xy – yx , yz – zy , zx – xz , соответственно; ΔV_{xy} , ΔV_{yx} ; ΔV_{yz} , ΔV_{zy} ; ΔV_{zx} , ΔV_{xz} – абсолютные составляющие дополнительного изменения формы ВЕЭ, вызванные повреждаемостью на соответствующих площадках в направлениях xy – yx , yz – zy , zx – xz , соответственно; $\frac{1}{2}\gamma_{xy}^{(D)}$, $\frac{1}{2}\gamma_{yx}^{(D)}$; $\frac{1}{2}\gamma_{yz}^{(D)}$, $\frac{1}{2}\gamma_{zy}^{(D)}$; $\frac{1}{2}\gamma_{zx}^{(D)}$, $\frac{1}{2}\gamma_{xz}^{(D)}$ – относительные величины дополнительного изменения формы ВЕЭ в результате повреждаемости соответствующих площадок в направлениях xy – yx , yz – zy , zx – xz , соответственно.

Выражения (13)–(20) позволяют представить тензор повреждаемости и величины функций относительных дополнительных осевых и угловых перемещений при упругопластических деформациях, которые характеризуют повреждаемость ВЕЭ конструкционного материала в виде следующих тензорных величин:

$$D = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_{xx}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{xx}^{(D)}} & \frac{1/2 \gamma_{xy}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{xy}^{(D)}} & \frac{1/2 \gamma_{xz}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{xz}^{(D)}} \\ \frac{1/2 \gamma_{yx}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{yx}^{(D)}} & \frac{\varepsilon_{yy}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{yy}^{(D)}} & \frac{1/2 \gamma_{yz}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{yz}^{(D)}} \\ \frac{1/2 \gamma_{zx}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{zx}^{(D)}} & \frac{1/2 \gamma_{zy}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{zy}^{(D)}} & \frac{\varepsilon_{zz}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{zz}^{(D)}} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Первый и второй инварианты тензоров повреждаемости равняются:

$$I_1 = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} = \frac{\varepsilon_{xx}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{xx}^{(D)}} + \frac{\varepsilon_{yy}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{yy}^{(D)}} + \frac{\varepsilon_{zz}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{zz}^{(D)}}; \quad (22)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zy} & D_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xz} \\ D_{zx} & D_{zz} \end{vmatrix} = D_{xx}D_{yy} + D_{yy}D_{zz} + D_{xx}D_{zz} - D_{xy}D_{yx} - D_{yz}D_{zy} -$$

$$-D_{zx}D_{xz} = \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_{xx}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{xx}^{(D)}} & \frac{1/2 \gamma_{xy}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{xy}^{(D)}} \\ \frac{1/2 \gamma_{yx}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{yx}^{(D)}} & \frac{\varepsilon_{yy}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{yy}^{(D)}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_{yy}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{yy}^{(D)}} & \frac{1/2 \gamma_{yz}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{yz}^{(D)}} \\ \frac{1/2 \gamma_{zy}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{zy}^{(D)}} & \frac{\varepsilon_{zz}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{zz}^{(D)}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\varepsilon_{xx}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{xx}^{(D)}} & \frac{1/2 \gamma_{xz}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{xz}^{(D)}} \\ \frac{1/2 \gamma_{zx}^{(D)}}{1 + 1/2 \gamma_{zx}^{(D)}} & \frac{\varepsilon_{zz}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{zz}^{(D)}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{xx}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{xx}^{(D)}} \frac{\varepsilon_{yy}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{yy}^{(D)}} + \frac{\varepsilon_{yy}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{yy}^{(D)}} \frac{\varepsilon_{zz}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{zz}^{(D)}} + \frac{\varepsilon_{xx}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{xx}^{(D)}} \frac{\varepsilon_{zz}^{(D)}}{1 + \varepsilon_{zz}^{(D)}} -$$

$$\frac{1/2\gamma_{xy}^{(D)}}{1+1/2\gamma_{xy}^{(D)}} \frac{1/2\gamma_{yx}^{(D)}}{1+1/2\gamma_{yx}^{(D)}} - \frac{1/2\gamma_{xy}^{(D)}}{1+1/2\gamma_{xy}^{(D)}} \frac{1/2\gamma_{yx}^{(D)}}{1+1/2\gamma_{yx}^{(D)}} - \frac{1/2\gamma_{xz}^{(D)}}{1+1/2\gamma_{xz}^{(D)}} \frac{1/2\gamma_{zx}^{(D)}}{1+1/2\gamma_{zx}^{(D)}}. \quad (23)$$

Интенсивность повреждаемости – D_i , выраженная через интенсивность относительных деформаций от повреждаемости – $\varepsilon_i^{(D)}$ при произвольном направлении координатных осей, равняется:

$$D_i = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon_i^{(D)}} = \frac{\varepsilon_i^{(D)}}{1 + \varepsilon_i^{(D)}}; \quad (24)$$

Выразив интенсивность повреждаемости (11) через величину интенсивности деформаций [8] при произвольном направлении координатных осей и ограничивая допустимую величину поврежденности при осевом нагружении [D_R], получим критерий поврежденности:

$$D_i = \frac{\sqrt{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^{(D)} - \varepsilon_{yy}^{(D)})^2 + (\varepsilon_{yy}^{(D)} - \varepsilon_{zz}^{(D)})^2 + (\varepsilon_{zz}^{(D)} - \varepsilon_{xx}^{(D)})^2} + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^{(D)} \gamma_{yx}^{(D)} + \gamma_{yz}^{(D)} \gamma_{zy}^{(D)} + \gamma_{zx}^{(D)} \gamma_{xz}^{(D)})}{3 + \sqrt{2} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^{(D)} - \varepsilon_{yy}^{(D)})^2 + (\varepsilon_{yy}^{(D)} - \varepsilon_{zz}^{(D)})^2 + (\varepsilon_{zz}^{(D)} - \varepsilon_{xx}^{(D)})^2} + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^{(D)} \gamma_{yx}^{(D)} + \gamma_{yz}^{(D)} \gamma_{zy}^{(D)} + \gamma_{zx}^{(D)} \gamma_{xz}^{(D)})} \leq [D_R]. \quad (25)$$

Заключение

На основе положений континуальной механики разрушения рассмотрен инженерный подход к оценке кинетики накопления рассеянных повреждений в деталях машин и механизмов, которые воспринимают осевые и сдвиговые упругопластические нагружения. Рассмотрены методики определения повреждений с помощью относительных осевых и угловых упругопластических деформаций. Предложен тензор повреждаемости, который трансформируется тензором функции дополнительных линейных и угловых перемещений при сложном упругопластическом деформировании конструкционных материалов. Вводится в расчеты параметр интенсивности повреждаемости при произвольном направлении координатных осей, который определяется величинами дополнительных линейных и угловых относительных деформаций при объемном напряженном состоянии. Представлен критерий поврежденности.

Литература

1. Качанов, Л. М. Основы механики руйнування / Л. М. Качанов. – М. : Наука, 1974. – 312 с.
2. Болотін, В. В. Ресурс машин і конструкцій / В. В. Болотін. – М. : Машиностроение, 1990. – 448 с.
3. Голуб, В. П. Нелинейная механика континуальной поврежденности и ее приложение к задачам ползучести и усталости / В. П. Голуб // Прикладная механика. – 2000. – 36, № 3. – С. 31–59.
4. Бобырь, Н. И. Поврежденность конструкционных материалов при сложном малоцикловом нагружении / Н. И. Бобырь, Б. О. Яхно, А. П. Грабовський // Проблемы прочности. – 2007. – № 6. – С. 25–34.
5. Новожилов, В. В. Микронапряжение в конструкционных материалах / В. В. Новожилов, Ю. И. Кадашевич – Л. : Машиностроение, 1990. – 223 с.

6. Романов, А. Н. Разрушение при малоцикловом нагружении / А. Н. Романов. – М. : Наука, 1988. – 279 с.
7. Комплексная оценка поврежденности материала при пластическом деформировании / А. А. Лебедев [и др.] // Проблемы прочности. – 1996. – № 5. – С. 23–30.
8. Механическое поведение материалов при различных видах нагружений / В. Т. Трощенко [и др.]. – К. : Наукова думка, 2000. – 316 с.
9. Castagne, S. Application of Damage Model to an Aluminium Alloy // S. Castagne, A. Habraken, S. Cescotto // International Journal of Damage Mechanics. – Vol. 12, January, 2003. – P. 5–30.
10. Бобир, М. І. Спосіб визначення пошкоджуваності матеріалів за значеннями залишкових деформацій : пат. на корисну модель № 56619 / М. І. Бобир, А. П. Грабовський, А. В. Марочко. – Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на корисні моделі 25.01.2011 р.
11. Бобир, М. І. Спосіб визначення кінетики руйнування матеріалів в процесі їх пружно-пластичного деформування : деклараційний пат. № 65499А 7G01N3/08 / М. І. Бобир, А. П. Грабовський, О. В. Тимошенко. – Опубл. 15.03.2004 р. // Бюл. № 3.
12. Модель накоплення повреждений в металлических материалах при статическом нагружении / А. А. Лебедев [и др.] // Проблемы прочности. – 1995. – № 7. – С. 31–37.
13. Лебедев, А. О. Механіка матеріалів для інженерів : навчальний посібник / А. О. Лебедев, М. І. Бобир, В. П. Ламашевський. – К. : НТУУ «КПІ», ВПІ ВПК «Політехніка», 2006. – 286 с.
14. Грабовський, А. П. Дослідження кінетики пошкоджуваності в конструкційних матеріалах при складному напруженому стані / А. П. Грабовський, О. В. Тимошенко, О. М. Масло // Вестн. НТУУ «КПІ». Серія «Машиностроение». – 2003. – № 4. – С. 43–47.
15. Грабовський, А. П. Деградація фізико-механічних властивостей конструкцій матеріалів при пружнопластичному розтягуванні та крученні / А. П. Грабовський // Вестн. НТУУ «КПІ». Серія «Машиностроение». – 2007. – № 50. – С. 155–161.
16. Lemaitre, J. Damage mechanics – The Bath Press / J. Lemaitre. – Great Britain. – 1990. – 556 p.
17. Грабовський, А. П. Деформування і кінетика мікропошкоджуваності конструкційних матеріалів / А. П. Грабовський, А. В. Марочко // Вісн. НТУУ «КПІ», сер. «Машинобудування». – 2011. – № 63. – С. 273–280.
18. Писаренко, Г. С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. – К. : Наукова думка, 1976. – 415 с.

Получено 04.02.2013 г.