

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Институт повышения квалификации
и переподготовки

Кафедра «Металлургия и технологии обработки материалов»

В. А. Жаранов

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

ПОСОБИЕ

для слушателей специальности переподготовки

1-42 01 71 «Металлургическое производство

и материалобработка»

заочной формы обучения

Гомель 2024

УДК 669(075.8)
ББК 34.3я73
Ж34

*Рекомендовано кафедрой «Металлургия
и технология обработки материалов» ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 7 от 27.09.2023 г.)*

Рецензент: декан заоч. фак. канн. техн. наук, доц. ГГТУ им. П. О. Сухого
Ю. А. Рудченко

Жаранов, В. А.
Ж34 Математическое моделирование : пособие для слушателей специальности переподготовки 1-42 01 71 «Металлургическое производство и материалобработка» заоч. формы обучения / В. А. Жаранов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2024. – 137 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <http://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

В пособии представлены лекционные материалы курса «Математическое моделирование» для слушателей специальности 1-42 01 71 «Металлургическое производство и материалобработка». Изложены основы теории и практики моделирования, дана классификация решаемых в металлургии инженерных задач, описаны области применения различных видов моделей и способы их построения. Подробно рассмотрены вопросы моделирования и оптимизации металлургических процессов, технологий и оборудования, а также практические примеры решения задач в области металлургии, в том числе с применением прикладных пакетов инженерного анализа.

УДК 669(075.8)
ББК 34.3я73

© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2024

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

ОГЛАВЛЕНИЕ

1 ОБЩАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.....	8
1.1 Общее понятие о математической модели.....	8
1.2 Классификация инженерных задач.....	10
1.3 Цели моделирования.....	15
1.4 Виды моделей.....	15
1.5 Классификация математических моделей.....	16
1.6 Формы представления модели.....	18
1.7 Нелинейность математических моделей.....	18
1.8 Этапы построения математической модели.....	19
1.9 Выбор и обоснование выбора методов решения задачи.....	21
2 ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ В МЕТАЛЛУРГИИ. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	22
3 ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА: БАЗОВЫЕ ПРИНЦИПЫ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ.....	46
3.1 Особенности экспериментальных исследований.....	46
3.2 Основы планирования эксперимента.....	53
3.3 Дробный факторный эксперимент.....	57
3.4 Факторный метод.....	58
3.5 Дисперсия параметра оптимизации.....	61
3.6 Проверка однородности дисперсии.....	62
3.7 Обработка результатов эксперимента.....	62
3.8 Регрессионный анализ.....	64
3.9 Принятие решения после построения модели.....	68
4 ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЕТАЛЛУРГИИ.....	70
4.1 Расчеты процесса нагрева шихты в слое в нестационарных условиях.....	70
4.2 Компьютерное моделирование сложных нагруженных узлов печей.....	75
4.3 Моделирование литейных процессов.....	79
4.3.1 Нагрев металлического вала.....	80
4.3.2 Перемешивание стали в разливочном ковше.....	81
4.3.3 Моделирование потока расплава в канале литниковой системы по критерию Фруда.....	83

4.3.4 Моделирование потока расплава в канале литниковой системы по критерию Рейнольдса	85
4.3.5 Моделирование непрерывной разливки стали	86
4.3.6 Моделирование естественной конвекции жидкой стали внутри затвердевающей отливки.	88
4.3.7 Моделирование всплывания неметаллических включений в жидкой стали	91
4.4 Составление безразмерных комплексов подобия явлений по дифференциальным уравнениям	93
4.5 Решение задачи оптимизации	95
4.6 Численные методы решения задачи одномерной оптимизации	96
4.6.1 Этапы решения задачи	97
4.6.2 Метод двойного половинного деления	97
4.6.3 Метод золотого сечения	101
5 ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТЕХНОЛОГИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ	106
5.1 Интегрированное вычислительное материаловедение	106
5.2 Интеллектуальные технологии в металлургии и их развитие	108
5.3 Применение нечеткой логики	111
5.4 Применение методов машинного обучения для оптимизации производственных процессов в металлургической промышленности	113
5.5 Применение численных методов для моделирования технологических процессов подготовки производства отливок	119
5.6 Simufact — программный комплекс для компьютерного моделирования	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	135
ЛИТЕРАТУРА	136

ВВЕДЕНИЕ

Ученых и инженеров всегда интересовали причинно-следственные связи в природе. Это в полной мере относится и к металлам и материалам. Понимание физики металлов значительно расширилось с первых дней существования металлургии. Открытие механизмов, которые влияют и контролируют поведение металлов, стимулировало продолжение исследований и последующие открытия. Первоначальное понимание и описание механизмов управления были в основном феноменологическими и основывались на наблюдениях и предполагаемом взаимодействии материалов и переменных процесса, влияющих на микроструктуру, механические свойства и поведение металлического материала. Преобразование механистических соотношений в математические выражения в настоящее время является областью моделирования материалов.

Развитие моделей и методов моделирования теперь позволяет быстрее открывать новые системы сплавов с большим потенциалом оптимизации и максимально широкой сферой применения. Модели интегрируются в вычислительные инструменты для проектирования и моделирования обработки и производства компонентов. Успешное применение моделей в промышленности также приводит к дальнейшему стремлению к разработке более совершенных моделей, которые будут точнее и качественнее прогнозировать. Изучение механизмов, контролирующих эволюцию и поведение металлических материалов, продолжается сегодня еще более агрессивными темпами.

Классические модели, предсказывающие поведение металлов в условиях обработки, продолжают использоваться и совершенствуются за счет лучшего понимания механизмов, влияющих на эволюцию микроструктуры, макроструктуры и формирование дефектов. Новые теории и связанные с ними математические модели разрабатываются и применяются к системам металлических сплавов для существующих и новых методов обработки. В дополнение к эмпирическим описаниям поведения материалов во время обработки в настоящее время разрабатываются подходы, основанные на расчетах атомистической и молекулярной динамики, с целью обеспечить фундаментальное понимание механизмов, которые контролируют наблюдаемое поведение существующих и новых сплавов для уникальных приложений.

Уточнение моделей и методов моделирования приводит к увеличению возможностей и точности металлургических прогнозов, та-

ких как фазовые равновесия, микроструктура и последующие механические свойства. Возможность быстро применять фундаментальные модели для практического проектирования и производства компонентов стимулировала беспрецедентное сотрудничество между университетами, исследовательскими лабораториями, компаниями-разработчиками программного обеспечения и промышленными пользователями инструментов моделирования. Объединение проектирования компонентов, проектирования сплавов и производства компонентов с помощью методов моделирования позволит продолжить прогресс в области исследований сплавов, разработки передовых процессов и оборудования.

Феноменологические и механистические модели также разделяются по типу приложения, включая модели материалов или модели процессов. Модели материалов для металлов также можно рассматривать как модели металлургических процессов, где рост зерен, выделение, рекристаллизация или сопротивление дислокаций являются примерами процессов внутри металлов и сплавов. Модели материалов описывают, как, например, микроструктура, кристаллографическая структура и дефекты развиваются в зависимости от локальных переменных металлургического процесса, включая зависимости от истории и траектории развития.

С другой стороны, модели процессов описывают производственные процессы, которые требуют понимания внешних независимых параметров и граничных условий, и предоставляют информацию о макроскопических изменениях компонентов и информацию для моделей металлургических процессов. Моделирование производственного процесса направлено на интеграцию моделей поведения материалов с описанием конкретных процессов (например,ковка, литье по выплавляемым моделям), которые обычно включают характеристики оборудования/процесса и эффекты взаимодействия (такие как теплопередача и трение). Уравнения, описывающие физические явления в моделях поведения материалов и/или их связь с моделями процессов, часто (за редким исключением) слишком сложны для решения аналитическими средствами. Обычно это относится к реальным промышленным процессам. В таких случаях необходимо использовать методы численного моделирования для описания поведения материала, механики процесса и взаимосвязей между обработкой, структурой и механическим поведением.

1 ОБЩАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

1.1 Общее понятие о математической модели

Математическая модель — это абстрактное представление реального объекта, явления или системы, которое включает в себя математические формулы, уравнения и графики, описывающие конкретные характеристики этого объекта или системы. Математические модели используются для анализа, прогнозирования и оптимизации поведения объектов и систем, а также для решения различных прикладных задач в естественных и общественных науках. Математические модели могут быть классифицированы по разным критериям, таким как форма представления, степень сложности, тип зависимости, характер изменения. Например, математические модели могут быть линейными или нелинейными, детерминированными или стохастическими, статическими или динамическими, дискретными или непрерывными, структурными или функциональными и т. д. Для создания и исследования математических моделей используются различные математические методы, такие как аналитические, численные, графические, экспериментальные [21].

Для построения математической модели необходимо определить цель моделирования, выбрать основные переменные и параметры, сформулировать математические соотношения между ними, проверить адекватность и точность модели, а также провести ее анализ и интерпретацию.

Математическое моделирование – это важный инструмент познания и преобразования реальности, который позволяет упростить и уточнить сложные и неоднозначные явления, а также раскрыть их сущность и закономерности.

Математическое моделирование в металлургии — это применение математических методов и средств для анализа и оптимизации металлургических процессов и объектов. Математическое моделирование позволяет изучать физические, химические, термодинамические и кинетические явления, происходящие в металлургических агрегатах, а также влияние различных параметров на качество и эффективность производства. Математическое моделирование в металлургии может быть использовано для решения таких задач, как [50]:

- моделирование газо- и гидродинамики металлургических процессов: работа фурм, форсунок и горелок, потоки в промежуточных ковшах и кристаллизаторах, перемешивание расплавов газом и др. (рисунок 1.1);
- моделирование обработки металлов давлением: прокатки, производства профилей и труб;
- моделирование фазовых превращений и структурообразования в металлах и сплавах: диффузия, рекристаллизация, выделение фаз, упрочнение, коррозия и др.;
- моделирование тепловых процессов в металлургии: нагрев, охлаждение, теплообмен, теплопроводность, тепловые напряжения и др.;
- моделирование химических реакций в металлургии: растворение, окисление, восстановление, редукция, рафинирование, легирование и др.;
- моделирование экономических и экологических аспектов металлургии: затраты, прибыль, энергоэффективность, выбросы, отходы и др.

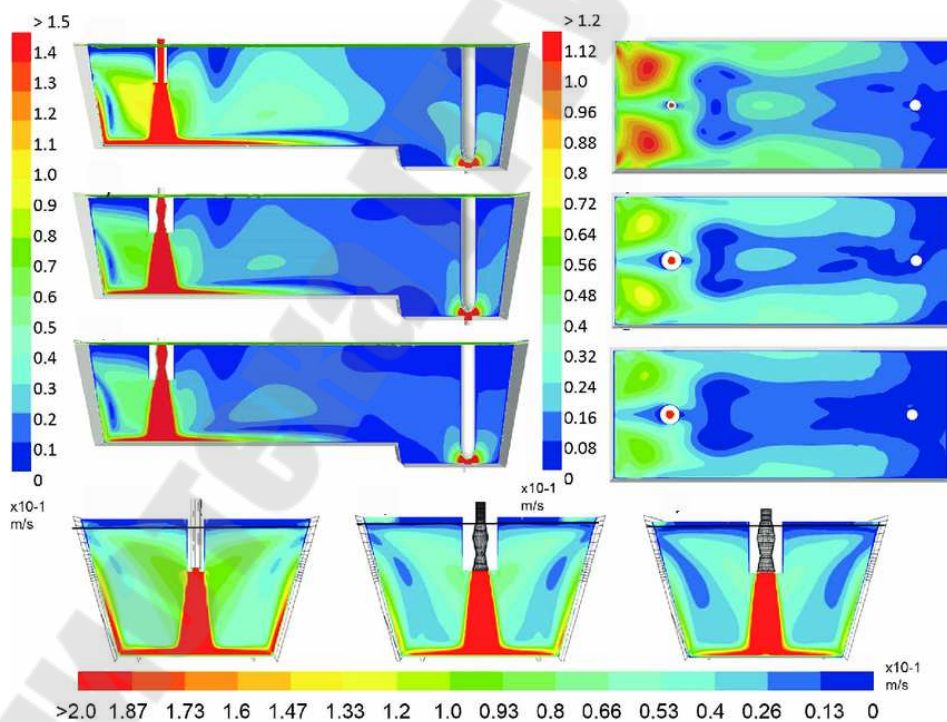


Рис. 1.1. Моделирование гидродинамики потоков металла в промежуточном ковше машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ)

1.2 Классификация инженерных задач

Традиционно инженерные задачи классифицируются по видам инженерной деятельности [5]: технологические, проектные, исследовательские и управленческие; по назначению: исследовательские, проектные, прогнозные и оптимизационные задачи (рис. 1.1). Многогранность и междисциплинарность современной инженерной деятельности, а также весьма широкий спектр возможных целей решения инженерных задач делают эту классификацию условной. Тем не менее, это имеет практическое значение, поскольку каждая из выделенных групп инженерных задач характеризуется своей спецификой и особенностями решения.



Рис. 1.2. Классификация инженерных задач

Технологические задачи связаны с проблемами разработки и внедрения в условиях конкретного производства различных технологий. При этом технология рассматривается как некоторый алгоритм действий, последовательность этапов, операций, перераспределений и переходов, характеризующихся индивидуальным содержанием и выполняемых с использованием конкретного оборудования и необходимых ресурсов. Результат решения таких задач обычно формализуется в виде набора технологической документации, технологических карт, инструкций, методических указаний, позволяющих получить ответы на вопросы о структуре технологической цепочки и параметрах технологического режима; реже - в виде программ управления автоматическими технологическими модулями [7].

Задачи проектирования (конструкторские) связаны с проблемами поиска рациональных геометрических форм, конструкции, материала и режимов работы изделий, оснастки, оборудования, реже – объемно-планировочных решений при выполнении работ по проектированию новых или реконструкции существующих производств. Результат решения подобных задач обычно оформляется в виде комплекта конструкторской документации, рабочих и сборочных чертежей, спецификаций, схем, макетов, эскизов, 2D и 3D визуализаций, компьютерных программ для изготовления деталей изделий, оснастки, оборудования на ЧПУ. машины [53].

Задачи исследования в основном связаны с «узкими местами» производства, изучением причинно-следственных связей явлений, происходящих в производственных процессах, проведением технологического контроля материалов, оборудования и оборудования; выявление производственного брака, его предупреждение и устранение; реже – выполняется разработка новых методов исследования и их развитие. Результаты решения таких задач обычно оформляются в виде выводов, актов, предложений, рекомендаций и технических отчетов, позволяющих предотвратить, уменьшить или устранить существующие или обнаруженные технические недостатки действующего или проектируемого производства.

Задачи управления связаны с проблемами организации производства и управления его подразделениями, координации режимов их работы, планирования ремонтов техники и оборудования, распределения ресурсов, рационализации грузопотоков, поддержания и поддержания производственных процессов. Результаты их решения – планы, графики, заявки, маршрутные листы, приказы, распоряжения.

Задачи исследования ориентированы на изучение природы явлений, происходящих внутри объекта, а также связи его с окружающей средой; выявление существенных характеристик и свойств объекта, форм и связей между ними, возможностей воздействия на них извне и управления ими.

Задачи проектирования направлены на создание новых или усовершенствование существующих объектов с учетом их конструктивных и функциональных особенностей и оценку недостатков и противоречий аналогов и прототипов.

Задачи прогнозирования призваны получить ответ на вопрос, что произойдет с объектом, его структурой и параметрами при изменении условий его существования (применении дополнительных

внешних воздействий, изменении их характера, исключении одного или нескольких компонентов из структуры объекта, переход на альтернативные виды материалов и ресурсов и др.).

Задачи оптимизации ориентированы на улучшение характеристик и свойств объекта, а также на поиск наилучшего решения из множества всех возможных решений применительно к данному объекту.

Результатом системного подхода к исследованию объектов является возможность применения общего метода моделирования для решения инженерных задач [5]. Моделирование — универсальный метод изучения объектов, основанный на упрощении представлений о них. Именно упрощение составляет ядро, суть и основную идею моделирования, позволяя сделать процесс изучения объектов, даже самых сложных, менее трудоемким и затратным. Таким образом, в соответствии с общепризнанной концепцией «жизненного цикла» теория систем описывает существование любого объекта непрерывной замкнутой цепочкой: «проектирование – реализация – эксплуатация – моральное и физическое старение – переработка или утилизация – обновление».

Для математического моделирования используются различные типы моделей, такие как:

- аналитические модели: основанные на строгих математических выражениях, решаемых аналитически или приближенно;
- численные модели: основанные на дискретизации уравнений и геометрии, решаемых численными методами, такими как конечные разности, конечные элементы, конечные объемы и др.;
- физические модели: основанные на подобии между реальным и модельным объектом, реализуемые в лабораторных или полупромышленных условиях;
- эмпирические модели: основанные на экспериментальных данных и статистических методах, таких как регрессионный анализ, нейронные сети, генетические алгоритмы и др.

Математическое моделирование в металлургии требует знания основных законов и принципов физики, химии, математики, а также специфики металлургических процессов и объектов. Математическое моделирование является мощным инструментом для научного исследования, технологического развития и инновационного проектирования в металлургической отрасли.

Модель и моделирование - универсальные понятия, атрибуты одного из наиболее мощных методов познания в любой профессиональной области, познания системы, процесса, явления.

Целью моделирования являются получение, обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой; а модель здесь выступает как средство познания свойств и закономерности поведения объекта [14].

Задачи моделирования:

- построение модели (эта задача менее формализуема и конструктивна, в том смысле, что нет алгоритма для построения моделей);
- исследование модели (эта задача более формализуема, имеются методы исследования различных классов моделей);
- использование модели (конструктивная и конкретизируемая задача).

Моделируют:

Модели объектов:

- уменьшенные копии машин, кораблей, самолетов,
- модели ядра атома, кристаллических решеток сталей,
- 2d- и 3d-чертежи установок (оригиналы которых могут пока отсутствовать!)

Модели процессов:

- Процессы плавки металла
- Процессы разливки
- Процессы нагрева или охлаждения
- Процессы пластической или упругой деформации тел
- Процессы сварки, контроля структуры металла

Модели явлений:

- Излучения или поглощения лучистой энергии на поверхности тела
- Кристаллизации из расплава и рекристаллизации
- Упрочнения металла при деформации поликристалла.

Система–совокупность элементов, находящихся в существенной связи друг с другом и менее слабой связи с внешней средой.

Системе присущи интегративные свойства, т. е. такие свойства, которые не присущи ни одному из ее элементов, а присущи только их взаимосвязанной совокупности. Изучение системы предполагает соз-

дание ее математической модели, позволяющей предсказать поведение системы при определенных условиях.

Этапы системного подхода при моделировании операций [14]:

1. Постановка задачи.
2. Определение структуры изучаемой системы.
3. Построение концептуальной модели. Построение концептуальной модели рассматриваемой структуры, т. е. выделение параметров, которые представляются наиболее важными, и установка закономерностей, которым они подчиняются.
4. Построение математической модели – это абстракция реального явления, контролируемая так, чтобы анализ ее давал возможность проникнуть в сущность явления. Математическая модель устанавливает соотношение между совокупностью переменных и параметрами управления явлением.

В результате 3 и 4 этапов формируется математическая задача.

5. Исследование влияния переменных на значение целевой функции.
6. Сопоставление результатов вычислений с моделируемым объектом, т. е. экспертная проверка результатов. На этом этапе устанавливается степень адекватности модели и моделируемого объекта в пределах точности исходной информации. Возможны 2 случая: результаты сопоставления не удовлетворительные, следовательно уточняется входная информация о моделируемом объекте и постановка задачи, уточняется или заново строится математическая модель. Задача решается снова и результаты сопоставляются с практическими или экспериментальными данными.

Когда используют моделирование:

1. Оригинал не существует
 - Установка для реализации нового процесса выплавки металла или процесса ОМД.
 - Новое изделие для поставки на рынок.
2. Исследование оригинала опасно для жизни или дорого:
 - Управление электропечью в непосредственной близости от неё.
 - Испытание нового режима прокатки на стане 5000.
 - Испытание нового процесса (и комплекта инструмента) штамповки железнодорожных колес.
3. Оригинал сложно исследовать непосредственно:

- Положение границы между жидкой и твердой фазами при разливке на МНЛЗ (определение «металлургической длины»).
 - Процессы в дуговой электропечи или в кристаллизаторе.
 - Процессы упрочнения и разупрочнения при горячей или холодной прокатке, при термообработке.
 - Процессы формирования структуры при сварке в шве и в околошовной зоне (ЗТВ).
4. Интересуют только некоторые свойства оригинала:
- Адгезия покрытия к поверхности трубы.
 - Пористость металла шва.
 - Уровень и зона максимальных эквивалентных напряжений в теле опорного валка стана 5000.
 - Величина упругого смещения контактной поверхности рабочего валка при его работе.

1.3 Цели моделирования

Исследование оригинала:

- изучение сущности объекта или явления, зависимости его поведения от многих условий

Анализ («что будет, если ...»)

- научиться прогнозировать последствия различных воздействий на оригинал

Синтез («как сделать, чтобы ...»)

- научиться управлять оригиналом, оказывая на него воздействия

Оптимизация («как сделать лучше»)

- выбор наилучшего решения в заданных условиях, поиск оптимальной конструкции детали машины, узла, агрегата.

1.4 Виды моделей

- **материальные (физические, предметные) модели:**
 - **информационные модели** представляют собой информацию о свойствах и состоянии объекта, процесса, явления, и его взаимосвязи с внешним миром:
 - **вербальные** – словесные или мысленные.
 - **знаковые** – выраженные с помощью формального языка.

- **графические** (рисунки, схемы, карты, ...).
- **табличные**.
- **математические** (формулы).
- **логические** (различные варианты выбора действий на основе анализа условий).
- **специальные** (ноты, химические формулы).
- **учебные** (в т. ч. тренажеры).
- **опытные** – при создании новых технических средств.
- **научно-технические**.

Свойства моделей. Основные требования к математическим моделям - требования адекватности, универсальности и эффективности.

Адекватность. Модель считается адекватной, если она отражает заданные свойства с приемлемой точностью. Точность определяется как степень согласования между значениями выходных параметров модели и объекта. Точность модели варьируется при различных условиях эксплуатации объекта. Эти условия характеризуются внешними параметрами. В пространстве внешних параметров выберите область адекватности модели, где погрешность меньше указанной предельно допустимой погрешности. Определение диапазона адекватности моделей – сложная процедура, требующая больших вычислительных затрат, которые быстро растут с увеличением размерности пространства внешних параметров. Эта задача по объёму может значительно превосходить задачу параметрической оптимизации самой модели, а потому не может быть решена для вновь проектируемых объектов.

Универсальность. Определяется в основном количеством и составом внешних и выходных параметров, учитываемых в модели.

Экономичность. Модель характеризуется стоимостью вычислительных ресурсов для её реализации - стоимостью компьютерного времени и памяти.

Простота. Модель, в которой желаемый результат достигается в одно и то же время с одинаковой точностью с учётом меньшего количества факторов при вычислении, называется простой.

Предсказуемость. Возможность получения новых знаний об исследуемом объекте посредством использования модели.

1.5 Классификация математических моделей

Все математические модели (рисунок 1.3), согласно используемому формальному языку, можно разделить на аналитические и ими-

тационные. *Аналитические* – модели, использующие стандартный математический язык. *Имитационные* модели – модели, использующие специальный язык моделирования или универсальный язык программирования. *Аналитические* модели можно записать в виде формул или уравнений. Если процесс не может быть описан в виде аналитической модели, он описывается с помощью специального алгоритма или программы. Эта модель является *имитационной*. *Аналитические* модели, в свою очередь, делятся на *теоретические* и *эмпирические* модели. Теоретические модели отражают реальные структуры и процессы в исследуемых объектах, то есть основаны на теории их работы [50]. Эмпирические модели построены на основе изучения реакций объекта на изменения условий окружающей среды. При этом теория работы объекта не рассматривается; сам объект представляет собой так называемый «чёрный ящик», а модель - некую интерполяционную зависимость. *Эмпирические* модели могут быть построены на основе экспериментальных данных. Эти данные получают непосредственно из исследуемых объектов или с помощью их физических моделей.



Рис. 1.3. Классификация математических моделей

По форме описания аналитические модели делятся на *линейные* и *нелинейные*. Если все входящие в модель величины не зависят от времени, то у нас есть статическая модель объекта или процесса, иначе получаем динамическую модель.

В *детерминированных* моделях все отношения, переменные и константы задаются точно, что приводит к однозначному определению результирующей функции. Если некоторые или все параметры, включенные в модель, являются случайными переменными или случайными функциями по своей природе, то модель классифицируется как *стохастическая* модель.

Если аналитическое исследование может быть завершено, модели называются *аналитически разрешимыми*. В противном случае мы говорим о численно разрешимых аналитических моделях.

1.6 Формы представления модели

Среди форм представления моделей можно выделить следующие:

- инвариантная – запись соотношений модели с помощью традиционного математического языка безотносительно к методу решения уравнений модели;
- аналитическая – запись модели в виде результата аналитического решения исходных уравнений модели;
- алгоритмическая – запись соотношений модели и выбранного численного метода решения в форме алгоритма;
- схемная (графическая) – представление модели на некотором графическом языке (например, язык графов, эквивалентные схемы, диаграммы и т. п.);
- физическая – представление моделей как уменьшенных копий реальных аппаратов и технологических процессов;
- аналоговая – модели, основанные на подобии явлений, имеющих различную физическую природу, но описываемых одинаковыми математическими уравнениями.

1.7 Нелинейность математических моделей

Простота моделей во многом связана с их линейностью. С точки зрения математики это соответствует принципу суперпозиции, при котором любая линейная комбинация решений в свою очередь тоже

есть решение искомой задачи. Пользуясь принципом суперпозиции, можно, найдя решение в каком-либо частном случае, построить решение в более общей ситуации. В этой связи о закономерностях общего случая делается вывод на основе свойств частного. Для линейных моделей отклик объекта на изменение каких-то условий пропорционален величине этого изменения [16].

В случае отсутствия выполнения принципа суперпозиции для математических моделей знание о поведении части объекта нелинейного явления не дает информации о поведении всего объекта в целом. Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей не линейны. Линейные модели являются неким приближением реального объекта и решают лишь частные случаи. Так, нелинейными становятся модели популяций при учете ограничения доступных ресурсов

По принадлежности модели к иерархическому уровню описания объекта. Иерархический уровень включает:

- микроуровень (типичными процессами являются массообменные, теплофизические, гидродинамические), моделирование осуществляется в целях синтеза технологического процесса для отдельного или нескольких агрегатов;
- макроуровень – моделирование процессов, имеющих более высокий уровень агрегации; модели применяют для синтеза текущего управления технологическим процессом для одного агрегата или технологического комплекса в целом;
- метауровень – моделирование процессов в совокупности агрегатов и связывающих их материально-энергетических потоков; такие модели служат для синтеза технологического комплекса как единого целого, то есть для синтеза управления развитием.

1.8 Этапы построения математической модели

Построение математических моделей является достаточно трудным процессом, включающим большие затраты материальных и временных ресурсов, а также предполагает необходимость в специалистах высокого уровня с компетенциями как в предметной области, так и в таких областях, как прикладная математика, численные методы, программирование, современные вычислительные системы [14].

Среди этапов процесса построения моделей можно выделить следующие:

1. Обследование объекта моделирования и формулировка технического задания на разработку модели. Конструирование модели начинается со словесно-смыслового описания объекта или явления. Данная стадия содержит сведения общего характера о природе объекта, информацию о целях его исследования и некоторые предположения. Данный этап можно также назвать формулировкой предмодели. Цель этапа – разработка содержательной постановки задачи моделирования, т. е. создание совокупности вопросов об объекте моделирования, записанных в словесной форме.

2. Концептуальная и математическая постановка задачи. На этом этапе происходит завершение идеализации объекта, отбрасываются несущественные факторы и эффекты. Цель концептуальной постановки задачи заключается в формулировке основных вопросов и наборе гипотез касательно свойств и поведения объекта моделирования в терминологии специальных дисциплин. В итоге предположения описываются математически для количественного анализа их выполнения. На этапе составления математического описания предварительно выделяют основные явления и элементы в объекте и затем устанавливают связи между ними. Далее для каждого выделенного элемента и явления записывают уравнение, отражающее его функционирование. Кроме того, в математическое описание включают уравнения связи между различными выделенными явлениями. В зависимости от процесса математическое описание может быть представлено в виде системы алгебраических, дифференциальных уравнений. Процесс получения совокупности математических уравнений, однозначно описывающих объект моделирования, называется математической постановкой задачи моделирования.

3. Качественный анализ и проверка корректности модели. Для контроля правильности полученной системы математических соотношений требуется проведение ряда обязательных проверок:

- контроль размерности;
- контроль порядков;
- контроль характера зависимостей;
- контроль экстремальных ситуаций;
- контроль граничных условий;
- контроль физического смысла;
- контроль математической замкнутости.

Понятие «корректность модели» очень важно, особенно в прикладной математике, поскольку невозможно применение численных

методов к некорректно поставленным задачам. Установить корректность математической задачи является сложной задачей. Для обеспечения корректности математической модели должны быть выполнены все контрольные проверки.

На этом этап построения математической модели заканчивается и далее следует «вычислительный эксперимент».

1.9 Выбор и обоснование выбора методов решения задачи.

Созданная модель исследуется любыми возможными методами, в том числе с взаимной проверкой. Поскольку не все модели решаются теоретически, в последнее время широко используются вычислительные методы. Данное обстоятельство важно при анализе нелинейных объектов, поскольку качественное поведение таких объектов неизвестно. В зависимости от метода решения задачи все методы подразделяются на:

- аналитические. Данные методы являются подходящими для анализа результатов, однако они применимы только для относительно простых моделей. При наличии аналитического решения задачи численное решение практически не применяется;
- алгоритмические. Для алгоритмических методов реализуется вычислительный эксперимент с использованием компьютера.

Этап выбора метода решения и разработки моделирующей программы подразумевает выбор наиболее эффективного (по скорости получения решения и его наибольшей точности) метода решения из имеющихся методов, реализацию его в форме алгоритма решения.

2. ОСНОВЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ В МЕТАЛЛУРГИИ. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В настоящее время метод конечных элементов (МКЭ) является одним из наиболее популярных методов решения краевых задач в САПР. В математическом плане метод относится к группе вариационно-разностных. Строгое доказательство таких важных свойств как устойчивость, сходимость и точность метода осуществляется в соответствующих разделах математики и часто является сложной задачей [50].

С точки зрения математики метод конечных элементов является численным методом решения дифференциальных уравнений, найденных в физике и технике. Дифференциальные уравнения используются для математического описания различных процессов, происходящих в сплошных средах, например: теплопроводности, распределения электромагнитных и акустических полей, движений жидкости и плазмы, перемещений и сил деформируемых тел и многих др [55].

Область применения МКЭ достаточно широка: авиация, автомобилестроение, судостроение, подвижной состав железных дорог, стальные и железобетонные мосты; каркасы зданий; исследование влияния землетрясений на плотины и плотины; механика горных пород; механика пластичности и разрушения конструкционных материалов; динамика обводненных конструкций: композиционные материалы; вязкие, дозвуковые и сверхзвуковые течения; звуковое расположение; акустические системы; электромагнитные поля; магнитные системы; газоплазменная динамика; течения в ядерных реакторах; движение ледников; тектонические движения плит; потоки поверхностных и подземных вод; проектирование объектов хранения нефти и газа; биомеханика; распространение загрязнений в морских заливах; поверхностные волны; самовозгорание [54].

К основным достоинствам МКЭ можно отнести доступность и простоту ее понимания и применимость метода для задач с произвольной формой области решения, возможность создания высококачественных универсальных компьютерных программ на основе метода [5, 55].

Наиболее распространенными особенностями МКЭ являются следующие:

- 1) физическая область задачи разбита на подобласти или конечные элементы (рисунок 2.1);

2) зависимая переменная (одна или несколько) аппроксимируется функцией специального вида на каждом конечном элементе и, следовательно, на всей площади. Параметры этих приближений впоследствии становятся неизвестными параметрами задачи. В задачах структурной аппроксимационной механики поле перемещений точек конечного элемента или сил в них подчинено, а неизвестными параметрами являются узловые перемещения или узловые силы;

3) подстановка приближений в определяющие уравнения дает систему многих уравнений с неизвестными параметрами. Решая эти уравнения, определяют значения этих параметров и, соответственно, получают приближенное решение задачи.

Для двумерных областей достаточно часто применяются элементы в виде треугольников и четырехугольников. Кроме того, элементы могут иметь как прямые, так и изогнутые границы, что позволяет аппроксимировать границу любой формы с достаточной степенью точности.

Для трехмерных областей наиболее часто используются элементы в виде тетраэдра и параллелепипеда, которые также могут иметь прямолинейные и криволинейные границы.

При использовании МКЭ в виде метода перемещений в пределах конечного элемента строятся аппроксимирующие функции, формирующие кинематически приемлемые поля перемещений в пределах всей исследуемой области. Узловые смещения определяются на основе вариационного принципа Лагранжа, согласно которому из всех кинематически допустимых полей смещения реальным является поле смещения, удовлетворяющее условиям равновесия.

Вариационное уравнение Лагранжа имеет вид

$$\delta \mathcal{E} = \delta(\Pi - A) = 0, \quad (2.1)$$

где $\delta \mathcal{E}$ – полная потенциальная энергия упругой системы, которая складывается из потенциальной энергии деформации Π и потенциальной энергии внешних сил A ; δ – знак вариации – изменения функции при бесконечно малом изменении одного из аргументов.

Таким образом, для получения разрешающих уравнений МКЭ, необходимо иметь уравнение полной потенциальной энергии рассматриваемой упругой системы.

Общая потенциальная энергия системы определяется на основе известных соотношений теории упругости. Под действием объемных и поверхностных внешних сил отдельные точки конструкции получают перемещения, при

которых деформируются несущие элементы и в них возникают напряжения.

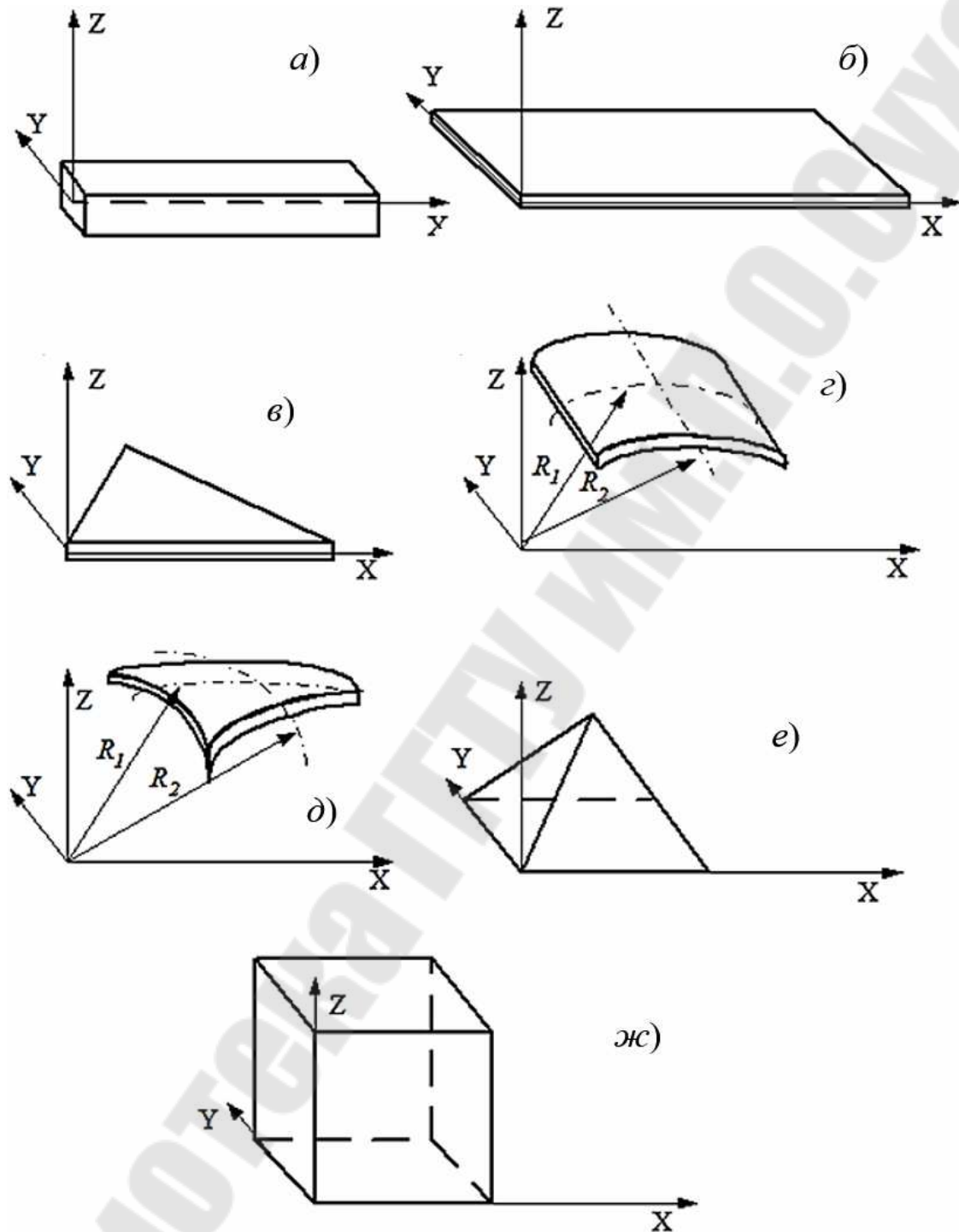


Рис. 1.4. Типы конечных элементов:

- a* – стержень; *б* – прямоугольная пластина;
- в* – треугольная пластина; *г* – четырехугольный элемент оболочки;
- д* – треугольный элемент оболочки; *е* – тетраэдр;
- ж* – параллелепипед

Перемещения, деформации, напряжения неодинаковы в различных точках конструкции и является функциями координат. Для удобства расчетов указанные величины, включая нагрузки, рассматриваются в проекциях на оси координат [4].

Введем следующие обозначения:

а) матрица – столбец объемных сил:

$$\bar{G} = \begin{vmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

где G_x, G_y, G_z – проекции объёмных сил на соответствующие декартовы оси координат, в которых располагается рассматриваемая конструкция;

б) матрица – столбец поверхностных сил:

$$\bar{Q} = \begin{vmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

где Q_x, Q_y, Q_z – аналогично предыдущей проекции поверхностных сил;

в) матрица – столбец перемещений:

$$\bar{U} = \begin{vmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

где $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$ – проекции перемещений точек на оси координат X, Y, Z . Эти проекции являются функциями, аргументами которых служат координаты x, y и z ;

г) матрица – столбец деформаций:

$$\bar{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_x(x, y, z) \\ \xi_y(x, y, z) \\ \xi_z(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \\ \gamma_{yz}(x, y, z) \\ \gamma_{zx}(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где $\xi_x(x, y, z), \xi_y(x, y, z), \xi_z(x, y, z)$ – проекции линейных деформаций, а $\gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{zx}(x, y, z)$ – проекции угловых деформаций;
 д) матрица – столбец напряжений:

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \sigma_z(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \\ \tau_{yz}(x, y, z) \\ \tau_{zx}(x, y, z) \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

где $\sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z)$ – проекции нормальных напряжений, а $\tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z)$ – касательных.

Между деформациями и перемещениями существует дифференциальная зависимость, выражаемая уравнениями Коши:

$$\bar{\xi} = [d]\bar{U}, \quad (2.7)$$

где $[d]$ – дифференциальный матричный оператор вида

$$[d] = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

В результате матричной операции $[d]\bar{U}$ получается матрица, элементами которой являются частные производные.

Между напряжениями и деформациями также имеется линейная зависимость (при работе материала конструкции в пределах закона Гука). В матричной форме эта зависимость имеет вид

$$\bar{\sigma} = [E_{\xi}]\bar{\xi}, \quad (2.8)$$

где $[E_{\xi}]$ – матрица упругости вида

$$[E_{\xi}] = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)} \begin{vmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{vmatrix},$$

где E – модуль упругости материала; ν – коэффициент Пуассона.

Потенциальная энергия деформации, численно равная работе внутренних сил, определяется из следующих выражений:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma}^T \bar{\xi} dv = \frac{1}{2} \int_V ([E_\xi] \bar{\xi})^T \bar{\xi} dv = \frac{1}{2} \int_V \bar{\xi}^T [E_\xi] \bar{\xi} dv. \quad (2.9)$$

где T – знак транспонирования – замены столбцов матрицы строками путем их поворота против часовой стрелки:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V ([d]\bar{U})^T [E_\xi] ([d]\bar{U}) dv. \quad (2.10)$$

В выражениях (2.7)–(2.9) интеграл берётся по объёму V .

Потенциальная энергия внешних сил, численно равная работе этих сил на перемещениях $U(x, y, z)$

$$A = \frac{1}{2} \left(\int_V G^T \bar{U} dv + \int_S Q^T \bar{U} ds \right) \quad (2.11)$$

В выражении второй интеграл берётся по поверхности тела S .

Полная потенциальная энергия всей конструкции равна сумме работ внешних и внутренних сил

$$\Xi = \Pi - A = \frac{1}{2} \left\{ \int_V ([d]\bar{U})^T [E_\xi] ([d]\bar{U}) dv - \left(\int_V G^T \bar{U} dv + \int_S Q^T \bar{U} ds \right) \right\}. \quad (2.12)$$

При определении полной потенциальной энергии конечного элемента задаются законом изменения перемещений $F_{ik}(x, y, z)$, позволяющим выразить перемещения любой точки через перемещения узлов и функцию координат. В матричной форме для i -го конечного элемента.

$$\bar{U}_i = [F_j(x, y, z)]_i \bar{q}_i, \quad (2.13)$$

где $\bar{q}_i^T = |q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \dots \quad q_j \dots \quad q_n|$ – транспонированная матрица – столбец узловых перемещений i -того конечного элемента; j – номер узлового перемещения; n – количество степеней свободы (узловых перемещений) конечного элемента;

$$[F_j(x, y, z)]_i = \begin{vmatrix} Y_{x1} & 0 & 0 & \dots & Y_{xn} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{y1} & 0 & \dots & 0 & Y_{yn} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{z1} & \dots & 0 & 0 & Y_{zn} \end{vmatrix} - \text{матрица функций}$$

форм конечного элемента.

Обычно функции формы принимают кусочно-полиномиальными, отличными от нуля в окрестности только одного узла.

С учётом выражения (2.13) полная потенциальная энергия конечного элемента:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = & \frac{1}{2} \left[\int_{V_i} ([d][F_j(x, y, z)]_i \bar{q}_i)^T [E_\xi][d][F_j(x, y, z)]_i \bar{q}_i dv - \right. \\ & \left. - \left(\int_{V_i} G^T [F_j(x, y, z)]_i \bar{q}_i dv + \int_{S_i} Q^T [F_j(x, y, z)] \bar{q}_i ds \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Учитывая, что \bar{q}_i не зависит от координат, этот вектор можно вынести за знак интеграла. Выражение (2.14) при этом преобразуется к виду

$$\mathfrak{E}_i = \frac{1}{2} (\bar{q}_i^T [K]_i \bar{q}_i - \bar{P}_i \bar{q}_i), \quad (2.15)$$

где $[K]_i = \int_{V_i} ([d][F_j(x, y, z)]_i)^T [E_\xi][d][F_j(x, y, z)]_i dv$ – матрица жёсткости i -го конечного элемента (КЭ). Она определяет жёсткостные свойства КЭ; $\bar{P}_i = \int_{V_i} G^T [F_j(x, y, z)]_i dv + \int_{S_i} Q^T [F_j(x, y, z)] ds$ – грузовой вектор i -го конечного элемента.

Полная потенциальная энергия рассматриваемой системы (конструкции), состоящей из N конечных элементов, равна сумме энергий конечных элементов:

$$\mathfrak{E} = \sum_{i=1}^N \mathfrak{E}_i = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \bar{q}_i^T [K]_i \bar{q}_i - \sum_{i=1}^N \bar{P}_i \bar{q}_i \right). \quad (2.16)$$

Продифференцировав полную энергию \mathcal{E} по узловым перемещениям q_j и используя принцип Лагранжа, получим:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^N [K]_i \bar{q}_i - \sum_{i=1}^N \bar{P}_i = 0. \quad (2.17)$$

Сумма $\sum_{i=1}^N [K]_i = [C_0]$ является общей матрицей жёсткости системы в целом. Как видно из приведённого выше выражения, она получается суммированием матриц жёсткости отдельных конечных элементов. Вектор-столбец $\bar{q} = \sum_{i=1}^N \bar{q}_i$ составлен из векторов, элементами которых являются неизвестные узловые перемещения. $\sum_{i=1}^N \bar{P}_i = \bar{P}$ – грузовой вектор, элементами которого являются значения внешней нагрузки, приведённой к узловой. Как и общая матрица жёсткости $[C_0]$, грузовой вектор \bar{P} получается суммированием грузовых векторов отдельных конечных элементов. С учётом принятых выше обозначений, можно записать в виде:

$$[C_0] \bar{q} - \bar{P} = 0. \quad (2.18)$$

Уравнение (2.18) является основным разрешающим уравнением МКЭ. С физической точки зрения оно описывает равновесие узлов системы, а с математической – систему обыкновенных алгебраических уравнений. В приведённом виде (2.18) представляет собой тождество, так как не учтены условия закрепления конструкции. Чтобы получить единственное решение отличное от нуля, необходимо учесть связи, наложенные на систему. Эта процедура выполняется вычёркиванием строк и столбцов в матрицах уравнения (2.18), которые соответствуют перемещениям, запрещённым связями. После этого матрицы «сжимаются» и производится решение уравнения (2.18).

Решение системы алгебраических уравнений производится методами линейной алгебры. Наиболее распространённым является метод Гаусса [53].

После решения уравнения (2.18) и определения ранее неизвест-

ных перемещений производится формирование векторов узловых перемещений для каждого конечного элемента. При выполнении этой операции учитываются связи, наложенные на рассматриваемую систему. Далее определяются узловые усилия:

$$\bar{R}_i = [K]_i \bar{q}_i - \bar{P}_i. \quad (2.19)$$

По найденным узловым усилиям и приложенным внешним нагрузкам строятся эпюры внутренних усилий (изгибающих и крутящих моментов, нормальных и поперечных усилий). Далее в наиболее опасных сечениях по формулам сопромата находятся напряжения.

Следует отметить, что изложенное выше отражает сущность МКЭ в самой общей форме.

Приведем пример использования МКЭ для расчета одномерного температурного поля в однородном стержне. Пусть имеется стержень длиной L и площадью поперечного сечения S (рисунок 2.2). Один конец стержня жестко закреплен, и к нему подводится тепловой поток q заданной интенсивности. На свободном конце стержня происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Известны коэффициент теплообмена α и температура окружающей среды T^* . Вдоль боковой поверхности стержень теплоизолирован.

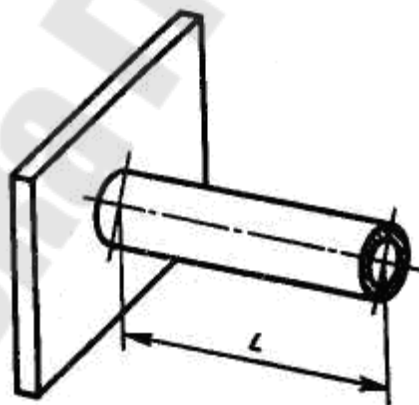


Рис. 1.5. Однородный стержень, находящийся под воздействием теплового потока

Температурное поле в стержне описывается уравнением теплопроводности, которое в одномерном приближении имеет вид

$$\lambda_x \frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (2.20)$$

Краевые условия определяются уравнениями:

$$\lambda_x \frac{dT}{dx} + q = 0 \text{ при } x = 0; \quad (2.21)$$

$$\lambda_x \frac{dT}{dx} + \alpha(T - T_*) = 0 \text{ при } x = L. \quad (2.22)$$

Искомое температурное поле является непрерывной функцией координаты x (рисунок 2.3, а).

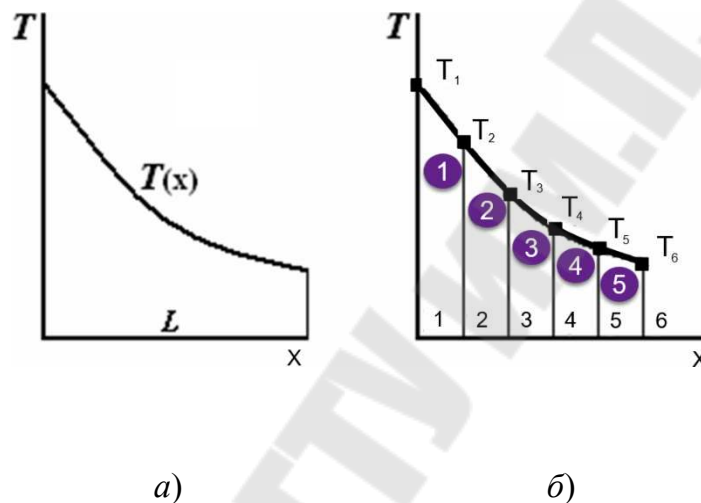


Рис. 1.6. Расчёт одномерного температурного поля в однородном стержне методом МКЭ

В МКЭ стержень разбивается произвольным образом на конечные элементы, которые в данном случае являются отрезками неравной длины. На каждом элементе непрерывная функция $T(x)$ аппроксимируется некоторой линейной зависимостью, как показано на рисунке 2.3, б (в скобках указаны номера элементов). Аппроксимирующая кусочно-линейная функция определяется через узловые значения T_1-T_6 , которые в общем случае сначала неизвестны и подлежат определению в МКЭ.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырёх этапов:

Этап 1. Выделение конечных элементов (разбиение заданной области на конечные элементы (см. рисунок 2.4)).

Этап 2. Определение аппроксимирующей функции для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции $\varphi^{(e)}$ в произвольной точке e -го конечного эле-

мента аппроксимируется полиномом $\varphi^{(e)} = A^{(e)}R + A_0$, где $A^{(e)}$ – вектор-строка коэффициентов полинома; A_0 – свободный член; $R = (x, y, z)$ – вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа заключается в определении неизвестного вектора $A^{(e)}$ и свободного члена A_0 . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через вектор $\Phi^{(e)}$ узловых значений функции и координаты узлов и, проделав эквивалентные преобразования, получают:

$$\varphi^{(e)} = N^{(e)}\Phi^{(e)}; \quad (2.23)$$

где $N^{(e)}$ – матрица-строка, элементы которой называют функциями формы конечного элемента.

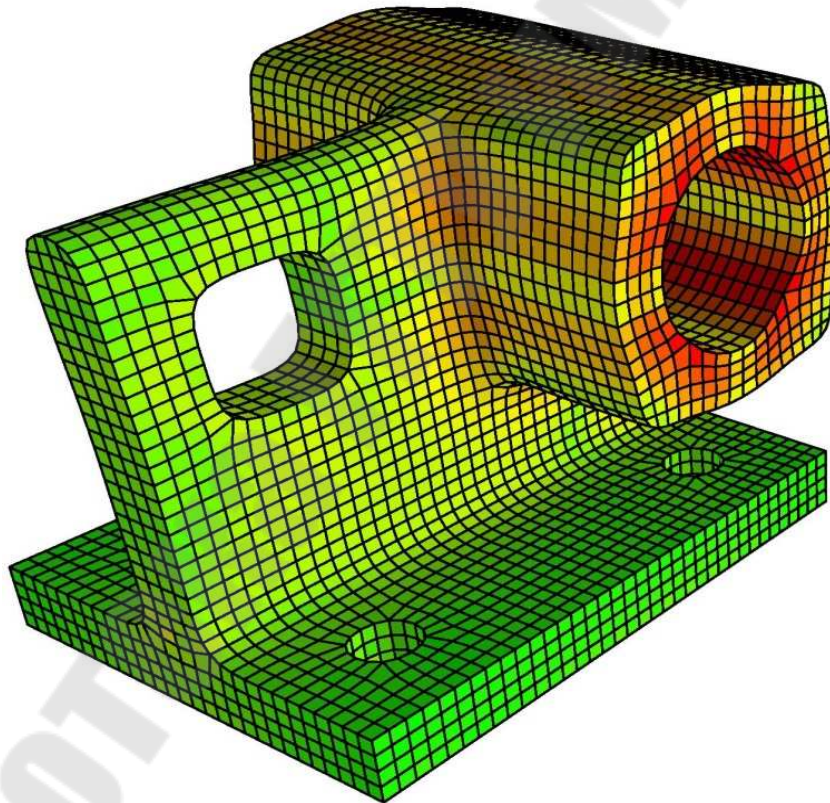


Рис. 1.7. Пример качественного объемного разбиения сложной детали на сглаженные кубические элементы

Функции формы легко вычисляются в каждой точке конечного элемента через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

Этап 3. Объединение конечных элементов в ансамбль. На этом этапе уравнения (2.23), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль, т. е. в систему алгебраических уравнений:

$$\varphi = N\Phi. \quad (2.24)$$

Система (2.24) является моделью искомой непрерывной функции.

Этап 4. Определение вектора узловых значений функции. В общем случае вектор Φ в начале неизвестен. Его определение – наиболее сложная процедура в МКЭ.

Разработано несколько алгоритмов вычисления вектора Φ . Один из алгоритмов основан на минимизации функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи, он состоит из четырех этапов.

Найденные значения вектора Φ подставляют в (2.23), после чего значение функции φ легко вычисляется в любой точке заданной области.

Рассмотрим подробно этапы алгоритма МКЭ.

Этап 1: выделение конечных элементов. Разделение области на элементы является важным этапом в МКЭ. Точность результатов во многом зависит от качества разбиения. Например, разбиение на двумерные элементы, близкие по форме к равносторонним треугольникам, даёт лучшие результаты, чем разбиение на удлинённые треугольные элементы. Возможность лёгкого изменения размеров элементов (пример, сгущения сетки локально, для повышения точности) является важным свойством МКЭ [53].

Деление области на элементы обычно начинают с её границы, чтобы максимально приблизить форму, затем разбивают внутренние области. Площадь часто делится на элементы в несколько этапов. В-первых, область разбивается на достаточно большие подобласти (подконструкции), на границах которых изменяются свойства материала, геометрия, приложенная нагрузка и тому подобное. Затем каждый поддомен разбивается на элементы. При этом желательно избегать резких изменений размеров конечных элементов на границах подобластей. На рисунок 2.5. приведён пример разбиения двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами.

Нумерация узлов элементов (глобальная нумерация узлов) – это следующая процедура этапа выбора конечных элементов. Порядок нумерации в этом случае имеет важное значение, поскольку он влияет на эффективность последующих вычислений.

Матрица коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений, к которой приводит МКЭ, является сильно разреженной матрицей ленточной структуры. Ненулевые элементы такой матрицы параллельны главной диагонали (рисунок 2.5).

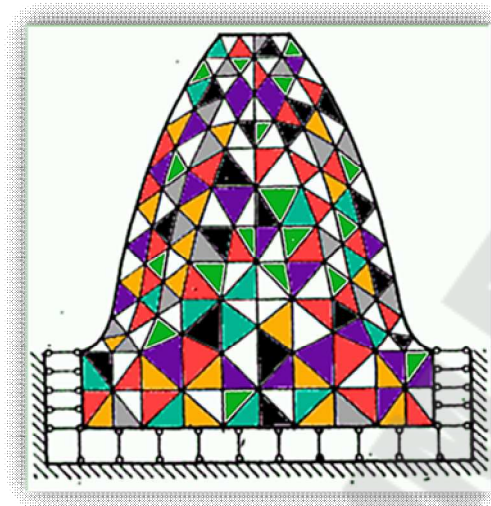


Рис. 1.8. Разбиение двумерной области произвольной формы на треугольные конечные элементы с криволинейными границами

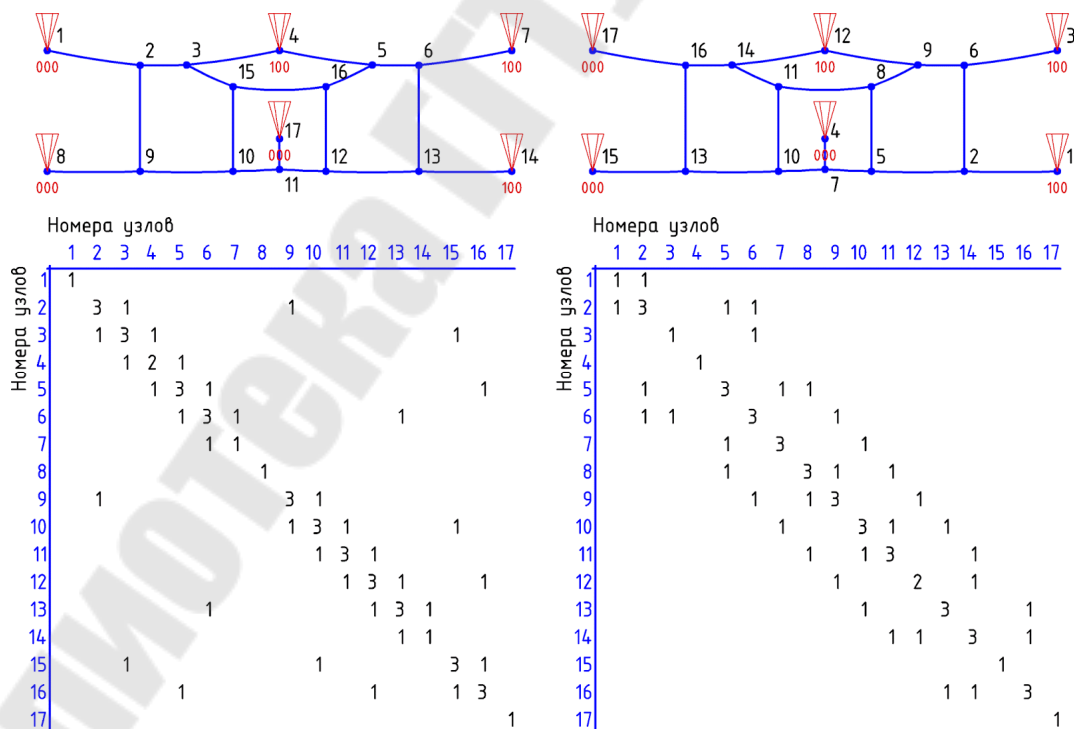


Рис. 1.9. Матрица ленточной структуры

Целое число L , представляющее наибольшую разницу между

количеством ненулевых элементов в строке, называется шириной полосы. Чем меньше ширина полосы, тем меньше оперативной памяти требуется для хранения матрицы при реализации МКЭ в САПР и тем меньше компьютерного времени тратится на решение полученной системы уравнений. Ширина полосы, в свою очередь, зависит от количества степеней свободы узлов и способа их нумерации. Количество степеней свободы — это количество неизвестных функций, найденных в каждом узле. Например, для двумерных гидравлических задач в каждом узле определяются три величины: составляющие давления и скорости по осям X и Y .

При нумерации узлов предпочтителен метод, обеспечивающий минимальную разницу между номерами узлов в каждом отдельном элементе. Если максимальную разность между номерами узлов для отдельного элемента обозначить N , а число степеней свободы — M , то ширина полосы $L = (N + 1)M$.

В некоторых случаях уменьшение числа N может быть достигнуто последовательной нумерацией узлов при движении в направлении наименьшего размера рассматриваемой области.

На рисунке 2.7 приведены два различных способа нумерации узлов произвольной области, разбитой на конечные элементы. При первом способе (рисунок 2.7, а) $N = 14$, при втором (рисунок 2.7, б) $N = 5$. Ширина полосы для представленных способов при одной степени свободы в узле получается равной, соответственно, 15 и 6; при двух степенях свободы — 30 и 12. Рациональная нумерация в случае на рисунке 2.7, б сокращает необходимый объем оперативной памяти почти в три раза по сравнению со случаем на рисунок 2.7, а.

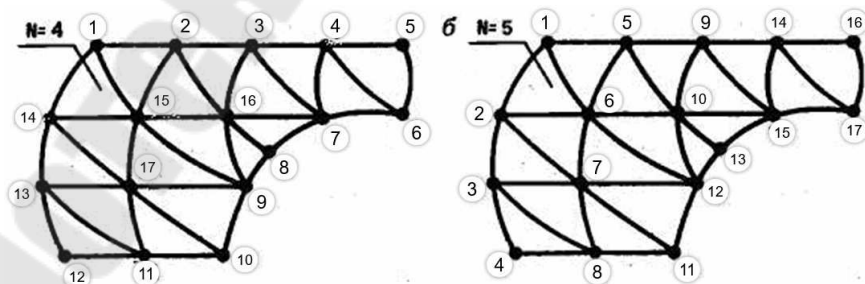


Рис. 1.10. Способы нумерации узлов при разбиении двумерной области на конечные элементы

Информация о способе разбиения поверхности на конечные элементы и нумерации узлов является исходной для всех последую-

щих этапов алгоритмов МКЭ. При этом необходимо указать не только номер, но и координаты каждого узла и его связь с определёнными конечными элементами. Этот тип информации называется топологическим и обычно содержит в 6 раз больше чисел, чем количество узлов в системе.

При описании области, разделённой на конечные элементы, указываются: тип конечного элемента; его порядковый номер; номера узлов элементов; координаты узлов, информация о соединении элементов друг с другом; значение физических параметров объекта в пределах каждого конечного элемента. Практическая работа программ долгое время сдерживалась сложностью обработки исходных данных, объем которых иногда достигает нескольких сотен тысяч.

Усилия разработчиков программ МКЭ в рамках САПР были направлены на создание подсистем автоматизированной обработки топологической информации, в основе которых лежат специальные программы, так называемые препроцессоры. Препроцессоры либо включаются напрямую, либо интегрируются в программные комплексы, реализующие МКЭ; или существуют как отдельные программы.

Этап 2: определение аппроксимирующей функции элементов. Эту процедуру можно выполнить один раз для типичного элемента области без учёта его топологического положения в ней. Полученная функция затем используется для всех других элементов поверхности того же вида. Эта функция является важным аспектом МКЭ. В результате элементы с однажды определёнными функциями просто включаются в библиотеку элементов соответствующего программного пакета. Кроме того, эти элементы используются для решения различных краевых задач.

Полиномы чаще всего используются в качестве аппроксимационных функций элементов. Конечные элементы делятся на симплексные, комплексные и мультиплексные элементы в зависимости от степени многочлена. Многочлены симплексных элементов содержат константы и линейные члены; Многочлены комплексных элементов - константы, линейные члены и члены высших степеней. Сложные элементы обычно имеют дополнительные внутренние узлы в дополнение к граничным элементам. Многочлены мультиплексных элементов также содержат члены более высоких степеней. На элементы мультиплекса накладывается дополнительное условие: их границы должны быть параллельны осям координат.

Одномерный симплекс-элемент представляет собой отрезок (рис. 2.8).

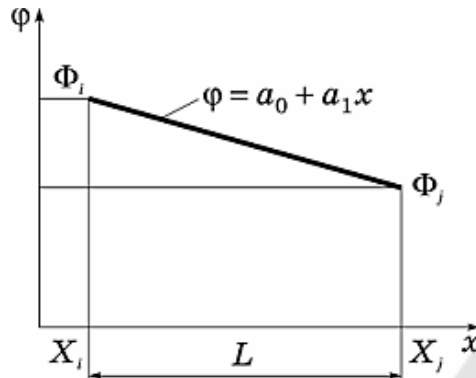


Рис. 1.11. Одномерный симплекс-элемент

При определении функции этого элемента для простоты будем считать, что известны узловые значения искомой непрерывной функции, определенные на концах отрезка. По длине отрезка значение функции φ аппроксимируется полиномом

$$\varphi = a_1 + a_2x. \quad (2.25)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются через узловые значения функции Φ_i и Φ_j в соответствии с условием непрерывности:

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi_i \text{ при } x = X_i; \\ \varphi &= \Phi_j \text{ при } x = X_j. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Подставив (2.25) в (2.26), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= a_1 + a_2X_i; \\ \Phi_j &= a_1 + a_2X_j, \end{aligned}$$

решая, которую определим a_1 и a_2 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \Phi_i - a_2X_i; & L &= X_j - X_i; \\ \Phi_j &= \Phi_i - a_2X_i + a_2X_j; & a_2 &= \frac{\Phi_j - \Phi_i}{X_j - X_i} = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L + X_i - X_i} = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \Phi_i - \left(\frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) X_i = \frac{\Phi_i L - (\Phi_j - \Phi_i) X_i}{L} = \\
 &= \frac{\Phi_i (X_j - X_i) - (\Phi_j - \Phi_i) X_i}{L} = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L}, \\
 \text{т. е. } a_1 &= \frac{(\Phi_i X_j - \Phi_j X_i)}{L}; \quad a_2 = \frac{(\Phi_j - \Phi_i)}{L}.
 \end{aligned}$$

Подставив вычисленные значения коэффициентов аппроксимирующего полинома в (2.25), получим:

$$\varphi = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L} + \left(\frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) x.$$

Проведём эквивалентные преобразования правой части:

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L} + \left(\frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) x = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i + \Phi_j x - \Phi_i x}{L} = \\
 &= \Phi_i \frac{X_j - x}{L} + \Phi_j \frac{x - X_i}{L}.
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Члены полученного уравнения, заключённые в скобки, являются функциями формы одномерного симплекс-элемента:

$$\begin{aligned}
 N_i &= \frac{(X_j - x)}{L} \\
 N_j &= \frac{(x - X_i)}{L};
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

С учётом обозначений (2.26) уравнение (2.27) принимает вид

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j, \tag{2.29}$$

или в матричной форме:

$$\varphi = N\Phi, \quad (2.30)$$

где $N = [N_i, N_j]$ – матрица-строка; $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix}$ – вектор-столбец.

Функция формы обладает следующим свойством: функция формы с номером i равна 1 в узле с соответствующим номером и равна 0 во всех других узлах.

Этап 3: объединение конечных элементов в ансамбль. Основу этого этапа составляет замена произвольно назначенных выше номеров узлов i, j, k на номера, присвоенные узлам в процессе разбиения рассматриваемой области. Эта процедура приводит к системе линейных алгебраических уравнений, позволяющей при известных узловых значениях искомой функции получить значение этой функции в любой точке области.

Рассмотрим процедуру составления ансамбля конечных элементов для сформулированной выше задачи нахождения поля температур в стержне (рисунок 2.7, а). Кусочно-элементная модель области приведена на рисунке 2.7, б, а функция отдельного элемента определяется уравнением (2.28).

Можно написать следующее соответствие между произвольными номерами i, j , фигурирующими в уравнении (2.30), и глобальными номерами узлов рассматриваемой дискретной модели

$$\text{– элемента 1: } i=1, j=2; \quad (2.31, \text{ а});$$

$$\text{– элемента 2: } i=2, j=3; \quad (2.31, \text{ б});$$

$$\text{– элемента 3: } i=3, j=4; \quad (2.31, \text{ в});$$

$$\text{– элемента 4: } i=4, j=5; \quad (2.31, \text{ г});$$

$$\text{– элемента 5: } i=5, j=6. \quad (2.31, \text{ д}).$$

Подставив значения номеров узлов, получим:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \\ \varphi^{(2)} &= N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3; \\ \varphi^{(3)} &= N_3^{(3)}T_3 + N_4^{(3)}T_4; \\ \varphi^{(4)} &= N_4^{(4)}T_4 + N_5^{(4)}T_5; \\ \varphi^{(5)} &= N_5^{(5)}T_5 + N_6^{(5)}T_6, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где верхние индексы в скобках относятся к номеру элемента.

В выражениях для функций формы элемента (2.32) значения произвольных номеров i, j также необходимо изменить в соответствии с (2.3). Тогда значения $N_3^{(2)}$, $N_3^{(3)}$, например, определяются по формулам:

$$N_3^{(2)} = \frac{(x - X_2)}{L^{(2)}};$$

$$N_3^{(3)} = \frac{(X_4 - x)}{L^{(3)}}.$$

Очевидно, что $N_3^{(2)}$ и $N_3^{(3)}$ не равны друг другу даже в случае равенства длин элементов $L^{(2)}$ и $L^{(3)}$. При известных значениях узловых величин T_1-T_6 уравнения (2.32) позволяют определить значение температуры в любой точке стержня.

Расширенная форма описания моделей имеет некоторые преимущества при реализации следующих этапов алгоритма МКЭ.

Этап IV. Определение вектора узловых значений функций. Для этой цели используется несколько методов.

Метод, основанный на вариационной постановке задачи, требует минимизации некоторого специально подобранного функционала, который связан с физическим смыслом задачи. Подбор функционала является нетривиальной процедурой, требующей глубоких знаний в конкретной предметной области.

Приведем пример минимизации функционала в задаче о нахождении распределения температуры в стержне (рисунок 2.9).

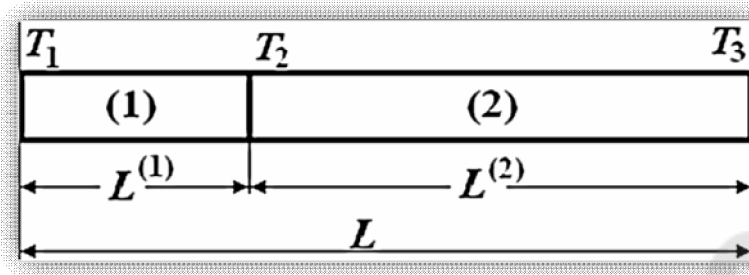
При указанном методе минимизируется функционал:

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_S [qT + 0,5\alpha (T - T_*)^2] dS, \quad (2.33)$$

где V – объем тела; S – площадь границы.

В функционал F входят оба граничных условия. При минимизации функционала используется множество функций элементов дискретизированной области. Для простоты вычислений будем считать,

что стержень разбит всего на два элемента (в практических случаях этого недостаточно) Тогда



$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; \quad T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3.$$

Рис. 1.12. Пример минимизации функционала при нахождении распределения температуры в стержне

Функционал (2.34) удобно представить в виде

$$F = \int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV + \int_{S_1} qT dS_1 + \int_{S_2} 0,5\alpha (T - T_*)^2 dS_2, \quad (2.33)$$

где S_1 и S_2 – площади сечений стержня, на которых заданы граничные условия.

Для вычисления объёмного интеграла в (2.33) его необходимо разбить на два слагаемых в соответствии с принятой конечной элементной моделью:

$$\int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV = \int_{V_1} 0,5\lambda_x \left(\frac{dT^{(1)}}{dx} \right)^2 dV_1 + \int_{V_2} 0,5\lambda_x \left(\frac{dT^{(2)}}{dx} \right)^2 dV_2. \quad (2.35)$$

Производные вычисляются с учетом (2.32) и (2.26)

$$\begin{aligned} \frac{dT^{(1)}}{dx} &= \frac{(-T_1 + T_2)}{L^{(1)}}, \\ \frac{dT^{(2)}}{dx} &= \frac{(-T_2 + T_3)}{L^{(2)}}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Подставив (2.36) в (2.35) и считая, что $dV^{(e)} = S^{(e)}dx$ получим:

$$\int_V 0,5\lambda_x \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dV = 0,5 \frac{\lambda_x^{(1)} S^{(1)}}{L^{(1)}} (-T_1 + T_2)^2 + 0,5 \frac{\lambda_x^{(2)} S^{(2)}}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3)^2.$$

Второе и третье слагаемые в (2.33) вычисляются просто, так как подынтегральным функциям соответствуют узловые значения T_1 и T_3 :

$$\int_{S_1} qT dS_1 = qT_1 S_1; \quad \int_{S_2} 0,5\alpha(T - T_*)^2 dS_2 = 0,5\alpha S_2 (T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2),$$

где S_1 и S_2 – площади поверхностей, на которых заданы q и α (для рассматриваемого примера $S_1 = S^{(1)}$ и $S_2 = S^{(2)}$).

Значение функционала F вычисляется простым суммированием последних трех выражений:

$$F = 0,5C^{(1)} (T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + 0,5C^{(2)} (T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + \quad (2.37)$$

$$+ qS_1T_1 + 0,5\alpha S_2 (T_3^2 - 2T_*T_3 + T_*^2),$$

$$\text{где } C^{(1)} = S^{(1)}\lambda_x^{(1)} / L^{(1)} \text{ и } C^{(2)} = S^{(2)}\lambda_x^{(2)} / L^{(2)}.$$

Для минимизации функционала F необходимо выполнение условий:

$$\begin{aligned} \partial F / \partial T_1 &= C^{(1)}T_1 + C^{(1)}T_2 + qS_1 = 0; \\ \partial F / \partial T_2 &= -C^{(1)}T_1 + [C^{(1)} + C^{(2)}]T_2 - C^{(2)}T_3 = 0; \\ \partial F / \partial T_3 &= -C^{(2)}T_2 + [C^{(2)} + \alpha S_2]T_3 - \alpha S_2 T_* = 0, \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & C^{(1)} + C^{(2)} & -C^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & C^{(2)} + \alpha S_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qS_1 \\ 0 \\ \alpha S_2 T_* \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Матрица коэффициентов K в (2.38) называется *матрицей жёсткости* (рис. 2.10), хотя по физическому смыслу данной задачи ее удобнее было бы назвать матрицей теплопроводности. Название матрицы K пришло из *строительной механики*, где МКЭ начал применяться раньше, чем в других областях техники.

Зная характеристики материала, из системы (2.38) можно определить узловые значения T_1-T_3 . Из (2.37) и (2.38) нетрудно заметить, что однотипные конечные элементы вносят в эти выражения слагаемые одного вида. Поэтому при реализации МКЭ в САПР вклад элемента определённого типа в матрицу жёсткости вычисляется только один раз, а затем используется во всех необходимых случаях.

При практическом применении метода конечных элементов следует иметь в виду проблемы, связанные с точностью расчёта и временем его проведения. Чем меньше размер конечных элементов, тем точнее расчёт. Если конечные элементы слишком велики, результат может быть в принципе неверным, несмотря на корректный ввод данных и корректную работу программы. К сожалению, нет возможности заранее предсказать размер конечных элементов, достаточный для получения требуемой точности расчёта. В большинстве случаев характер физики процесса и сложность геометрии модели позволяют ориентироваться на примеры решения подобных задач.

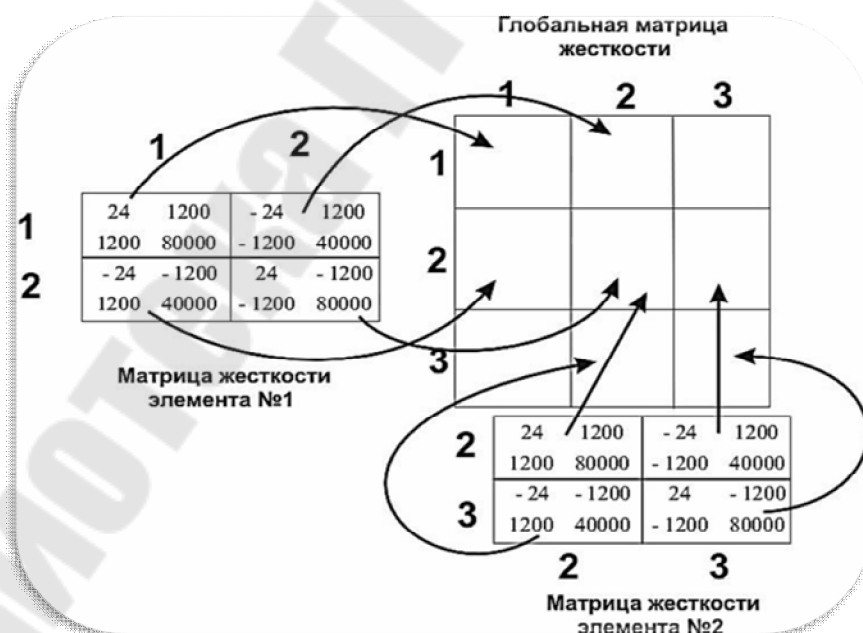


Рис. 1.13. К определению матрицы жёсткости

Правильность расчёта проверяют пересчётом с элементами,

уменьшенными на 20–30% по сравнению с конечноэлементным разложением в предыдущем расчёте. Если результаты этих двух расчётов отличаются менее чем на требуемую погрешность расчёта, можно считать, что расчёт проведён корректно в пределах требуемой погрешности. Если результаты этих расчётов больше отклоняются друг от друга, конечные элементы должны быть уменьшены ещё больше. Требуемое время вычислений и память компьютера пропорциональны квадрату числа узлов. Поэтому при уменьшении размера элементов (и, соответственно, увеличении количества элементов и узлов) может возникнуть ситуация, когда не хватает ресурсов компьютера или слишком долго идёт обработка результатов.

Возможные способы экономии времени и памяти для расчёта:

1. Использование неравномерного разбиения на конечные элементы. Элементов должно быть меньше в местах концентрации напряжений, приложения сосредоточенных сил, точечных фиксаций. В других местах детали элементов могут быть немного больше без ущерба для точности расчёта.

2. Расчёт части симметричной части (сегмента диска, половины или даже четверти, к примеру отливки автомобильного поршня и т. д.). Отброшенные части детали учитываются как граничные условия.

3. Использование конечных элементов, возможно, более простого типа.

Инструментально скорость выполнения рутинных операций при подготовке моделей и запуске вычислений можно повысить, используя возможности параметризации. Перевод физических величин, таких как уровень теплового потока, температура, скорость, сила, коэффициент конвекции в параметрический вид представления позволяет (при наличии соответствующих инструментов препроцессоров и решателей) автоматизировать процессы задания параметров, их оптимизации и анализа результатов.

3. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА: БАЗОВЫЕ ПРИНЦИПЫ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

3.1. Особенности экспериментальных исследований

Экспериментальные методы широко используются как в науке, так и в промышленности, однако нередко с весьма различными целями. Обычно основная цель научного исследования состоит в том, чтобы показать статистическую значимость эффекта воздействия определённого фактора на изучаемую зависимую переменную. В условиях промышленного эксперимента основная цель обычно заключается в извлечении максимального количества объективной информации о влиянии изучаемых факторов на производственный процесс. Также желательно это сделать с помощью наименьшего числа дорогостоящих наблюдений.

Обычно любая машина или станок, используемый на производстве, позволяет операторам изменять различные настройки, влияя на качество производимого продукта. Эксперименты позволяют инженеру, ответственному за производство, улучшать настройки машины, а также выяснить какие факторы вносят наиболее важный вклад в качество продукции. Использование этой информации позволяет улучшить настройки системы, достигнув оптимального качества [11].

Объекты исследования в любом из направлений прикладных исследований, как правило, являются сложными и связаны со значительным количеством как контролируемых, так и неконтролируемых (независимых) факторов. На параметры их состояния могут существенно влиять элементы случайности, имеющие сложную природу происхождения. Для установления закономерностей функционирования этих объектов в реальных условиях одних теоретических исследований недостаточно, так как не всегда удаётся аналитически описать исследуемый объект с достаточной точностью. Такие объекты характерны практически для всех областей прикладных исследований, как в технике, так и в машиностроении, и в области естественных наук.

Экспериментальные данные могут быть использованы для проверки и уточнения рабочих гипотез, а также обоснования направления исследований в соответствующей области. Эффективность исследований в целом повышается, если теоретические предпосылки уточняются опытным путём, а экспериментальные данные анализируются и обобщаются на базе теоретических положений соответствующих отраслей наук.

Эксперимент – это метод исследования, заключающийся в целенаправленном воздействии на объект в заранее заданных контролируемых условиях, позволяющий контролировать его ход с точной фиксацией значений заранее заданных параметров исследуемого объекта с требуемой надёжностью и точностью и воссоздавать его каждый раз по мере необходимости при повторении одних и тех же условий его проведения. При этом учитываются как условия, так и параметры исследуемого объекта (параметры рабочих органов машин и оборудования, отдельные операции технологических процессов, характеристики явлений и др.) может варьироваться в заданных диапазонах изменения.

При проведении эксперимента исследователь прибегает к другим (более простым) методам исследования:

- наблюдению, основанному на целенаправленном восприятии явлений (причём исследователю на основе имеющихся у него знаний известно, что и как наблюдать);

- описанию, основанному на фиксации сведений, полученных на основе наблюдения;

- измерению, заключающемуся в сравнении объектов по каким-либо сходным свойствам, признакам с эталоном и установлении количественных характеристик.

Основной задачей любого эксперимента является не только получение неизвестных ранее сведений об объекте исследования, но и достоверное установление закономерностей его поведения в изменяющихся условиях, совпадающих с условиями его функционирования в природе, технике, общественной жизни и т. д. С помощью эксперимента могут быть получены данные, обработка которых позволит получить математические модели, достоверно описывающие изучаемый объект, вскрыть закономерности его поведения в изменяющихся условиях, т. е. решить задачу идентификации [39].

В зависимости от особенностей объекта и поставленных целей экспериментальные исследования могут быть проведены в различных условиях. При этом различают лабораторные, лабораторно-полевые, заводские и т. д.

Для получения надёжных и достоверных результатов экспериментальных исследований необходимо осуществить:

- анализ характеристик исследуемого объекта во всем многообразии свойств, предусмотренных целью проведения исследования, на основе имеющихся сведений, полученных другими исследователями и опубликованных в источниках информации;

- разработку программы экспериментальных исследований;
- обоснование выбора количественных параметров (критериев или измеряемых величин) оценки свойств объекта, выбрать их размерности и способы измерения в ходе эксперимента;
- определение всех факторов, влияющих на выбранные на основе поисковых исследований (если в этом есть необходимость) для наблюдения параметры рассматриваемого объекта в условиях протекания изучаемых явлений и процессов;
- рассмотрение причинно-следственных связей между параметрами оценки свойств объекта и выявленными факторами;
- ранжирование факторов по степени их влияния на параметры (критерии) оценки свойств объекта и выделение из них основных (доминирующих);
- определение рациональных интервалов варьирования выделенных факторов для установления соответствующих закономерностей, предусмотренных программой исследований;
- фиксирование остальных факторов на определённых (возможно, лучших) уровнях варьирования;
- разработка конструктивно-технологических схем опытно-экспериментальных установок или стендов, обеспечивающих реализацию намеченной программы исследований;
- изучение возможностей моделирования объекта;
- подбор соответствующей существующей или разработка новой измерительной аппаратуры, фиксирующей во время проведения экспериментов измеряемые величины через исполнительные органы (датчики, усилители, компьютеры и т. д.);
- разработка методики тарировки выбранных средств измерения, их установки для надёжного измерения или регистрации контролируемых величин;
- разработка методики обработки первичной документации, в том числе журналов наблюдений, протоколов или актов исследований с обеспечением требований надёжности, точности и достоверности результатов эксперимента [42].

В ходе обработки экспериментальных результатов устанавливаются закономерности изучаемых явлений и процессов, происходящих с участием исследуемого объекта, что позволяет получить достоверный ответ на интересующие исследователя проблемы и вопросы. Для иллюстрации установленных закономерностей принято использовать таблицы, диаграммы, графики, математические модели и др.

При изучении сложных систем часто возникают ситуации, когда явно невозможно выделить и отдельно изучить отдельные явления или процессы. В этом случае при экспериментальном исследовании объекта используется построение математических моделей, которые с соответствующей степенью достоверности описывают реальный исследуемый объект. В этом случае точное понятие «закон» или «закономерность» «заменяется более приближенным и абстрактным понятием» «модель», которое несёт в себе элемент неоднозначности и некоторой неопределённости, но практически более понятно и удобно в использовании. Конечно, здесь нет противоречия, если данная модель описывает объект исследования с требуемой достоверностью и точностью оцениваемых параметров. Как и в случае с теоретическими исследованиями, при построении моделей в эксперименте одни и те же системы и процессы могут описываться разными моделями и с разной точностью, в зависимости от конкретных условий.

Иногда при обработке экспериментальных данных ставится задача оптимизации параметров объекта по некоторым количественным или качественным критериям. Для этого используются известные методики, соответствующие программные и технические средства обработки данных. Достоверность того факта, что параметры оптимизации действительно позволяют оптимизировать свойства объекта, должна быть подтверждена прямым экспериментом, условия для которого соответствуют оптимизируемому параметрам. Только в этом случае можно говорить о достоверности практических выводов и рекомендаций.

Экспериментальная факторная модель может быть построена на основе проведения экспериментов непосредственно на самом техническом объекте (физические эксперименты) либо вычислительных экспериментов на ЭВМ с теоретической моделью. При создании новых технических объектов физический эксперимент проводится на прототипах или аналогах, а иногда на макетных образцах. Однако физические эксперименты требуют огромных затрат материальных и временных ресурсов, поэтому их выполняют обычно в тех случаях, когда возникает необходимость поиска путей совершенствования существующих технических систем, когда сложность этих систем и условий их функционирования не позволяет надеяться на требуемую точность их математического описания теоретическими методами.

Несмотря на всю привлекательность аппарата дифференциальных уравнений, большую часть металлургических систем невозможно

описать с достаточной точностью в рамках детерминированных аналитических моделей, так как, во-первых, многие объекты просто недостаточно изучены, а главное – они относятся к так называемым плохо организованным, или диффузным, системам.

В течение более чем 200 лет исследователю внушали, что он может стабилизировать все входы (независимые переменные, факторы) своего объекта. Затем, поочередно изменяя значения (уровни) одного из них при стабилизированных значениях остальных, он устанавливал зависимости выходной переменной (отклика) от входных (факторов).

Однако в начале XX в. исследователи поняли, что в реальных объектах невозможно установить непроницаемые перегородки, разграничивающие действия переменных различной физической природы. Поэтому для изучения многих реальных объектов, в том числе и технологических процессов в металлургии, стали использовать идеи и методы многомерной математической статистики. При этом математическая статистика применима не к любому хаотическому набору данных, а только к таким данным, для которых можно построить функции распределения, или, другими словами, для которых существует устойчивость частот.

В экспериментальных исследованиях объект обычно рассматривается как «черный ящик» с входными данными (факторами) и выходными данными (функциями отклика), которые влияют на функцию этого объекта. Суть модели заключается в установлении связей между входами и выходами. Физическая природа явления не учитывается. Однако с помощью экспериментальных исследований можно усовершенствовать аналитические модели, в которые заранее (априори) вводятся неизвестные коэффициенты, определенные по результатам эксперимента. Этот процесс называется идентификацией.

Экспериментальные исследования в основном проводятся для создания моделей на более высоких уровнях иерархии технического процесса, чем базовый уровень процесса. Это объясняется трудностью экспериментального определения дифференциальных (распределенных) свойств объектов. С развитием экспериментальной технологии эти трудности постепенно преодолеваются. Решающее значение имеет то, учитывается ли динамика процесса. Это также определяет используемые математические инструменты.

Если динамические эффекты не учитываются, используются классические средства из теории вероятностей и математической статистики.

Результаты представляются в виде независящих от времени зависимостей ввода-вывода между статистически усредненными переменными, а также включают дополнительную статистическую информацию (дисперсию, коэффициент корреляции, непараметрические оценки и т. д.). Модели обычно принимают форму нелинейных (полиномиальных) или регрессионных зависимостей, которые определяются с использованием стандартного компьютерного программного обеспечения.

В динамических задачах, когда на объект накладываются стохастические факторы, математической основой описания является аппарат теории случайных функций или процессов. Основными типами таких моделей являются корреляционные и спектральные модели, а также модели, основанные на так называемых марковских или «полумарковских» процессах.

Следует отметить, что динамическое статистическое моделирование обеспечивает наиболее полное описание сложных исходных объектов и служит незаменимым инструментом для решения множества задач, в том числе металлургических.

При использовании статистических методов большое значение имеет процесс формирования гипотез исследователями. Под гипотезой в этом случае понимается любое утверждение, которое можно в дальнейшем проверить (например, анализ одной и той же пробы в разных лабораториях приводит к разным результатам или механизм химической реакции объясняется математическим методом).

Невозможно предложить алгоритм, который просто выводит новые закономерности из новых данных, не сформулировав предварительно гипотезу. Используя статистические методы, можно выбрать одну из представленных гипотез или уточнить выдвинутую априори гипотезу.

Следует отметить, что процесс представления и анализа статистических гипотез также не стандартизирован. Любая попытка применить самые сложные статистические методы не даст полезных результатов, если все выдвинутые гипотезы неверны. Пример такого типа можно найти в [24], на котором данный раздел основан преимущественно на письменных материалах.

Современная статистика ввела в эксперименты понятие случайности и заставила исследователей искусственно создавать случайные ситуации при проведении экспериментов (рандомизация). Сущность рандомизации сводится к тому, чтобы сделать случайным влияние

систематических факторов, которые трудно учесть или проконтролировать.

Наличие многих из этих элементов является характерной особенностью реальных металлургических объектов. Преобразовав эти факторы в случайные, их можно учесть статистически.

Это – принципиальное обстоятельство. При традиционном подходе к эксперименту, когда считается, что все факторы можно учесть, а их влияние отделять друг от друга, рандомизация и планирование (определенная стратегия) эксперимента смысла не имеют. Во многих реальных случаях невозможно осуществить полную рандомизацию эксперимента. Поэтому появилась необходимость в создании специальных планов проведения экспериментов с ограничениями на рандомизацию.

Большое значение для современного эксперимента имеет концепция последовательного пошагового проведения опытов с переходом от предыдущего шага к последующему после анализа результатов, полученных на предыдущем шаге. Такой подход получил наибольшую эффективность в задачах планирования экстремальных экспериментов (например, метод Бокса-Уилсона) (рисунок 3.1).

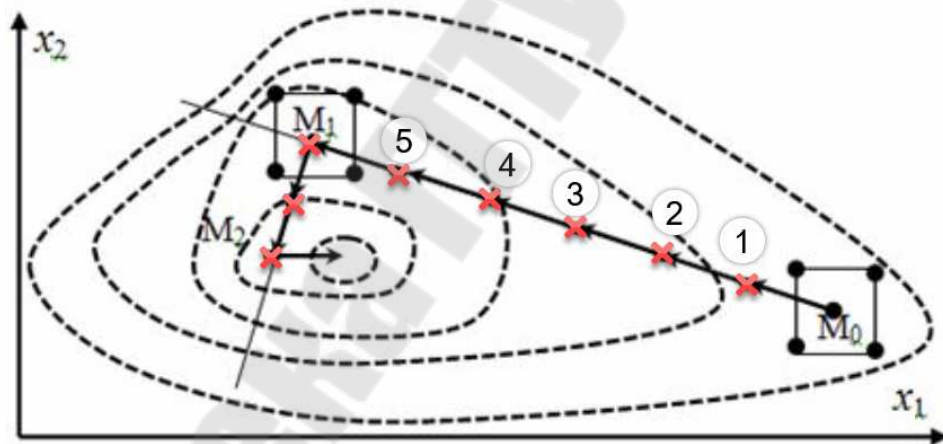


Рис. 1.14. Процесс приближения к экстремуму функции отклика на основе метода Бокса-Уилсона.

При этом исследователь продвигается к экстремуму (максимуму или минимуму) отклика (выходной переменной) по кратчайшему пути. Метод Бокса — Уилсона простейший из методов планирования эксперимента. Однако его успешное применение зависит от решения многих вопросов, связанных с принятием неформализованных решений при выборе параметра оптимизации, факторов, плана экспериментов и при интерпретации результатов.

Наконец, отметим еще одну концепцию, которая используется в современном эксперименте и делает его эффективным. Эта концепция так называемого многофакторного эксперимента (в отличие от традиционного однофакторного). Сущность многофакторного эксперимента сводится к тому, что производится варьирование всех переменных сразу (в отличие от поочередного варьирования каждой переменной).

3.2. Основы планирования эксперимента

Таким образом, можно сформулировать что планирование эксперимента — это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью. При этом существенно следующее:

1. Стремление к минимизации общего числа опытов;
2. Одновременное варьирование всеми переменными, определяющими процесс, по специальным правилам - алгоритмам;
3. Использование математического аппарата, формализующего многие действия экспериментатора;
4. Выбор четкой стратегии, позволяющей принимать обоснованные решения после каждой серии экспериментов.

Поиск оптимальных условий, построение интерполяционных формул, подбор существенных элементов, оценка и уточнение констант теоретических моделей, выбор наиболее приемлемых из множества конкретных гипотез о механизме явлений, исследование композиционных характеристических диаграмм и т. д. — вот примеры проблем, где решением является применение планирования экспериментов.

Параметр оптимизации. При поиске оптимальных условий необходимо выбрать параметр оптимизации. Параметр оптимизации — это реакция (отклик) на воздействия факторов, которые определяют поведение изучаемой системы. Параметры оптимизации бывают экономическими, технико-экономическими, технико-технологическими, статистическими, и др.

Параметр оптимизации должен быть:

1. эффективным с точки зрения достижения цели;
2. универсальным;
3. количественным и выражаться одним числом;
4. статистически эффективным;
5. имеющим физический смысл, простым и легко вычисляемым;
6. существующим для всех различных состояний.

В случаях, когда возникают трудности с количественной оценкой параметров оптимизации, следует использовать ранговый подход. В ходе исследования априорные представления об объекте исследования могут меняться, что приводит к последовательному подходу для выбора параметра оптимизации.

Среди множества параметров, характеризующих объект исследования, только один, обычно обобщенный, может быть использован в качестве параметра оптимизации. Остальные считаются ограничениями.

Факторы. Факторы – это переменные величины, соответствующие способам воздействия внешней среды на объект. Они определяют как сам объект, так и его состояние. Требования к факторам: управляемость и однозначность. Требования к совокупности факторов: совместимость и отсутствие линейной корреляции. Выбранное множество факторов должно быть достаточно полным. Если какой-либо фактор пропущен, это приведет к неправильному определению оптимальных условий или к большой ошибке опыта. Факторы могут быть количественными и качественными. Степень точности фиксации факторов определяется диапазоном изменения факторов.

Первой серии опытов предшествует этап неформальных решений, направленных на выбор локальной области факторного пространства. При этом оцениваются границы областей определения факторов, задаваемых либо принципиальными ограничениями, либо технико-экономическими соображениями, либо конкретными условиями проведения процесса. Установление области связано с тщательным анализом априорной информации об изменении параметра оптимизации и о кривизне поверхности отклика.

Локальная область проведения эксперимента выбирается в два этапа: определение основного уровня и интервалов варьирования. Основной (нулевой) уровень - многомерная точка в факторном пространстве, задаваемая комбинацией уровней факторов. Построение плана эксперимента сводится к выбору экспериментальных точек, симметричных относительно основного уровня. При установлении основного уровня приходится рассматривать различные ситуации. Ситуации задаются информацией о наилучших точках и определяют решения

Следующий этап – выбор интервалов варьирования факторов. Для каждого фактора определяются два уровня, на которых он варьируется в эксперименте. Уровни факторов изображаются двумя точка-

ми на координатной оси, симметричными относительно основного уровня. Один из уровней – верхний, другой – нижний. Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровень.

Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям задают так, чтобы верхний уровень соответствовал "+1", нижний "-1", основной - нулю. Для факторов с непрерывной областью определения это можно сделать с помощью преобразования:

$$X_j = \frac{\tilde{X}_j - \tilde{X}_{j0}}{J_j}, \quad (3.1)$$

где X - кодированное значение фактора:

\tilde{X}_j - натуральное значение фактора;

\tilde{X}_{j0} - натуральное значение основного уровня;

J_1 - интервал варьирования;

j - номер фактора.

На выбор интервалов варьирования накладываются ограничения снизу (он не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора) и сверху (верхний или нижний уровни не должны выходить за область определения).

В задачах оптимизации выбирают подобласть, которая давала бы возможность реализовать шаговую процедуру движения к оптимуму. В задачах интерполяции интервал варьирования охватывает всю описываемую область

При определении интервала варьирования используется информация о точности, с которой фиксируются значения факторов, о кривизне поверхности отклика и о диапазоне изменения параметра оптимизации. Для принятых градаций этих признаков существует 27 различных ситуаций. Низкая точность фиксирования факторов определяет типичное решение - широкий интервал варьирования. Для средней точности характерен выбор среднего интервала. Высокая точность обычно приводит либо к узкому, либо к среднему интервалу.

При решении задачи оптимизации стремятся выбрать для первой серии экспериментов такую подобласть, которая давала бы воз-

возможность для шагового движения к оптимуму. В задачах же интерполяции интервал варьирования охватывает всю описываемую область.

Эксперимент, в котором реализуется все возможные сочетания уровней, называется полным факторным экспериментом. Если число факторов равно двум, то это полный факторный эксперимент типа 2^k . Условия эксперимента представляют в виде таблицы-матрицы планирования, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы-значениям факторов.

Полный факторный эксперимент типа 2^k обладает свойствами:

1. Симметричность относительно центра эксперимента - алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю или N :

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0, \quad (3.2)$$

где j - номер фактора, $j = 1..K$;

k - число факторов;

N - число опытов.

2. Условие нормировки - сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов, или:

$$\sum_{i=1}^N (x_{ji})^2 = N, \quad (3.3)$$

это следствие того, что значения факторов в матрице задаются $+1$ и -1

3. Ортогональность матрицы - сумма почленных произведений любых двух векторов-столбцов матрицы равна нулю, или

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{iu} = 0, \quad (3.4)$$

где $j \neq u$,

$j, u = 0, 1, 2, \dots, k$.

4. Ротатабельность (для линейной модели) - точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений

параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Коэффициенты, рассчитанные по результатам эксперимента, дают информацию о силе влияния факторов. Влияние фактора численно равно удвоенному коэффициенту. В тех случаях, когда действие одного фактора зависит от уровня, на котором находится другой фактор, говорят, что имеет место эффект взаимодействия двух факторов. Полностью факторный эксперимент позволяет количественно оценить эффекты взаимодействия. Для этого, используя правило умножения столбцов, нужно получить столбец произведения двух факторов и рассматривать его как вектор – столбец каждого фактора.

Из полного факторного эксперимента нельзя извлечь информацию о квадратичных членах. Вектор - столбцы для квадратичных членов совпадают друг с другом и со столбцами x_0 . Величина b_0 включает вклады квадратичных членов, получается смешанная оценка. Оценки остальных коэффициентов не смешаны.

3.3. Дробный факторный эксперимент

В полном факторном эксперименте разность между числом опытов и числом коэффициентов велика. Минимизация числа опытов за счет той информации, которая не очень существенна при построении линейной модели возможна в дробном факторном эксперименте, где половина полного факторного эксперимента называется полуреplikой.

Дробные реплики находят широкое применение при получении линейной модели. Целесообразность их применения возрастает с ростом количества факторов. При исследовании влияния 15 факторов можно в 2048 раз сократить число опытов, применяя реплику большей дробности (16 опытов вместо 32768). Эффективность применения дробных реплик зависит от удачного выбора системы смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействий, а также от умелой стратегии экспериментирования в случае значимости некоторых взаимодействий. Априорные сведения о взаимодействии могут оказать большую услугу экспериментатору. При построении дробных реплик используют следующее правило: для того, чтобы сократить число опытов, вводя в планирование новый фактор, нужно поместить этот фактор в вектор - столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь.

Реплики, которые используются для сокращения опытов в 2^m раз, где $m=1, 2, 3, 4, \dots$, называются регулярными. Они пользуются

большой популярностью, так как позволяют производить расчет коэффициентов уравнения так же просто, как и в случае полного факторного эксперимента.

При применении дробных реплик линейные эффекты смешиваются с эффектами взаимодействий. Чтобы определить систему смешивания, нужно знать определяющие контрасты и генерирующие соотношения. Определяющим контрастом называется символическое обозначение произведения любых столбцов, равное ± 1 . Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется генерирующим соотношением.

Чтобы определить, какие взаимодействия смешаны с данным линейным эффектом, нужно умножить определяющий контраст на этот линейный эффект и получить генерирующее соотношение. Например, если имеются следующие генерирующие соотношения: $x_1 = x_2x_3$, $x_2 = x_1x_3$ и $x_3 = x_1x_2$, то определяющий контраст будет $1 = x_1x_2x_3$.

Эффективность реплики зависит от системы смешивания. Реплики, у которых линейные эффекты смешаны с взаимодействиями наивысшего порядка, являются наиболее эффективными, так как обладают наибольшей разрешающей способностью.

Для освобождения линейных эффектов от взаимодействий первого порядка можно использовать метод "перевала". Смысл метода в добавлении новой реплики, все знаки которой противоположны исходной реплике.

С ростом числа факторов быстро увеличивается число реплик различной дробности. Эти реплики характеризуются обобщающими определяющими контрастами, которые получаются перемножением по два, по три и т. д. исходных определяющих контрастов.

3.4. Факторный метод

Матрица планирования. При применении факторного метода считается, что изучаемый процесс физически осуществлен и перед исследователем стоит задача его оптимизации.

Из многих возможных путей поиска оптимальных условий рассматриваем лишь один, наиболее эффективный и наименее трудоемкий, который получил название метода Бокса - Уилсона или метода крутого восхождения.

Этот метод позволяет получать статические математические модели процессов, используя факторное планирование, регрессионный анализ и движение по градиенту

Предполагаем, что:

- задача допускает выбор параметра оптимизации;
- множество определяющих факторов задано;
- каждый из факторов управляем;
- учитываются только парные взаимодействия факторов результаты опытов воспроизводятся;
- опыты равноценны, т. е. различием в стоимости можно пренебречь;
- математическая модель процесса заранее не известна.

Рассматривается задача с максимальным числом факторов четыре. Число опытов $N = 2^4 = 16$. Число парных взаимодействий:

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6. \quad (3.5)$$

Используя кодированные значения факторов, составим матрицу планирования эксперимента с учетом парного эффекта взаимодействия. В матрицу планирования удобно ввести вектор-столбец фиктивной переменной x_0 , которая принимает во всех опытах значение +1.

Таблица 3.1

Матрица планирования эксперимента

№	код	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	$X_1 X_2$	$X_1 X_3$	$X_1 X_4$	$X_2 X_3$	$X_2 X_4$	$X_3 X_4$	Y
1	a	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	y1
2	bc	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	y2
3	c	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	y3
4	cd	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	y4
5	b	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	y5
6	bd	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	y6
7	bc	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	y7
8	bcd	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	y8
9	d	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	y9
10	ad	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	y10
11	ac	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	y11
12	acd	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	y12
13	ab	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	y13
14	abd	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	y14
15	abc	1	1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	y15
16	abcd	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	y16

Столбцы $X_1 - X_4$ задают планирование - по ним непосредственно определяются условия опытов, а столбцы X_0 и $X_1X_2 - X_3X_4$ служат только для расчета.

3.2 Полный факторный эксперимент и математическая модель. Для движения к точке оптимума необходимо вычислить коэффициенты линейной модели (функции отклика).

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4, \quad (3.6)$$

Коэффициенты определяются по следующей формуле:

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ij}y_i}{N} \quad j = 0; 1; \dots k, \quad (3.7)$$

где x_{ij} - кодированное значение фактора;

y_i - натуральное значение параметра оптимизации.

Коэффициент b_0 есть среднее арифметическое значений параметра оптимизации, Коэффициенты при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если знак минус, то уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

Ошибки параллельных опытов при проведении эксперимента. Воспроизводимость эксперимента является одним из важнейших требований планирования эксперимента, так как каждый эксперимент содержит элемент неопределенности вследствие ограниченности экспериментального материала. Постановка параллельных опытов не дает полностью совпадающих результатов, потому что всегда существует ошибка опыта, ошибка воспроизводимости. Ошибка опыта может быть оценена по следующим показателям:

1. Среднее арифметическое результатов

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n y_q \quad (3.8)$$

Отклонение результата любого опыта от среднего арифметического можно представить как разность $y_q - \bar{y}$, где y_q - результат отдельного опыта. Наличие отклонения свидетельствует об изменчивости, вариации значений повторных опытов. Для измерения этой изменчивости чаще всего используют дисперсию

2. Дисперсия - среднее значение квадрата отклонений величины от ее среднего значения

$$S_2 = \frac{\sum_{q=1}^n (y_q - \bar{y})^2}{n-1}, \quad (3.9)$$

где $(n-1)$ - число степеней свободы, равное количеству опытов минус единица. Одна степень свободы используется для вычисления среднего.

Корень квадратный из дисперсии, взятый с положительным знаком, называется квадратичным отклонением.

3. Стандарт или квадратичная ошибка

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^n (y_q - \bar{y})^2}{n-1}}. \quad (3.10)$$

Стандарт имеет размерность той величины, для которой он вычислен. Дисперсия и стандарт — это меры рассеяния, изменчивости. Чем больше дисперсия и стандарт, тем больше рассеяны значения параллельных опытов около среднего значения.

3.5. Дисперсия параметра оптимизации

Матрица планирования состоит из серии опытов, и дисперсия всего эксперимента получается в результате усреднения дисперсий всех опытов. По терминологии, принятой в планировании эксперимента, речь идет о подсчете дисперсий параметра оптимизации $S^2_{(y)}$ или дисперсии воспроизводимости эксперимента $S^2_{воспр}$.

При подсчете дисперсии параметра оптимизации квадрат разности между значением y_q в каждом опыте и n средним значением из

повторных наблюдений \bar{y} нужно просуммировать по числу опытов в матрице N , а затем разделить на $N(n-1)$, так придем к формуле:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)}, \quad (3.11)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$;
 $q = 1, 2, \dots, n$.

3.6. Проверка однородности дисперсии

Полученные дисперсии подвергаются проверке на однородность. Однородность дисперсий означает, что среди всех суммируемых дисперсий нет таких, которые бы значительно превышали бы все остальные. Проверка дисперсий производится с помощью статистических критериев. Простейшим из них является критерий Фишера (F-критерий), предназначенный для сравнения для сравнения двух дисперсий. Критерий Фишера представляет собой отношение большей дисперсии к меньшей. Полученная величина сравнивается с табличной величиной F-критерия.

F-критерий используется даже в тех случаях, когда число дисперсий больше двух. Из всех дисперсий выделяется наибольшая и наименьшая. По F-критерию производится проверка, значимо ли они различаются между собой. Если наибольшая и наименьшая дисперсии не отличаются значимо, то дисперсии, имеющие промежуточные значения, также не могут значимо отличаться друг от друга. Тогда всю группу дисперсий можно считать принадлежащей к единой совокупности.

3.7. Обработка результатов эксперимента

Статистики разработали много разнообразных методов обработки результатов эксперимента. Но ни один из них не может конкурировать по популярности, по широте приложений с методом наименьших квадратов (МНК), который был развит усилиями Лежандра и Гаусса более 150 лет назад.

Функция отклика или уравнение регрессии имеет вид:

$$y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{14}x_1x_4 + b_{23}x_2x_3 + b_{24}x_2x_4 + b_{34}x_3x_4 \quad (3.12)$$

Если бы все экспериментальные точки лежали строго на прямой линии, то для каждой из них было бы справедливо равенство:

$$y - b_0x_0 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 - b_4x_4 - b_{12}x_1x_2 - b_{13}x_1x_3 - b_{14}x_1x_4 - b_{23}x_2x_3 - b_{24}x_2x_4 - b_{34}x_3x_4 = 0 \quad (3.13)$$

где $i = 1, 2, \dots, N=16$ - номер опыта. На практике это равенство нарушается и вместо него имеем

$$y - b_0 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 - b_4x_4 - b_{12}x_1x_2 - b_{13}x_1x_3 - b_{14}x_1x_4 - b_{23}x_2x_3 - b_{24}x_2x_4 - b_{34}x_3x_4 = \xi_i \quad (3.14)$$

где ξ_i - разность между экспериментальным и вычисленным по уравнению регрессии значениями y в i -й экспериментальной точке

Эту величину называют невязкой. Необходимо найти такие коэффициенты регрессии, при которых невязки будут минимальными. В зависимости от этого мы будем получать разные оценки коэффициентов, Одна из возможных записей

$$U = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = \min, \quad (3.15)$$

которая приводит к методу наименьших квадратов (МНК).

Обычно производится опытов больше, чем число неизвестных коэффициентов. Поэтому система линейных уравнений оказывается переопределенной и часто противоречивой. Т. е. она может иметь бесконечно много решений или может не иметь решений. Переопределенность возникает, когда число уравнений больше числа неизвестных; противоречивость - когда некоторые из уравнений несовместимы друг с другом.

Только если все экспериментальные точки лежат на прямой, то система становится определенной и имеет единственное решение.

МНК обладает тем замечательным свойством, что он делает определенной любую, произвольную систему уравнений. Он делает число уравнений равным числу неизвестных коэффициентов

Для любого числа факторов коэффициенты определяются по формуле:

$$b_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^N x_{ij} y_i}{N}, \quad (3.16)$$

где $j = 0, 1, \dots, k$ - номер фактора. Ноль записывается для вычисления b_0 .

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}. \quad (3.17)$$

Так как каждый фактор (кроме x_0) варьируется на двух уровнях +1 и -1, то вычисления сводятся к приписыванию столбцу y знаков соответствующего фактору столбца и алгебраическому сложению полученных значений. Деление результата на число опытов в матрице планирования дает искомый коэффициент.

Метод наименьших квадратов - эффективный и простой способ получения оценок коэффициентов регрессии [29]. Эти оценки приводят к минимально возможной остаточной сумме квадратов и в этом смысле являются оптимальными. При проверке каких-либо гипотез о пригодности модели или о значимости коэффициентов метод наименьших квадратов становится частью регрессионного анализа.

3.8. Регрессионный анализ

При обработке результатов эксперимента нужно воспользоваться регрессионным анализом, который применим при определенных постулатах:

1. Параметр оптимизации y есть случайная величина с нормальным законом распределения. Дисперсия воспроизводимости - одна из характеристик этого закона распределения. В том что y -случайная величина, обычно сомневаться не приходится.

2. Дисперсия не зависит от абсолютной величины y . Выполнимость этого постулата проверяется с помощью критериев однородности дисперсий в разных точках факторного пространства. Нарушение этого постулата недопустимо.

3. Значение факторов - не случайные величины. Это практически означает, что установление каждого фактора на заданный уровень и его поддержание существенно точнее, чем ошибка воспроизводимости. Нарушение этого постулата приводит к трудностям при реализации матрицы планирования. Поэтому оно обычно легко обнаруживается.

Существует еще четвертый постулат, налагающий ограничения на взаимосвязь между значениями факторов. У нас он выполняется автоматически в силу ортогональности матрицы планирования.

Проверка адекватности модели. Данная проверка определяет пригодность рассчитанной модели эксперимента.

Числом степеней свободы в статистике называется разность между числом опытов и числом коэффициентов (констант), которые уже вычислены по результатам этих опытов независимо друг от друга.

Число степеней свободы для полного факторного эксперимента 2^k вычисляется по следующей формуле:

$$f = N - (k + 1), \quad (3.18)$$

где N - число опытов полного факторного эксперимента;

k - количество факторов.

Для факторного эксперимента $2^k=2^4$ $f = 16 - (4 + 1) = 11$,

Для факторного эксперимента $2^k=2^3$ $f = 8 - (3 + 1) = 4$,

Для факторного эксперимента $2^k=2^2$ $f = 4 - (2 + 1) = 1$.

Остаточная сумма квадратов, деленная на число степеней свободы, называется остаточной дисперсией или дисперсией адекватности.

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y_i^2}{f}. \quad (3.19)$$

В планировании эксперимента число степеней свободы для дисперсии адекватности равно числу различных опытов, результаты которых используются при подсчете коэффициентов регрессии, минус число определяемых коэффициентов.

Для проверки адекватности модели используется F-критерий Фишера, который определяется по формуле:

$$F = \frac{S_{ad}^2}{S_{(y)}^2}, \quad (3.20)$$

где $S_{(y)}^2$ - дисперсия воспроизводимости со своим числом степеней свободы.

Если рассчитанное значение F- критерия не превышает табличного, то, с соответствующей доверительной вероятностью, модель можно считать адекватной. При превышении табличного значения эту принятую гипотезу приходится отвергать.

Этот способ расчета дисперсии адекватности применим в том случае, если опыты в матрице планирования не дублируются, а информация о дисперсии воспроизводимости извлекается из параллельных опытов в нулевой точке или из предварительных экспериментов.

Важны еще два случая:

1. Опыты во всех точках плана дублируются одинаковое число раз (равномерное дублирование),
2. число параллельных опытов не одинаково (неравномерное дублирование) В первом случае дисперсию адекватности нужно умножить на n, где n - число повторных опытов

$$S_{ad}^2 = \frac{n \sum_{i=1}^N \Delta y_i^2}{f}. \quad (3.21)$$

Чем больше число параллельных опытов, тем с большей достоверностью оцениваются средние значения. Поэтому требования к различиям между экспериментальными и расчетными значениями становятся более жесткими что отражается в увеличении F-критерия.

Во втором случае, когда приходится иметь дело с неравномерным дублированием, положение усложняется. Даже когда экспериментатор задумал провести равное число параллельных опытов, часто не удается по тем и или иным причинам все их реализовать.

При неравномерном дублировании нарушается ортогональность матрицы планирования и. как следствие, изменяются расчетные формулы для коэффициентов регрессии и их ошибок, а также для дисперсии адекватности. Для дисперсии адекватности общая формула

$$S_{ad}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N n_i (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2}{f}, \quad (3.22)$$

где N - число различных опытов (число строк матрицы):

n_i - число параллельных опытов в i -й строке матрицы;

\bar{y}_i - среднее арифметическое из n_i параллельных опытов;

\hat{y}_i - предсказанное по уравнению значение в этом опыте.

Смысл этой формулы прост: различию между экспериментальным и расчетным значением придается тем больший вес, чем больше число повторных опытов.

Если модель адекватна, то переходим к крутому восхождению. Если нет - приходится преодолевать дополнительные трудности.

Проверка значимости коэффициентов. Проверка значимости каждого коэффициента производится независимо. Её можно осуществлять двумя равноценными способами:

проверкой по t -критерию Стьюдента или построением доверительно интервала. При использовании полного факторного эксперимента или регулярных дробных реплик доверительные интервалы для всех коэффициентов (в том числе и эффектов взаимодействия) равны друг другу

Прежде всего найдем дисперсию коэффициентов регрессии. Она определяется по формуле:

$$S_{(b_j)}^2 = \frac{S_{(y)}^2}{N}. \quad (3.23)$$

По формуле видно, что дисперсия всех коэффициентов равны друг другу, так как они зависят только от ошибки опыта и числа опытов.

Теперь легко построить доверительный интервал

$$\Delta b_j = \pm t S(b_j), \quad (3.24)$$

где t - табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней, с которым определялась $S^2(y)$, и выбранном уровне значимости (обычно 0.05);

$S(b_j)$ - квадратичная ошибка коэффициента регрессии

$$S(b_j) = \pm \sqrt{S_{(b_j)}^2}, \quad (3.24)$$

формулу для доверительного интервала можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\Delta b_j = \pm \frac{t S(y)}{\sqrt{N}}, \quad (3.25)$$

Коэффициент значим, если его абсолютная величина больше доверительного интервала. Доверительный интервал задается верхней и нижней границами $b_j + \Delta b_j$ и $b_j - \Delta b_j$.

3.9. Принятие решения после построения модели

Для линейной адекватности модели возможны три варианта:

1. Все коэффициенты регрессии значимы
2. Часть коэффициентов регрессии значима, часть незначима
3. Все коэффициенты регрессии незначимы.

В каждом варианте оптимум может быть близко, далеко или о его положении нет информации

Для линейной адекватной модели со значимыми коэффициентами регрессии возможны: движение по градиенту, план второго порядка, окончание исследования. Если часть коэффициентов регрессии не значима, то возможен выбор одного из решений, позволяющих получать коэффициенты регрессии значимыми: изменение интервалов варьирования, перенос центра плана, отсеивание незначимых факторов, параллельные опыты, достройка плана. Кроме того, остается движение по градиенту, а если область оптимума близка, то реализация плана второго порядка или окончание исследования.

Наконец, если все коэффициенты незначимы, выбираются решения по реализации плана второго порядка или окончанию исследования (область оптимума близка) либо решения, позволяющие получать значимые коэффициенты регрессии (область оптимума далека и неопределенная ситуация).

Выбираются решения, реализация которых приводит к получению значимых коэффициентов и рекомендуется движение по градиенту.

Если линейная модель неадекватна, значит не удастся аппроксимировать поверхность отклика плоскостью. Кроме величины F-критерия, формальным признаком, по которому можно установить неадекватность линейной модели - значимость хотя бы одного из эффектов взаимодействия. Решения, принимаемые для получения адекватной модели: изменение интервалов варьирования факторов, перенос центра плана, достройка плана. Если вклад эффектов взаимодействия невелик, то решение о движении по градиенту предоставляется возможным. Если область оптимума близка, то исследование либо заканчивается, либо реализуется план второго порядка. Такие решения, как изменение интервалов варьирования, перенос центра плана, достройка плана, движение по градиенту, применяются при любом положении оптимума. Возможно включение в модель эффектов взаимодействия факторов и движение с помощью неполного полинома второго порядка, а также оценка квадратичных эффектов для получения информации о кривизне поверхности отклика перед движением по градиенту.

Если поставлена задача построения интерполяционной формулы, то на получении адекватной модели исследования заканчиваются, а в случае неадекватной модели принимается одно из следующих решений: включение в модель эффектов взаимодействия, достройка плана, преобразование переменных, изменение интервалов варьирования.

4. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В МЕТАЛЛУРГИИ

4.1. Расчёты процесса нагрева шихты в слое в нестационарных условиях

Сравнительный анализ эффективности известных способов сокращения удельных затрат электроэнергии на плавку дает ориентировочно следующее соотношение (при общих затратах $\sim 650\text{--}680$ кВт · ч/т.): дожигание СО непосредственно в рабочем пространстве путем дополнительной подачи воздуха или кислорода – 6 %; работа на вспененных шлаках – 9 %; повышение удельной мощности печных трансформаторов (работа на длинных дугах) – 10 %; вдувание кислорода в ванну металла (с корректировкой углеродосодержащего компонента) – 10 %; использование в завалке жидкого чугуна – 10 %; использование топливо-кислородных или плазменных горелок – 12 %; высокотемпературный подогрев шихты – до 22 %.

При этом эффект высокотемпературного подогрева шихты (ВПШ), очевидно, пропорционален температуре нагрева или энтальпии загружаемых материалов. Верхний предел может быть ограничен только опасностью угара тонколистового скрапа при длительном нагреве свыше 700 °С в окислительной среде или свариванием кусков скрапа при температурах выше $900\text{--}1000$ °С.

До настоящего времени представляют определенные трудности расчеты процесса нагрева шихты в слое в нестационарных условиях, в частности, определение времени продолжительности нагрева до заданной температуры.

По сложившейся практике его определяют опытным путем на уже изготовленной установке, изменяя режимы: количество подаваемого топлива, величину разряжения, высоту слоя и тому подобное, устанавливают длительность подогрева, требуемую по условиям работы плавильного отделения или экономическим показателям.

Исследования режимов нагрева шихты в слое в бадьях и шахтах позволяют сделать вывод о применимости для расчета процессов теплопередачи уравнения Фурье для нестационарной теплопроводности с граничными условиями I рода. При этом в уравнении вместо коэффициента теплопроводности слоя λ (как в каноническом) используется приведенный коэффициент конвекции α_k , умноженный на эквива-

лентный диаметр элементов слоя – куска шихты или канала для, соответственно, внешней или внутренней задачи:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\alpha_k d_{\text{э}}}{c\rho} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \quad (4.1)$$

Для установок с бадьями небольшой емкости (до 10 т) приемлемым является использование одномерной схемы расчета, для бадей диаметром свыше 3 м более корректно расчет вести в цилиндрических координатах, считая распределение температур в горизонтальных сечениях пропорциональным радиусу.

Так как α_k является функцией скорости потока, целесообразно при проектных работах провести расчеты параметров движения газов в слое на основе решений уравнений Навье-Стокса и Фурье-Кирхгофа, задавая градиенты температур по высоте слоя. Для этой цели можно использовать пакет ANSYS.

Примеры полученных решений представлены на рисунке 4.1.



а)

б)

Рис. 4.1. Моделирование движения газов в слое шихты

Расчеты теплопередачи в кольцевом зазоре бадьи – термоса не представляют трудностей и могут быть выполнены путем расчета суммарной передачи тепла турбулентным воздушным потоком от стенки вставки к корпусу бадьи и излучением от той же вставки, учитывая принцип суперпозиции. При отсутствии движения – теплопроводностью через воздушный зазор и излучением. Последний фактор практически незначим до температуры вставки ≤ 500 °С.

Как показала практика, при использовании бадей емкостью 5–6 т и интенсивности нагрева 10–15 мин. с интервалом до очередного использования этой же бадьи 30–45 мин. (работа с тремя бадьями) подача охлаждающего воздуха в кольцевой зазор не требуется (не обязательна). Потери тепла при этом уменьшаются на 5–10 %.

В выбросах установок подогрева шихты, работающих на природном газе, не содержится вредных веществ, присущих выбросам дуговых печей, и концентрации вредных веществ в отходящих газах, как правило, существенно ниже.

Однако при использовании сильно загрязненного тонколистового скрапа, стружки или брикетов, количество вредных веществ и прежде всего органики (ЛОС – летучих органических соединений) соответственно возрастает. В этом случае необходимо их дожигать на выходе из бадьи. Время реакции горения отходящих газов рассчитывается по кинетическим уравнениям для каждого компонента включая ЛОС, и задается наибольшее. При температурах горения больших 750 °С это время составляет десятые доли секунды. Для увеличения эффективности дожигания целесообразно вводить факел горелки в камеру дожигания тангенциально.

Учитывая, что основание установок ВПШ в бадьях-термосах представляет собой футерованную камеру объемом, соизмеримым с бадьей, что обеспечивает необходимое время пребывания газов в зоне горения, для дожигания отходящих газов достаточно ввести в основании установки горелку-запальник.

По результатам промышленной эксплуатации получены следующие соотношения расходов энергоносителей, позволяющие оценить эффективность разработанных установок ВПШ в бадьях-термосах: при затратах природного газа на уровне 11–13 м³, сокращение расхода электроэнергии составило 150–180 кВт·ч на 1 т шихты. Меньшие расходы газа соответствуют условиям нагрева шихты с меньшей интенсивностью (скорость нагрева 1 м слоя за 10 мин.) и приведенной толщиной кусков шихты 30–50 мм, большие цифры – для быстрого нагрева: примерно 2 м слоя за 10 мин. и тонколистовом скрапе.

Высокий к. п. д. установок ВПШ в бадьях-термосах обусловлен двумя факторами: во-первых, приведенная аккумулирующая теплоемкость слоя шихты – «водяное число» в расчете теплопередачи по методике Б. В. Китаева значительно больше «водяного числа» тепло-

носителя – продуктов сжигания газа, во-вторых – достаточно низкие температуры корпуса бадьи (корзины).

Количество тепла, теряемое бадьей (рисунок 4.2) в данных установках, при нагреве шихты до 750 °С незначительно. За время работы температура корпуса повышается от 0 до 300 °С (максимум). При этом потери тепла за счет естественной конвекции от вертикальной стенки корпуса со средней температурой 140–200 °С могут быть рассчитаны по уравнению:

$$q = \alpha(t_n - t_0)F\tau \quad (\text{кВт} \cdot \text{ч}); \quad (4.2)$$

где $\alpha = \kappa \sqrt[4]{t_n - t_0} + \frac{\sigma_0 \varepsilon (T_n^4 - T_0^4)}{t_n - t_0}$, (Вт/м²К) – приведённый коэффициент теплоотдачи, учитывающий естественную конвекцию и излучение,
 τ – время.

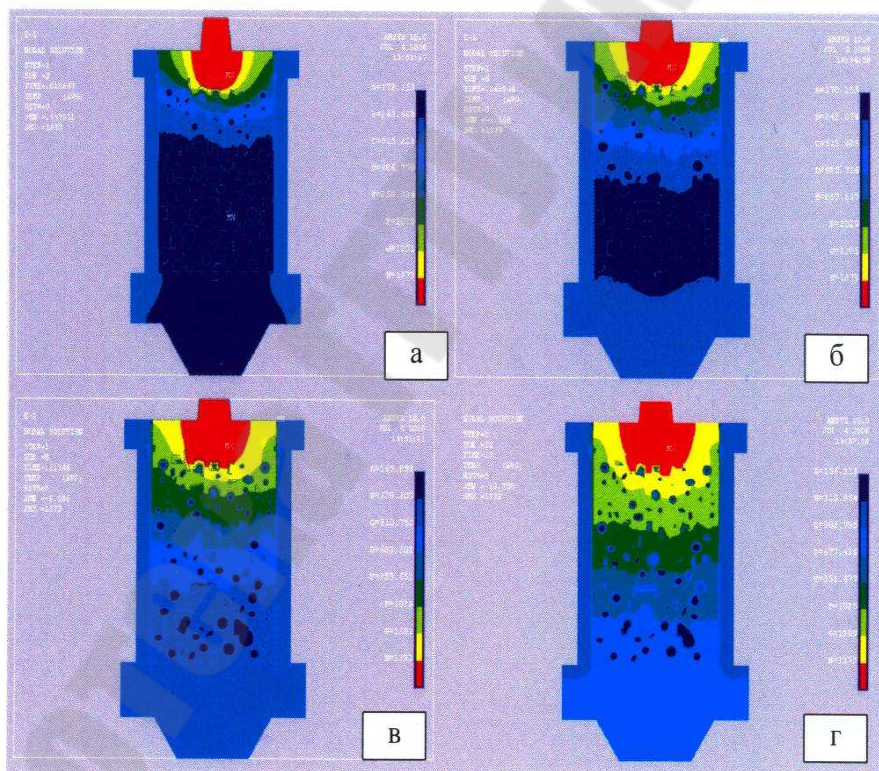


Рис. 4.2. Компьютерное моделирование нагрева шихты в загрузочных бадьях-термосах: а – распределение давлений в бадье при наличии дополнительной подачи воздуха со скоростью 3 м/с в зазор; б – суммарные значения мгновенных скоростей газового потока в моделируемом слое шихты, $v_0 = 10$ м/с; в-изменение во времени поля температур в слое шихты при $v_0 = 10$ м/с и $t_{\text{газ}} = 1200$ °С

Для вертикальных поверхностей коэффициент $\kappa = 2,4$; коэффициент излучения $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2\text{К}^4$, при степени черноты $\varepsilon = 0,8$ (для стального листа). Отсюда: $\alpha \approx 2 - 9 \text{ Вт/м}^2\text{К}$. За 15 минут работы потери составят примерно 2–3 МДж на 1 т шихты, что эквивалентно расходу газа $\sim 0,12 \text{ м}^3/\text{т}$ шихты.

Количество тепла, уносимое воздухом, продуваемым через кольцевой зазор, зависит от интенсивности продувки и температуры вставки.

Тепло передается конвекцией (вынужденной), так как излучение от вставки не может сколько-нибудь заметно восприниматься воздухом.

Плотность теплового потока в зазоре можно рассчитать при этом по формуле для расчета количества тепла, передаваемого от дымовых газов к воздуху через металлическую стенку:

$$Q = K \Delta t_{\text{cp}} F_3; \text{ (кДж)}, \quad (4.3)$$

где K – суммарный коэффициент теплопередачи;
 $K = \alpha_{\text{в}} \alpha_{\text{д}} / (\alpha_{\text{в}} + \alpha_{\text{д}})$; Δt_{cp} – средняя логарифмическая разность температур газов и воздуха;

$$\Delta t_{\text{cp}} = \frac{\Delta t_{\text{н}} - \Delta t_{\text{к}}}{\ln \Delta t_{\text{н}} / \Delta t_{\text{к}}}. \quad (4.4)$$

Здесь $\Delta t_{\text{н}}$, $\Delta t_{\text{к}}$ – разность температур газов внутри бадьи и воздуха в кольцевом зазоре в верхней и нижней части бадьи. В данном случае отношение $\Delta t_{\text{н}}/\Delta t_{\text{к}} \approx 3$, т. е. больше критического значения – 0,6, и поэтому Δt_{cp} можно рассчитывать, как среднеарифметическое.

В данном случае тепло передается, практически, только за счет конвекции от дымовых газов к стенке обечайки и от нее воздуху, т. е. $\alpha_{\text{в}} = \alpha_{\text{кв}}$ и $\alpha_{\text{д}} = \alpha_{\text{кд}}$.

Скорость движения дымовых газов внутри бадьи составляет ориентировочно 10–15 м/с при рабочих условиях и порозности $< 0,4$.

Коэффициент теплопередачи в этих условиях составляет $K = 18 - 20 \text{ Вт/м}^2\text{К}$.

Отсюда потери составят при максимальной продувке до 30 МДж/т или $\sim 0,86 \text{ м}^3$ природного газа на 1 т шихты. Эти потери могут быть исключены при использовании для нагрева шихты несколь-

ких сменных бадей, позволяющих обеспечить паузу между циклами нагрева шихты для охлаждения корпуса. На практике это количество составляет 2–3 бадей на одну установку ВПШ.

Таким образом, потери тепла в установках ВПШ с бадьями-термосами обусловлены практически только температурой отходящих газов и легко поддаются контролю и управлению.

4.2. Компьютерное моделирование сложных нагруженных узлов печей

Ротационные наклоняющиеся плавильные печи (РНП) – новый тип печей, популярность которых стремительно растет в литейном производстве и металлургии. Сегодня эти печи выходят на лидирующее место в металлургии вторичных цветных сплавов: при производстве алюминиевых, цинковых, свинцовых, медных и других сплавов из стружки, мелкого скрапа, шлама, шлака и т. д. (рисунок 4.3).

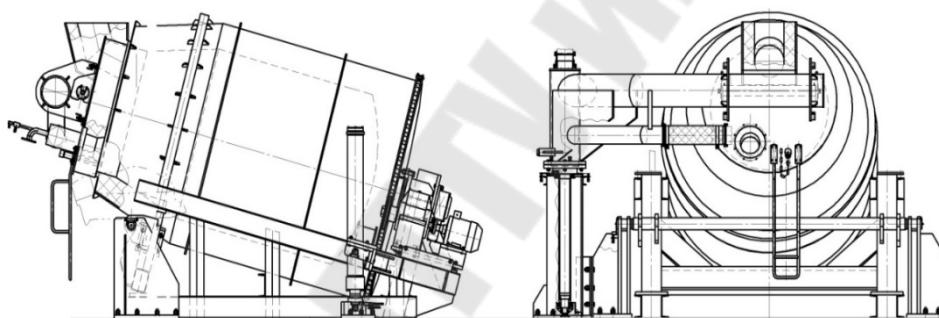


Рис. 4.3. Общий вид ротационный, наклоняющийся плавильной печи полезной емкостью 3,75 м³

РНП обладают рядом преимуществ при обработке дисперсных материалов, особенно при рециклинге металлоотходов. Вместе с тем печи имеют сложный привод, который должен обеспечить вращение корпуса печи с регулируемой скоростью, наклон печи на 180 °, отвод крышки на 180 ° и др. Расчет и конструирование основных узлов РНП представляет большие трудности, так как все элементы печи являются тяжело нагруженными, работают при высокой температуре и должны обладать высокой жесткостью и большим запасом прочности с учетом случайных динамических нагрузок. В большинстве случаев единственным методом разработки является компьютерное моделирование. Примером такого конструирования служит разработка одного из узлов РНП – стойки поворотной крышки, на которой установлены горелки, отвод газов, аппаратура управления и др.

Стойка крышки РНП является одним из наиболее ответственных узлов данного агрегата. Ее функции заключаются в повороте крышки печи и удержании ее в статическом положении. Данный узел должен обладать достаточной жесткостью и прочностью, так как на нее действуют большие изгибающие моменты и напряжения.

В результате эксплуатации РНП емкостью 15 т, произошла пластическая деформация стойки крышки, повлекшая за собой аварийную остановку работы печи (рисунок 4.4). Причиной послужил малый запас прочности и недостаточная жесткость конструкции.

Цель исследования: улучшение конструкции стойки крышки РНП и математическом моделировании данного узла под нагрузкой.



Рис. 4.4. Фотографии, вышедшей из строя, стойки крышки ротационной наклоняющейся плавательной головки

В качестве программного обеспечения для проверки конструкции на прочность использовался модуль инженерного анализа Simulation программного комплекса SolidWorks. В процессе моделирования выполнен следующий ряд действий:

1. Построена 3D модель узла согласно чертежам.
2. Выбран статический тип исследования.
3. Для деталей модели выбраны материалы: 90MnCrV8 – для шариков и колец подшипников, AISI 1035 (SS) – для всех остальных деталей.
4. Определены соединения деталей.
5. Нагрузка приложена на верхнюю грань фланца посредством дистанционной нагрузки в 3000 кг.

6. Крепления определены посредством фиксированной геометрии. Для данного узла креплениями являются нижняя и вертикальная плита.

7. Построена сетка на основе кривизны.

8. Построены эпюры напряжения, перемещения, деформации и запаса прочности.

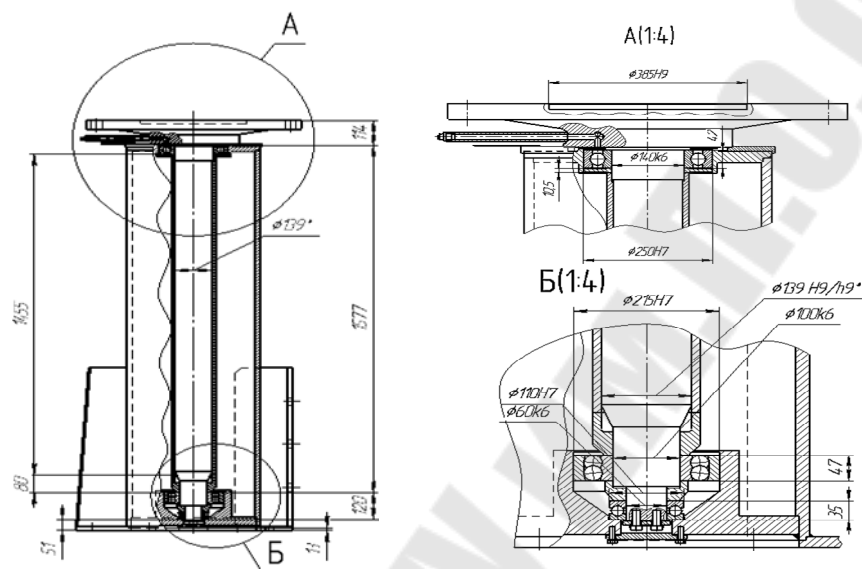


Рис. 4.5. Первоначальная конструкция стойки крышки ротационной наклоняющейся плавильной печи

Максимальные напряжения, действующие в кольце верхнего радиального подшипника улучшенной конструкции стойки крышки РНП, составляют 578,5 МПа. Величина коэффициента запаса прочности составляет 0,63.

Для наглядности результатов проведено моделирование первоначальной конструкции стойки крышки РНП с аналогичными настройками исследования. В результате получена следующая эпюра (рисунок 4.7). Эпюра напряжений представлена в деформированном результате, при шкале деформации равной 21,3. Максимальные напряжения, действующие на нижней грани контакта фланца и оси стойки, составляют 1038,4 МПа. Минимальное значение коэффициента запаса прочности составляет 0,32.

Сравнивая полученные эпюры, видно, что модель с первоначальной конструкцией подвергается более значительным деформациям, при аналогичном приложении нагрузки, способе соединения и крепления.

Численно анализируя полученные результаты, делаем вывод, что стойка крышки РНП с улучшенной конструкцией обладает лучшими механическими характеристиками по сравнению с исходным вариантом узла. Максимальное напряжение действующее в модели снизилось на 80 %, а минимальное значение коэффициента запаса прочности увеличилось вдвое.

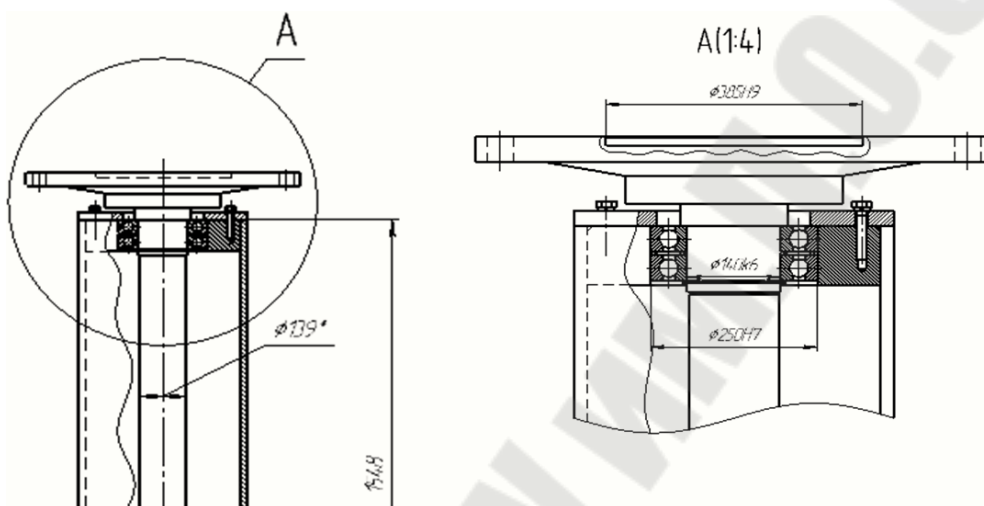


Рис. 4.6. Улучшенная конструкция стойки крышки ротационной наклоняющейся плавильной печи

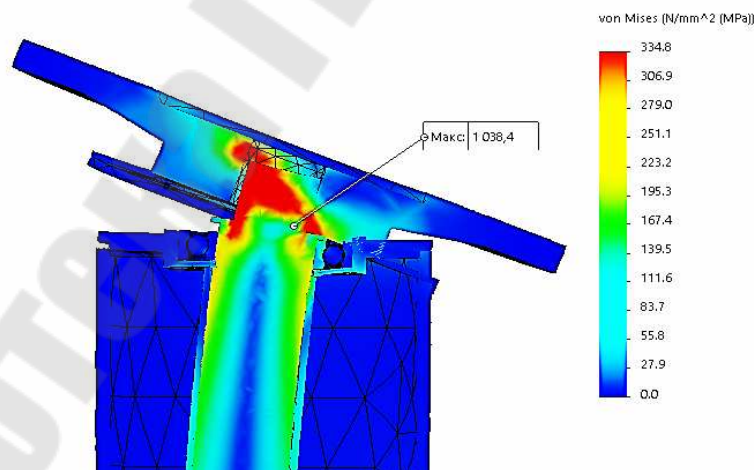


Рис. 4.7. Эпюра напряжений стойки крышки ротационной наклоняющейся плавильной печи первоначальной конструкции

Для достижения наиболее высокого запаса прочности, удовлетворяющего требованиям рабочей установки в литейном цеху, разработана инновационная конструкция стойки крышки РНП. Отличи-

тельная особенность данного устройства узла заключается в верхней части изделия.

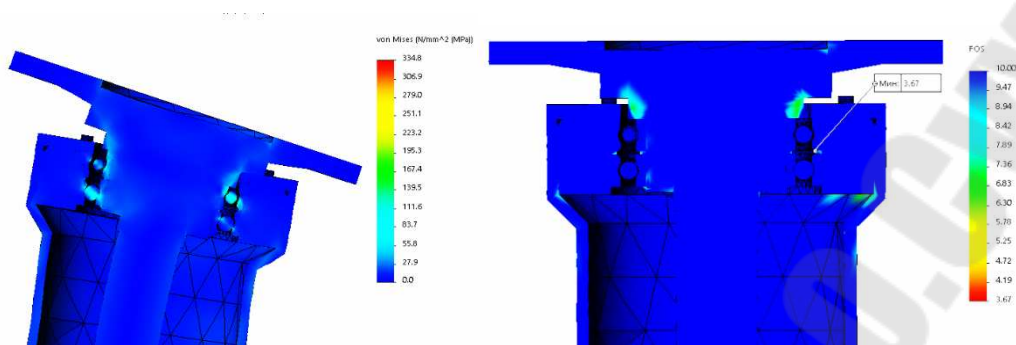


Рис. 4.8. Эпюра напряжений и запаса прочности стойки крышки ротационной наклоняющейся плавильной печи инновационной конструкции

Эпюра напряжений представлена в деформированном результате, при шкале деформации равной 235,1. Максимальные напряжения, действующие при контакте внутреннего кольца и шариков подшипника, составляют 334,8 МПа. Используя инновационную конструкцию стойки крышки, напряжения по критерию фон Мизеса уменьшаются в 4,4 раза, по сравнению с первоначальной конструкцией, а минимальный запас прочности возрастает на порядок. Полученные результаты полностью удовлетворяют требованиям эксплуатации РНП. Разработанная на их основе конструкция изготовлена и успешно внедрена на производстве.

4.3. Моделирование литейных процессов

При изучении литейных процессов очень часто бывает трудно исследовать какое-либо явление в производственных условиях. В таких случаях прибегают к моделированию, т. е. к воспроизведению явления в лабораторных условиях. Не всегда удается построить лабораторную модель полностью подобную производственному явлению. В таких случаях проводят приближенное моделирование.

В основе построения модели лежит принцип подобия явлений. Явления подобны, если они описываются одной и той же системой дифференциальных уравнений, а безразмерные критерии подобия, составленные из начальных и граничных условий, равны друг другу. К безразмерным критериям относятся числа Рейнольдса Re , Фурье Fo , Био Bi , Нуссельта Nu , Прандтля Pr и т.д.

4.3.1. Нагрев металлического вала

Дана длинная цилиндрическая металлическая отливка (например, прокатный валок). Отливка нагревается в печи и после определенного времени нагрева τ_n измеряется распределение температуры в отливке. Для упрощения изучения распределения температур в вале применено моделирование нагрева вала из другого металла. Найти радиус модели вала.

Условимся, что здесь и далее все величины, которые относятся к реальному явлению, обозначить индексом «Н» (натура), а все величины модели – с индексом «М».

В задаче заданы следующие величины:

λ_n, λ_m - коэффициенты теплопроводности металла соответственно природы и модели, $\text{Вт}/\text{м} \cdot \text{К}$;

a_n, a_m - коэффициенты температуропроводности металла природы и модели, $\text{м}^2/\text{с}$;

α_n, α_m - коэффициенты теплоотдачи при нагреве металла в печи, $\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}$.

Известен размер (диаметр) вала природы l_n и время τ_n через которое необходимо измерить распределение температуры в вале.

В теории моделирования тепловых явлений показано, что для подобия нагрева металла в природе и на модели должно соблюдаться равенство двух критериев – Био ($Bi = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda}$) и Фурье ($Fo = \frac{a \cdot \tau}{l^2}$).

1. Из условия равенства критериев Био $Bi_n = Bi_m$ находим диаметр вала модели

$$\frac{\alpha_n \cdot l_n}{\lambda_n} = \frac{\alpha_m \cdot l_m}{\lambda_m} \quad (4.5)$$

$$\text{или } l_m = \frac{\alpha_n \cdot \lambda_m}{\lambda_n \cdot \alpha_m} \cdot l_n = \frac{1,0 \cdot 300}{30 \cdot 10} \cdot 0,80 = 0,8 \text{ м.}$$

2. Из условия равенства критериев Фурье $Fo_n = Fo_m$ находим время τ_m по прошествии которого распределение температуры в модели будет таким же, как и на натуре:

$$\frac{\alpha_n \cdot \tau_n}{l_n^2} = \frac{\alpha_m \cdot \tau_m}{l_m^2} \text{ или } \tau_m = \frac{\alpha_n \cdot l_m^2}{l_n^2 \cdot \alpha_m} \cdot \tau_n = \frac{0,60 \cdot 10^{-5} \cdot 0,8^2}{3,0 \cdot 10^{-5} \cdot 0,8^2} \cdot 1 = 0,2 \text{ ч}$$

Ответ: $l_m = 0,8$ м; $\tau_m = 0,2$ ч.

4.3.2. Перемешивание стали в разливочном ковше

После выпуска стали в ковш, до начала разливки по формам, происходит естественная конвекция расплава. Конвекция характеризуется двумя безразмерными критериями – Грасгофа $Gr = \frac{g \cdot l^3 \cdot \beta \cdot \Delta t}{\nu}$

и Прандтля $Pr = \frac{\nu}{a}$ где g - ускорение силы тяжести, $\frac{м}{с^2}$; l - характерный размер ковша, м; β - коэффициент расширения жидкости, $град^{-1}$; Δt - разность температур металла в ковше, град; ν - кинематическая вязкость жидкости, $\frac{м^2}{с}$. Критерий Грасгофа характеризует свойства жидкости в ковше, а критерий Прандтля – физические свойства самой жидкости.

Предположим, что перемешивание стали в ковше моделируют на сосуде, заполненном горячей водой. Определим критерий Прандтля для стали и воды. Для стали $\nu = 0,6 \cdot 10^{-6}$ м²/с; $a = 4 \cdot 10^{-6}$ м²/с; кри-

терий Прандтля $Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{0,6 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}} = 0,15$. Для воды при 20 °С

$\nu = 1,02 \cdot 10^{-6}$ м²/с, а при 70 °С $\nu = 0,4 \cdot 10^{-6}$ м²/с; коэффициент температуропроводности в обоих случаях принят одним и тем же $a = 0,147 \cdot 10^{-6}$ м²/с. Критерий Прандтля для воды при 20 °С

$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{1,02 \cdot 10^{-6}}{0,147 \cdot 10^{-6}} = 6,95$, а при 70 °С $Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{0,40 \cdot 10^{-6}}{0,147 \cdot 10^{-6}} = 2,7$.

Сравнение критериев Прандтля для стали (0,15) и для воды при различных температурах (6,95 и 2,7) показывает, что моделирование перемешивания стали в ковше с помощью воды будут приближенными.

В этом случае моделирование можно провести только по критерию Грасгофа.

В задаче рассматривается моделирование перемешивания стали в 40-тонном ковше с диаметром и высотой расплава ≈ 2 м. Вычислим критерий Грасгофа для этого ковша. Принимаем коэффициент расширения стали $\beta = 1 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$, а перепад температур в ковше $\Delta t = 100$ °С. Значение критерия Грасгофа

$$Gr = \frac{g \cdot l^3 \cdot \beta \cdot \Delta t}{\nu^2} = \frac{9,8 \cdot 2^3 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{(0,6 \cdot 10^{-6})^2} = 2,18 \cdot 10^{12}.$$

Известно, что при $Gr = 10^6$ поток расплава турбулентен. Значение Gr для стали в разливочных ковшах $> 10^6$, поэтому поток расплава в ковше всегда турбулентен.

При моделировании было принято, что температура внутренней поверхности ковша есть величина постоянная, равная температуре кристаллизации стали. Модель ковша была сделана в виде кессона, охлаждаемого проточной водой, а в ковш заливали горячую воду с температурой $t_{гор}$. Приняли, что температура охлаждающей воды у стенки и температура воды, соприкасающейся со стенкой, равны друг другу и составляют $t_{хол}$.

Задача состоит в том, чтобы найти:

1) диаметр модели ковша l_m при условии равенства критериев Грасгофа для 40 – тонного ковша стали и горячей воды в модели ($Gr = 2,18 \cdot 10^{12}$);

2) диаметр модели ковша l_m из условия, что расплав в ковше турбулентен, т. е. $Gr \geq 10^6$.

В выражение для критерия Грасгофа входит произведение $\beta \Delta t$. Из физики известна зависимость между объемом воды, величиной β и значением Δt .

$$V_t = V_0(1 + \beta \cdot \Delta t),$$

где V_t - удельный объем горячей воды (V_2);

V_0 - удельный объем холодной воды (V_x).

Из приведенного выражения

$$\beta \cdot \Delta t = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{V_2 - V_x}{V_x}.$$

Критерий Грасгофа для модели можно записать следующим образом:

$$Gr = \frac{g \cdot l_m^3 \cdot \beta \cdot \Delta t}{\nu^2} = \frac{g \cdot l_m^3}{\nu^2} \cdot \frac{V_z - V_x}{V_x}$$

По условию $Gr_m = Gr_n$

1. Принимаем, что $Gr_m = 2,18 \cdot 10^{12}$ —, тогда

$$\frac{g \cdot l_m^3}{\nu^2} \cdot \frac{V_z - V_x}{V_x} = 2,18 \cdot 10^{12} \quad \frac{9,8 \cdot l_m^3}{(1,02 \cdot 10^{-6})^2} \times \frac{1,0044 - 1,0003}{1,0003} = 2,18 \cdot 10^{12};$$

$$\frac{9,8 \cdot l_m^3}{1,02 \cdot 10^{-12}} \times 0,0040 = 2,18 \cdot 10^{12}; l_m^3 = \frac{2,18 \cdot 10^{12} \cdot 1,02 \cdot 10^{-12}}{9,8 \cdot 0,0040} = \frac{2,22}{0,039} = 57$$

$$l_m^3 = \sqrt[3]{57} = 3,86 \text{ м.}$$

2. Если $Gr_n = 10^6$ (турбулентный поток), то

$$\frac{9,8 \cdot l_m^3}{1,02 \cdot 10^{-12}} \times 0,0040 = 10^6;$$

$$l_m^3 = \frac{10^6 \cdot 1,02 \cdot 10^{-12}}{9,8 \cdot 0,0040} = \frac{1,02 \cdot 10^{-6}}{0,039} = 26,4 \cdot 10^{-6}$$

$$l_m^3 = \sqrt[3]{26,4 \cdot 10^{-6}} = 2,98 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Ответ: характерный размер модели может быть в пределах $2,98 \cdot 10^{-2} \dots 3,86 \text{ м}$

4.3.3. Моделирование потока расплава в канале литниковой системы по критерию Фруда

В потоке расплава в канале литниковой системы (например сток, литниковый ход и т. п.) происходят процессы взаимного перемешивания слоев жидкости, растворения частиц модификатора, прогрев стенок формы расплавом и т. д. Полное моделирование этих процессов невозможно, поэтому прибегают к приближенному моделированию. Одним из таких способов является моделирование по критерию Фруда.

$$Fr = \frac{v^2}{g \cdot l} \quad (4.6)$$

где v — скорость потока расплава, м/с;

g - ускорение силы тяжести, м/с²; l - характерный размер (длина, диаметр) модели, м.

Моделирование по критерию Фруда применяется в случаях, когда в изучаемом процессе важным является соотношение между скоростью потока и ускорением силы тяжести. Для природы и модели равенство критериев Фруда можно записать следующим образом:

$$Fr_n = Fr_m \quad \text{или} \quad \frac{v_n^2}{g \cdot l_n} = \frac{v_m^2}{g \cdot l_m} \quad \frac{v_n^2}{l_n} = \frac{v_m^2}{l_m}$$

Задача формулируется так:

а) если известны скорости потоков расплава природы v_n и модели v_m , а также длина литникового природы l_n , то необходимо найти длину литникового канала модели l_m . Из предыдущего выражения для равенства критериев Фруда модели и природы:

$$l_m = l_n \times \left(\frac{v_m^2}{v_n^2} \right)$$

Пример решения

$$l_m = l_n \times \left(\frac{v_m^2}{v_n^2} \right) = 4,0 \cdot \frac{85^2}{75^2} = 4,0 \cdot 1,29 = 5,2 \text{ см.}$$

б) если известны длины литниковых каналов природы l_n и модели l_m , а также скорость потока расплава природы v_n , то необходимо найти скорость потока расплава в канале литникового хода модели v_m из предыдущего выражения равенства критериев Фруда модели и природы.

$$v_m^2 = v_n^2 \times \left(\frac{l_m}{l_n} \right) \quad \text{или} \quad v_m = v_n \times \sqrt{\frac{l_m}{l_n}}$$

Пример решения:

$$v_m = v_n \times \sqrt{\frac{l_m}{l_n}} = 90 \cdot \sqrt{\frac{6,0}{8,6}} = 90 \cdot 0,84 = 75,5 \text{ см/с.}$$

Ответ: а) $l_m = 6,0$ см б) $v_n = 75,5$ см/с.

4.3.4. Моделирование потока расплава в канале литниковой системы по критерию Рейнольдса

Моделирование по числу Рейнольдса, также как и моделирование по числу Фруда является приближенным. Оно применяется в том случае, когда необходимо создать турбулентный режим движения жидкости на модели, так же, как и в натуре (жидкий металл). Найденно, что в опытах с водой турбулентность потока возникает для литниковых систем при числах Рейнольдса Re примерно в три раза меньше, чем в опытах с жидким чугуном. Область турбулентности, т. е. переход от ламинарного потока к турбулентному, наступает в литниковых системах для чугуна при $Re \approx 10000$, а для воды – при значении $Re \approx 3000$.

Из условия $Re_n \div Re_m = 3$ найти характерный диаметр литниковой системы модели с водой d_m , при котором поток жидкости турбулентен. Задачу решить для двух отношений скоростей потоков расплава в натуре v_n и на модели v_m : а) при $\frac{v_n}{v_m} < 1$; б) при $\frac{v_n}{v_m} > 1$.

Пример решения. Известно, что критерий $Re = \frac{v \cdot d}{\nu}$, где v - скорость потока; d - диаметр литникового канала; ν - кинематическая вязкость жидкости. По условию задачи $Re_n : Re_m = 3$ или

$$\frac{v_n \cdot d_n}{\nu_n} \div \frac{v_m \cdot d_m}{\nu_m} = 3$$

Из этого выражения получаем, что

$$d_m = \frac{1}{3} \cdot \frac{v_n}{v_m} \cdot \frac{\nu_n}{\nu_m} \cdot d_n$$

а) по условию задачи при $\frac{v_n}{v_m} = 0,3$ имеем

$$d_m = \frac{1}{3} \cdot 0,3 \cdot \frac{1,31 \cdot 10^{-6}}{0,40 \cdot 10^{-6}} \cdot 30 \text{ мм} = 9,8 \text{ мм}.$$

б) при $\frac{v_n}{v_m} = 1,8$ имеем

$$d_m = \frac{1}{3} \cdot 1,8 \cdot \frac{1,31 \cdot 10^{-6}}{0,40 \cdot 10^{-6}} \cdot 30 \text{ мм} = 59 \text{ мм}$$

- Ответ: а) при $\frac{v_H}{v_M} = 0,3$; $d_m = 9,8 \text{ мм}$;
 б) при $\frac{v_H}{v_M} = 1,8$; $d_m = 59 \text{ мм}$.

4.3.5. Моделирование непрерывной разливки стали

Наиболее полно непрерывную разливку стали моделируют по трем критериям: Рейнольдса Re , Вебера We и Фруда Fr . Поток жидкого металла всегда турбулентен, поэтому от величины критерия Рейнольдса никакие характеристики потока жидкости практически не зависят. В этом случае моделирование проводят по равенству двух критериев. – Вебера и Фруда. Критерий Вебера можно записать следующим образом $We = \frac{\rho \cdot g \cdot l^2}{\sigma}$, а критерий Фруда - $Fr = \frac{v^2}{g \cdot l}$, где ρ - плотность жидкости; l - характерный размер потока; ρ - поверхностное натяжение; v - скорость потока жидкости; g - ускорение силы тяжести. Как видно из приведенных выражений, критерий Вебера содержит две характеристики жидкости σ , ρ и одну характеристику модели – ее размер l . Критерий Фруда содержит две характеристики жидкости – скорость потока v и характерный размер l .

Расчет модели непрерывной разливки стали производится в следующей последовательности:

а) выбираем моделирующую жидкость с определенными значениями ρ и σ ;

б) из условия равенства критериев Вебера в натуре и на модели находим характерный размер модели; для этого используем следующие выражения;

$$W_{l_H} = W_{l_M} \quad \text{или} \quad \frac{\rho_H \cdot g \cdot l_H^2}{\sigma_H} = \frac{\rho_M \cdot g \cdot l_M^2}{\sigma_M}, \quad (4.6)$$

$$\text{отсюда } l_M = l_H \cdot \sqrt{\frac{\rho_H \cdot \sigma_M}{\sigma_H \cdot \rho_M}}; \quad (4.7)$$

в) из условия равенства критериев Фруда в натуре и на модели находим скорость потока расплава на модели v_M ; для этого используем следующие выражения:

$$Fr_H = Fr_M \quad \text{или} \quad \frac{v_H^2}{g \cdot l_H} = \frac{v_M^2}{g \cdot l_M}, \quad (4.8)$$

$$\text{отсюда } v_M = v_H \sqrt{\frac{l_M}{l_H}} \quad (4.9)$$

г) при непрерывной разливке стали металлический расплав заливают в кристаллизатор прямоугольного сечения, одна из сторон которого принята за характерный размер l ; отношения площадей сечения f_1 и f_2 двух кристаллизаторов с размерами l_1 и l_2 , очевидно, пропорциональны отношению квадратов размеров l_1^2 и l_2^2

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} \quad (4.10)$$

Расход жидкости Q , м³/ч или м³/с, через кристаллизатор пропорционален произведению скорости потока на площадь сечения

$$\frac{Q_M}{Q_H} = \frac{f_M \cdot v_M}{f_H \cdot v_H} = \frac{l_M^2}{l_H^2} \cdot \frac{v_M}{v_H} \quad (4.11)$$

Используя выражение (4.9) и формулы (4.11) получим

$$\frac{Q_M}{Q_H} = \frac{l_M^2}{l_H^2} \cdot \sqrt{\frac{l_M}{l_H}} = \left(\frac{l_M}{l_H} \right)^{5/2}. \quad (4.12)$$

В задаче используются физические свойства стали ρ , ν , размер кристаллизатора и расход металла в нем Q , м³/ч. используя эти данные, необходимо по выбранной моделирующей жидкости найти размер кристаллизатора модели и расход моделирующей жидкости Q_M в м³/ч, а также л/мин.

Пример решения.

1. По формуле (4.7) характерный размер модели

$$l_{1M} = l_{1H} \sqrt{\frac{\rho_H \cdot \sigma_M}{\rho_M \cdot \sigma_H}} = 400 \text{ мм} \cdot \sqrt{\frac{7000 \cdot 72,1 \cdot 10^{-3}}{1750 \cdot 1,2}} = 400 \text{ мм} \cdot \sqrt{4,0 \cdot 60 \cdot 10^{-3}} =$$
$$= 400 \cdot \sqrt{240 \cdot 10^{-3}} = 400 \cdot \sqrt{24 \cdot 10^{-2}} = 400 \cdot 4,9 \cdot 10^{-1} = 196$$

2. Второй размер кристаллизатора модели вычислим следующим образом:

$$l_{2M} = l_{2H} \sqrt{\frac{\rho_M \cdot \sigma_M}{\rho_H \cdot \sigma_H}} = 100 \text{ мм} \cdot 4,9 \cdot 10^{-1} = 49 \text{ мм}.$$

Из формулы (4.12) найдем расход жидкости модели

$$Q_M = Q_G \left(\frac{l_M}{l_G} \right)^{5/2} = 3,88 \text{ м}^3/\text{ч} \cdot 0,49^{5/2} = 3,88 \text{ м}^3/\text{ч} \cdot 0,168 = 0,65 \text{ м}^3/\text{ч}$$

пересчитаем расход жидкости из м³/ч в л/мин:

$$1 \text{ м}^3/\text{ч} = 1000 \text{ л} / 60 \text{ мин} = 1,67 \text{ л/мин};$$

поэтому $Q_M = 0,65 \cdot 16,7 = 10,9 \text{ л/мин}$.

Ответ: размер модели кристаллизатора 196×49 мм
расход жидкости на модели 10,9 л/мин.

4.3.6. Моделирование естественной конвекции жидкой стали внутри затвердевающей отливки.

При моделировании потоков жидкой стали внутри затвердевающей отливки часто в качестве моделирующей жидкости используют горячую воду. Моделирование проводят преимущественно применительно к какому-либо конкретному моменту времени затвердевания металла с известными значениями характеристик стали (β - коэффициент расширения, Δt - перепад температур в жидкости, a - коэффициент температуропроводности, ν - кинематическая вязкость и т.д.) и меняются критерии подобия металлического расплава и моделирующей жидкости; в этом случае необходимо строить новую модель.

При моделировании учитывают, что интенсивность охлаждения жидкости определяет скорость ее перемещения и характер потоков. Интенсивность охлаждения жидкости зависит от критерия Нуссельта.

$$Nu = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda}, \quad (4.13)$$

где d - характерный размер тела;
 λ - коэффициент теплопроводности материала
 α - коэффициент теплоотдачи от тела во внешнюю среду.

В теории моделирования для естественной конвекции жидкости найдено, что критерий Нуссельта зависит от произведения двух критериев Грасгофа и Прандтля. Зависимость имеет следующий вид:

$$Nu = f(Gr, Pr^2) \quad (4.14)$$

Для моделирования естественных потоков жидкости необходимо, чтобы соблюдалось следующее равенство критериев:

$$(Gr \cdot Pr^2)_H = (Gr \cdot Pr^2)_M \quad (4.15)$$

В выражении (4.15) произведение $Gr \cdot Pr^2$ можно представить так:

$$(Gr \cdot Pr^2) = \left(\frac{g \cdot l^3}{\nu^2} \cdot \beta \cdot \Delta t \right) \cdot \left(\frac{\nu}{a} \right)^2 = \frac{g \cdot l^3 \cdot \beta \cdot \Delta t}{a^2} \quad (4.16)$$

С учетом выражения (4.6) уравнение (4.15) можно записать так:

$$\left(\frac{g \cdot l^3 \cdot \beta \cdot \Delta t}{a^2} \right)_H = \left(\frac{g \cdot l^3 \cdot \beta \cdot \Delta t}{a^2} \right)_M \quad (4.17)$$

Задача ставится следующим образом: соблюдая геометрическое подобие модели по отношению к натуре, найти характерный размер модели l_M , если известны для модели (горячая вода) и натуре (жидкая сталь) значения величин l_H , a_H , $\rho_{\text{ш}}$, $\rho_{\text{ош}}$, Q_M , t_{GM} , $^{\circ}C$; t_{XM} , $^{\circ}C$; V_{GM} , V_{XM} , где a_H , a_M - температуропроводность материала натуре (сталь) и модели (вода); $\rho_{\text{ш}}$, $\rho_{\text{ош}}$ - плотность жидкой стали при более высокой ($\rho_{\text{ш}}$) и более низкой ($\rho_{\text{ош}}$) температуре; t_{GM} и t_{XM} - температура воды и модели, соответственно в ее центре и на охлаждающейся

поверхности; V_{GM} и V_{XM} - удельный объем воды, соответственно в ее центре и на охлаждающейся поверхности.

Из равенства (4.17) получим

$$l_M = l_H \times \sqrt[3]{\frac{(\beta \cdot \Delta t)_H}{(\beta \cdot \Delta t)_M} \times \frac{a_M^2}{a_H^2}} \quad (4.18)$$

В выражении (4.18) по заданным величинам в условиях задачи величинам необходимо вычислить значения величин $(\beta \cdot \Delta t)_H$ и $(\beta \cdot \Delta t)_M$.

Значение $(\beta \cdot \Delta t)_H$ для жидкой стали считается следующим образом.

Если $\rho_{тн}$ и $\rho_{он}$ - плотность стали, г/см³, то удельный объем ее равен соответственно $\frac{1}{\rho_{тн}}$ и $\frac{1}{\rho_{он}}$ в см³/г.

Из физики известна зависимость объема жидкости при изменении температуры

$$V_t = V_0(1 + \beta \cdot \Delta t), \quad (4.19)$$

где β - коэффициент объемного расширения жидкости;

Δt - разность температур более холодного (V_0) и более V_t горячего объемов.

Выражение (4.19) для стали можно записать так:

$$\frac{1}{\rho_{тн}} = \frac{1}{\rho_{он}} \cdot (1 + (\beta \cdot \Delta t)_H),$$

откуда

$$\frac{\rho_{он} - \rho_{тн}}{\rho_{тн}} = (\beta \cdot \Delta t)_H. \quad (4.20)$$

Для моделирующей жидкости (вода) уравнение (4.19) запишем так:

$$V_{ГМ} = V_{ХМ}(1 + (\beta \cdot \Delta t)_M); \text{ откуда } (\beta \cdot \Delta t)_M = \frac{V_{ГМ} - V_{ХМ}}{V_{ХМ}} \quad (4.21)$$

Пример решения.

1. По уравнению (4.20) находим для стали (натура) выражение

$$(\beta \cdot \Delta t)_H = \frac{\rho_{0H} - \rho_{тH}}{\rho_{тH}} = \frac{7,20 - 6,50}{6,50} = \frac{0,70}{6,50} = 0,108.$$

2. По выражению (4.21) находим для воды (модель) значение

$$(\beta \cdot \Delta t)_M = \frac{V_{ГМ} - V_{ХМ}}{V_{ХМ}} = \frac{1,0044 - 1,0033}{1,0003} = 0,0041.$$

3. По выражению (4.18) находим размер модели

$$\begin{aligned} l_M &= l_H \sqrt[3]{\frac{(\beta \cdot \Delta t)_H}{(\beta \cdot \Delta t)_M} \times \frac{a_M^2}{a_H^2}} = 1,00 \cdot \sqrt[3]{\frac{0,108}{0,0041} \times \frac{(0,135 \cdot 10^{-6})^2}{(0,040 \cdot 10^{-4})^2}} = \\ &= 1,00 \cdot \sqrt[3]{26,4 \cdot (3,38 \cdot 10^{-2})^2} = 1,00 \cdot \sqrt[3]{26,4 \cdot 11,4 \cdot 10^{-4}} = \\ &= 1,00 \cdot \sqrt[3]{30 \cdot 10^{-3}} = 3,12 \cdot 10^{-1} = 0,312 \text{ м.} \end{aligned}$$

Ответ: $l_M = 0,312$ м.

4.3.7. Моделирование всплывания неметаллических включений в жидкой стали

В жидкой стали очень часто содержатся частицы различных неметаллических материалов или включений – кремнезем, глинозем, шлак, огнеупоры. В спокойном металле эти включения всплывают. Если моделировать этот процесс, то следует учесть, то необходимо выбирать соответствующую моделирующую жидкость и твердые частицы какого-либо материала, моделирующие поведение частиц стали в жидкости модели. Как показано в теории моделирования масштаб радиуса M_r частиц модели r_M и включений стали r_H определяется из следующего выражения:

$$M_r = \frac{r_H}{r_M} = \sqrt{\frac{M_l \cdot M_v}{M_\tau \cdot M_\rho}}, \quad (4.22)$$

где M_l - линейный масштаб моделирования;

$$M_l = l_H / l_M$$

M_τ - временной масштаб моделирования;

$$M_\tau = \tau_H / \tau_M$$

M_ν - масштаб кинематической вязкости жидкости

при моделировании; $M_\nu = \nu_H / \nu_M$

M_ρ - масштаб плотности при моделировании.

Связь между временными и линейными масштабами моделирования подсчитывается из условия идентичности критерия.

$$F_{0H} = F_{0M} \quad \text{или} \quad \frac{a_H \cdot \tau_H}{l_H^2} = \frac{a_M \cdot \tau_M}{l_M^2} \quad (4.23)$$

$$\text{Из (4.23)} \quad M_l = \frac{l_H}{l_M} = \sqrt{\frac{a_H \cdot \tau_H}{a_M \cdot \tau_M}} \quad (4.24)$$

Коэффициент M_l можно определить также из условия $(Gr \cdot Pr^2)_H = (Gr \cdot Pr^2)_M$. Из уравнения (4.18) получаем

$$M_l = \frac{l_H}{l_M} = \sqrt{\left(\frac{a_H}{a_M}\right)^2 \times \frac{(\beta \cdot \Delta t)_M}{(\beta \cdot \Delta t)_H}} \quad (4.25)$$

Сопоставляя уравнения (4.24) и (4.25), можно сначала из выражения (4.25) определить масштаб M_l , а затем из выражения (4.24) найти M_τ . Масштабы M_l и M_τ также могут быть заданы заранее. Масштаб M_ν вычисляется легко по заданным величинам ν_H для стали и ν_M для моделирующей жидкости.

Масштаб плотности найти из следующего выражения:

$$M_{\rho} = \frac{\rho_{НС} - \rho_{НВ}}{\rho_{МЖ} - \rho_{Mr}} \times \frac{\rho_{МЖ}}{\rho_{НС}}, \quad (4.26)$$

где $\rho_{НС}$, $\rho_{НВ}$ - плотность жидкой стали и включений в ней неметаллических материалов, кг/м³;

$\rho_{МЖ}$, ρ_{Mr} - плотность моделирующей жидкости и материала моделирующих твердых частиц, кг/м³.

Задача для расчета поставлена следующим образом.

Моделируется всплывание в жидкой стали неметаллических частиц. Выбрана моделирующая жидкость и материал моделирующих частиц. Заданы заранее коэффициенты моделирования – линейный M_l и временной M_{τ} , а также известна плотность всех материалов. Необходимо найти масштаб моделирования радиуса частиц неметаллических включений M_r .

Пример решения.

1. Находим масштаб кинематической вязкости жидкости

$$M_v = \frac{\nu_H}{\nu_M} = \frac{40 \cdot 10^{-8}}{0.95 \cdot 10^{-6}} = 42.3 \cdot 10^{-2}$$

2. Находим масштаб плотностей при моделировании

$$\begin{aligned} M_{\rho} &= \frac{\rho_{НС} - \rho_{НВ}}{\rho_{МЖ} - \rho_{Mr}} \times \frac{\rho_{МЖ}}{\rho_{НС}} = \frac{6600 - 3500}{2940 - 1800} \times \frac{2940}{6600} = \\ &= \frac{3100}{1140} \cdot \frac{2940}{6600} = 2.72 \cdot 0.44 = 1.2 \end{aligned}$$

3. Находим масштаб радиусов M_r частиц включений в стали и частиц включений в моделирующей жидкости

$$M_r = \frac{r_H}{r_M} = \sqrt{\frac{M_l \cdot M_v}{M_{\tau} \cdot M_{\rho}}} = \sqrt{\frac{2,042,3 \cdot 10^{-2}}{1,0 \cdot 1,2}} = \sqrt{\frac{84,6 \cdot 10^{-2}}{1,2}} = 0,84$$

Ответ: $M_r = 0,84$.

4.4. Составление безразмерных комплексов подобия явлений по дифференциальным уравнениям

Существует следующее правило составления выражения для безразмерных комплексов подобия из дифференциальных уравнений:

а) в дифференциальном уравнении необходимо отбросить все знаки дифференцирования, все индексы и символы (например суммирования и др.); показатели степеней чисел отбрасывать нельзя;

б) полученное выражение разделить на один из его членов и таким образом получить безразмерные комплексы;

в) используя размерности величин, убедится в том, что полученные комплексы являются безразмерными.

Уравнение 1. Дифференциальное уравнение распространения тепла вдоль оси x имеет вид:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \omega_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad (4.27)$$

где t - температура, $^{\circ}\text{C}$; τ - время, с; ω_x - скорость перемещения источника тепла вдоль оси x , см/с; a - коэффициент температуропроводности металла, $\text{см}^2/\text{с}$.

Вариант 1. Все члены уравнения (4.27) после отбрасывания индексов и символов делить на первый член уравнения (4.27).

Дано: найти критерий подобия для истечения сыпучего материала из отверстия бункера.

Величины, которые характеризуют этот процесс: расход материала Q , кг/с; диаметр отверстия бункера l , м; средний размер сыпучего материала d , м; плотность материала ρ , $\text{кг}/\text{м}^3$; ускорение свободного падения g , $\text{м}/\text{с}^2$.

Пример решения.

а) В уравнении (4.27) отбрасываем все индексы и символы, тогда получим

$$\frac{x}{\tau} + \omega \cdot \frac{t}{x} = a \cdot \frac{t}{x^2} \quad (4.27a)$$

б) Делим (4.27a) на первый член уравнения

$$\frac{\frac{x}{\tau}}{\frac{x}{\tau}} + \frac{\omega \cdot \frac{t}{x}}{\frac{x}{\tau}} = \frac{a \cdot \frac{t}{x^2}}{\frac{x}{\tau}} \quad (4.27б)$$

После необходимых сокращений получим

$$1 + \omega \cdot \frac{\tau}{x} = a \cdot \frac{\tau}{x^2}. \quad (4.27B)$$

в) проверим безразмерность полученных критериев $K_1 = \omega \cdot \frac{\tau}{x}$ и

$$K_2 = a \cdot \frac{\tau}{x^2}.$$

$$[K_1] = \left[\omega \cdot \frac{\tau}{x} \right] = \frac{\text{см}/\text{с} \cdot \text{с}}{\text{см}} = \frac{\text{см}}{\text{с}} \times \frac{\text{с}}{\text{см}} = 1;$$

$$[K_2] = \left[a \cdot \frac{\tau}{x^2} \right] = \frac{\text{см}^2/\text{с} \cdot \text{с}}{\text{см}^2} = \frac{\text{см}^2}{\text{с}} \cdot \frac{\text{с}}{\text{см}^2} = 1.$$

Ответы: $K_1 = \omega \cdot \frac{\tau}{x}$; $K_2 = a \cdot \frac{\tau}{x^2}$.

4.5. Решение задачи оптимизации

Задачей оптимизации называется задача о поиске экстремума функции на заданном множестве допустимых решений. При постановке задачи оптимизации необходимо наличие объекта оптимизации и цели оптимизации. Обычно формулировка каждой задачи оптимизации требует нахождения экстремального значения лишь одной величины [53].

Как известно, экстремум может быть минимумом или максимумом, но стоит рассматривать только задачи поиска одного вида экстремума, например минимума функции, так как задачи на поиск максимума функции $f(x)$ легко сводятся к поиску минимума функции $-f(x)$: $\max_{x \in X} f(x) = \min_{x \in X} [-f(x)]$.

Методы оптимизации классифицируются по различным признакам, в частности:

1 по числу параметров:

- одномерная оптимизация;
- многомерная оптимизация,

2 по точности решения:

- аналитические методы;
- численные методы.

Постановка задачи

Стандартная математическая задача оптимизации формулируется так:

Среди элементов \bar{x} , образующих множества X и ограничений $g_i(\bar{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m$, найти такой элемент \bar{x}^* , при подстановке которого функция $f(x)$ имеет минимальное значение $f(\bar{x}^*)$. При этом необходимо задать:

1. Допустимое множество, то есть $X = \{\bar{x} | g_i(\bar{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \in R^n$;
2. Целевую функцию, то есть отображение $f: X \rightarrow R$;
3. Критерий поиска.

Тогда решить задачу $\min_{x \in X} f(x)$ означает: либо доказать, что решения нет, либо найти \bar{x}^* .

4.6. Численные методы решения задачи одномерной оптимизации

Оптимизация функции одной переменной является наиболее простой из задач оптимизации. Однако, эта задача занимает очень важное место в теории оптимизации. Это связано с тем, что задачи однопараметрической оптимизации достаточно часто встречаются в инженерной практике и являются составной частью более сложных методов многопараметрической оптимизации. Известно достаточно большое количество методов решения этой задачи. Рассмотрим лишь одну группу таких методов – методы сужения интервала неопределенности.

Постановка задачи

Дана функция $f(x)$. Найти локальный минимум этой функции с заданной точностью ε .

4.6.1. Этапы решения задачи

Нахождение минимума функции одной переменной $f(x)$ включает следующие этапы:

1. Выбор отрезка, на котором локализован один минимум. Производится исследование функции $f(x)$ для нахождения отрезков, содержащих по одному локальному минимуму.

2. Уточнение минимума. По выбранному алгоритму последовательно сужается отрезок, содержащий минимум, до такой степени, пока не станет выполняться условие по точности ε .

4.6.2. Метод двойного половинного деления

Одним из наиболее простых и достаточно эффективным методом поиска минимума функции одной переменной является метод двойного половинного деления. Этот метод позволяет значительно сократить объем вычислений, так как в нем последовательно сокращается интервал неопределенности с использованием информации, полученной на предыдущих этапах.

Пусть минимум функции $f(x)$ локализован на отрезке $[a; b]$. Требуется найти минимальное значение с точностью ε .

Графическая интерпретация метода.

Очевидно, что если функция $f(x)$ является унимодальной на отрезке $[a; b]$, то для того, чтобы сократить интервал неопределенности, необходимо вычислить значения функции как минимум в двух точках x_1 и x_2 , делящих отрезок $[a; b]$ внутренним образом. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то интервалом неопределенности будет отрезок $[x_1, b]$; если же $f(x_1) < f(x_2)$, то интервалом неопределенности будет отрезок $[a, x_2]$. Каждый из этих интервалов имеет длину соответственно $(b - x_1)$ и $(x_2 - a)$. Правило выбора точек x_1 и x_2 определяет метод решения задачи. В методе двойного половинного деления x_1 и x_2 определяются по следующим формулам: $x_1 = a + 0,25 \cdot (b - a)$; $x_2 = a + 0,75 \cdot (b - a)$. То есть сначала отрезок $[a; b]$ делится пополам, а затем каждая из половинок ещё раз делится пополам.

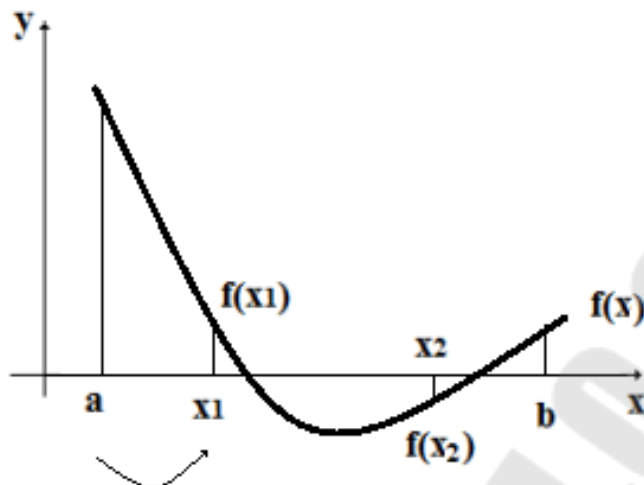


Рис. 4.8. Метод двойного половинного деления

Алгоритм метода

1. Ввод исходных данных: a , b , ε .
2. Определение положения точек x_1 , x_2 : $x_1 = a + 0,25 \cdot (b - a)$; $x_2 = a + 0,75 \cdot (b - a)$.
3. Проверка условия $f(x_1) < f(x_2)$. Если условие выполняется, то $b = x_2$, иначе $a = x_1$.
4. Проверка условия $(b - a) \leq \varepsilon$. Если условие выполняется, то переход к пункту 5, иначе переход к пункту 2.
5. Расчет закончен. Минимум находится в точке $x^* = (a + b) / 2$, минимальное значение функции на отрезке $[a; b]$ равно $f(x^*)$.

Реализация метода в MS Excel

Дано функция $f(x) = \left(\frac{x}{4} + \ln\left(\frac{x}{2} + 1\right) - e^{\frac{3x}{4}} \right)^2$ и точность ε . Найти ми-

нимум функции.

Локализация минимума

Порядок решения задачи:

1 Табулирование функции. Исследуем функцию $f(x)$, чтобы локализовать минимум. Заполнение клеток:

Адрес	Содержание	Тип
-------	------------	-----

клетки		
A1	x	Текст
B1	f(x)	Текст
A2	-0,5	Число
E1	h=	Текст
F1	0,5	Число
A3	=A2+\$F\$1	Формула
B2	=(0,25*A2+LN(0,5*A2+1)-EXP(-A2*0,75))^2	Формула
A4:A12	Автозаполнение формулой из клетки A3	Формула
B3:B12	Автозаполнение формулой из клетки B2	Формула

2 Построение графика (рисунок 4.9): выделим диапазон ячеек A1: B12, перейдем на пункт «Вставка», выберем «Точечная с гладкими кривыми».

Вид листа MS Excel:

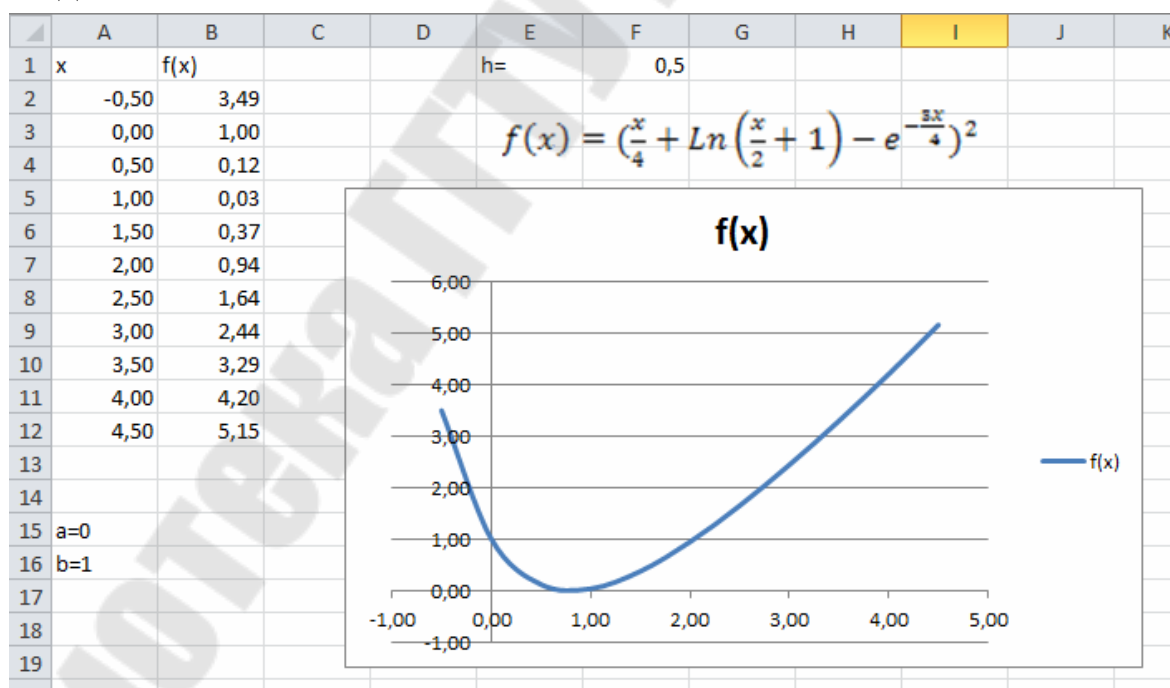


Рис. 4.9. Скриншот построения графика

По графику определим отрезок $[0; 1]$, на котором локализован минимум.

Уточнение корня по методу двойного половинного деления

Определим минимум функции $f(x)$ на отрезке $[0; 1]$ с точностью 0,01 методом двойного деления отрезка.

Заполнение клеток листа MS Excel:

Адрес клетки	Содержание	Тип
A1	a	Текст
B1	b	Текст
C1	x1	Текст
D1	x2	Текст
E1	$f(x_1)$	Текст
F1	$f(x_2)$	Текст
G1	b-a	Текст
I1	точность	Текст
J1	0,01	Число
A2	0 - значение a	Число
B2	1 - значение b	Число
C2	$=A2+0,25*(B2-A2)$	Формула
D2	$=A2+0,75*(B2-A2)$	Формула
E2	$=(0,25*C2+LN(0,5*C2+1)-EXP(-C2*0,75))^2$	Формула
F2	$=(0,25*D2+LN(0,5*D2+1)-EXP(-D2*0,75))^2$	Формула
G2	$=B2-A2$	Формула
A3	$=ЕСЛИ(E2<F2;A2;C2)$	Формула
B3	$=ЕСЛИ(E2<F2;D2;B2)$	Формула
C3: G3	Автозаполнение формулами из клетки C2: G2 соответственно	Формула

Первая итерация закончена. Последующие итерации реализуем копированием диапазона ячеек A3: G3 в диапазон ячеек от A4: G4 до A22: G22. Выделим первую строку, где значение $(b-a) \leq$ точности. Результаты запишем в ячейки J4-=>(A19+ B19)/2, J5->

$= (0,25 * J4 + \text{LN}(0,5 * J4 + 1) - \text{EXP}(-J4 * 0,75)) ^ 2$. Результат получен за 17 итераций (рисунок 4.10).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	a	b	x1	x2	f(x1)	f(x2)	b-a		точность	0,01
2	0	1	0,25	0,75	0,42087	0,0040742	1			
3	0,25	1	0,4375	0,8125	0,17063	1,303E-07	0,75		Результаты	
4	0,4375	1	0,57813	0,85938	0,06236	0,0022459	0,5625		xmin=	0,812
5	0,57813	1	0,68359	0,89453	0,01795	0,0067338	0,42188		f(xmin)=	0,000
6	0,68359	1	0,7627	0,9209	0,00257	0,0116059	0,31641		n=	17
7	0,68359	0,9209	0,74292	0,86157	0,00507	0,0024575	0,2373			
8	0,74292	0,9209	0,78741	0,8764	0,00063	0,0041277	0,17798			
9	0,74292	0,8764	0,77629	0,84303	0,00134	0,0009673	0,13348			
10	0,77629	0,8764	0,80132	0,85138	0,00012	0,0015548	0,10011			
11	0,77629	0,8514	0,79506	0,8326	0,0003	0,0004263	0,07508			
12	0,77629	0,8326	0,79037	0,81853	0,00049	4,173E-05	0,05631			
13	0,79037	0,8326	0,80093	0,82205	0,00013	0,0001003	0,04224			
14	0,80093	0,8326	0,80885	0,82469	1,1E-05	0,0001607	0,03168			
15	0,80093	0,8247	0,80687	0,81875	2,9E-05	4,465E-05	0,02376			
16	0,80093	0,8187	0,80538	0,81429	4,7E-05	4,734E-06	0,01782			
17	0,80538	0,8187	0,80872	0,81541	1,2E-05	1,091E-05	0,01336			
18	0,80872	0,8187	0,81123	0,81624	8,6E-07	1,721E-05	0,01002			
19	0,80872	0,8162	0,8106	0,81436	2,4E-06	5,045E-06	0,00752			
20	0,80872	0,8144	0,81013	0,81295	4,2E-06	6,702E-07	0,00564			
21	0,81013	0,8144	0,81119	0,8133	9,3E-07	1,382E-06	0,00423			

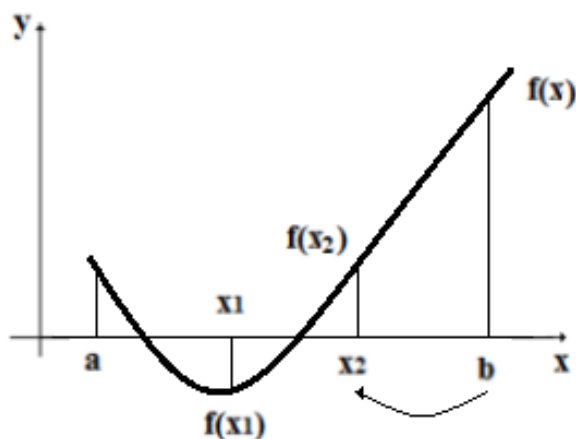
Рис. 4.10. Вид листа MS Excel

Ответ: $x^*=0,812$ $f(x^*)=0,0$ $n=17$.

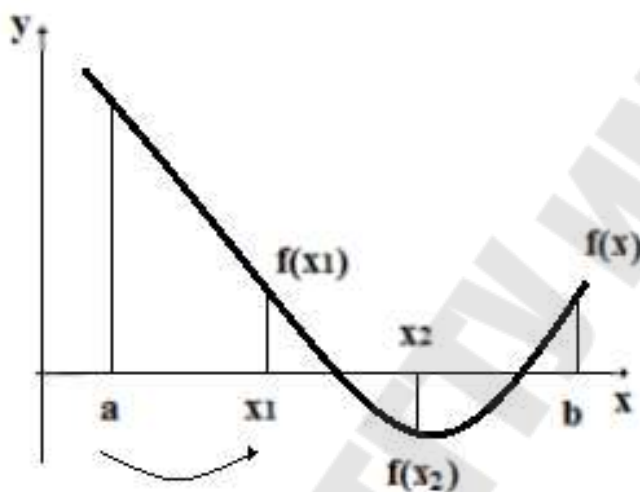
4.6.3. Метод золотого сечения

При построении процесса оптимизации стараются сократить объем вычислений и время поиска. Этого достигают обычно путем сокращения количества вычислений значений целевой функции $f(x)$. Одним из наиболее эффективных методов, в которых при ограниченном количестве вычислений $f(x)$ достигается наилучшая точность, является метод золотого сечения.

Если известно, что функция $f(x)$ унимодальная на отрезке $[a;b]$, то положение точки минимума можно уточнить, вычислив $f(x)$ в двух внутренних точках отрезка. При этом возможны две ситуации:



$f(x_1) < f(x_2)$
 минимум находится на отрезке $[a, x_2]$.



$f(x_1) > f(x_2)$
 минимум находится на отрезке $[x_1, b]$.

В методе золотого сечения (рисунок 4.11) каждая из точек x_1 и x_2 делит исходный интервал на две части так, что отношение целого к большей части равно отношению большей части к меньшей, т. е. равно так называемому "золотому отношению". Это соответствует следующему простому геометрическому представлению:

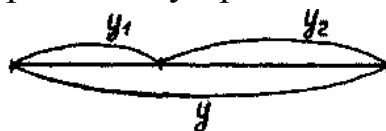


Рис. 4.11. Метод золотого сечения

$$\text{Здесь } \frac{y}{y_2} = \frac{y_2}{y_1} \text{ или } \frac{y}{y - y_1} = \frac{y - y_1}{y_1}$$

Обозначив $\frac{y_1}{y} = z$, получаем $\frac{1}{1-z} = \frac{1-z}{z}$, откуда

$$z = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,382$$

Итак, длины отрезков равны и составляют 0,382 от длины интервала (a, b) . Соотношением значений $f(x_1)$ и $f(x_2)$ определяется новый отрезок $[a; x_1]$ или $[x_2; b]$, в котором локализован минимум. Найденный интервал снова делится двумя точками в том же отношении, причем одна из новых точек деления совпадает с уже использованной. Поэтому, начиная со второй итерации, расчет функции необходимо производить только в одной точке, что для сложных $f(x)$ позволяет существенно сократить время решения задачи.

Алгоритм метода

1. Ввод исходных данных: a, b, ε .
2. Определение положения точек x_1, x_2 : $x_1 = a + 0,382 \cdot (b - a)$; $x_2 = a + 0,618 \cdot (b - a)$.
3. Проверка условия $f(x_1) < f(x_2)$. Если условие выполняется, то $b = x_2$, иначе $a = x_1$.
4. Проверка условия $(b - a) \leq \varepsilon$. Если условие выполняется, то переход к пункту 5, иначе переход к пункту 2.
5. Расчет закончен. Минимум находится в точке $x^* = (a + b) / 2$, минимальное значение функции на отрезке $[a; b]$ равно $f(x^*)$.

Реализация метода золотого сечения в MS Excel

Дано: функция $f(x) = \left(\frac{x}{4} + \ln\left(\frac{x}{2} + 1\right) - e^{-\frac{3x}{4}}\right)^2$ и точность $\varepsilon = 0,01$. Найти минимум функции на отрезке $[0; 1]$.

Заполнение клеток листа MS Excel:

Адрес клетки	Содержание	Тип
A1	a	Текст
B1	b	Текст
C1	x1	Текст
D1	x2	Текст
E1	f(x1)	Текст

F1	$f(x_2)$	Текст
G1	b-a	Текст
I1	точность	Текст
J1	0,01	Число
A2	0 - значение a	Число
B2	1 - значение b	Число
C2	$=A2+0,318*(B2-A2)$	Формула
D2	$=A2+0,618*(B2-A2)$	Формула
E2	$=(0,25*C2+LN(0,5*C2+1)-EXP(-C2*0,75))^2$	Формула
F2	$=(0,25*D2+LN(0,5*D2+1)-EXP(-D2*0,75))^2$	Формула
G2	$=B2-A2$	Формула
A3	$=ЕСЛИ(E2<F2;A2;C2)$	Формула
B3	$=ЕСЛИ(E2<F2;D2;B2)$	Формула
C3	$=ЕСЛИ(E2<F2;A3+0,318*(B3-A3);D2)$	Формула
D3	$=ЕСЛИ(E2<F2;C2;A3+0,618*(B3-A3))$	Формула
E3	$=ЕСЛИ(E2<F2;(0,25*C3+LN(0,5*C3+1)-EXP(-C3*0,75))^2;F2)$	Формула
F3	$=ЕСЛИ(E2<F2;E2;(0,25*D3+LN(0,5*D3+1)-EXP(-D3*0,75))^2)$	Формула
G3	Автозаполнение формулой из клетки G2	Формула

Первая итерация закончена. Последующие итерации реализуем копированием диапазона ячеек A3: G3 в диапазон ячеек от A4: G4 до A22: G22. Выделим первую строку, где значение $(b-a) \leq$ точности. Результат получен за 11 итераций. Итоговые значения запишем в ячейки J4-> $(A13 + B13)/2$, J5-> $=(0,25*J4+LN(0,5*J4+1)-EXP(-J4*0,75))^2$.

Ответ: $x^*=0,813$ $f(x^*)=0,0$ $n=11$ (результат см. рисунок 4.12).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	a	b	x1	x2	f(x1)	f(x2)	b-a		точность	0,01
2	0,000000	1,000000	0,38200000	0,61800000	0,230970389	0,042154055	1			
3	0,382000	1,000000	0,61800000	0,76392400	0,042154055	0,002438218	0,618		Результаты	
4	0,618000	1,000000	0,76392400	0,85407600	0,002438218	0,001774192	0,382		xmin=	0,813
5	0,763924	1,000000	0,85407600	0,90981897	0,001774192	0,00940469	0,23608		f(xmin)=	0,000
6	0,763924	0,909819	0,81031860	0,85407600	3,42426E-06	0,001774192	0,14589		n=	11
7	0,763924	0,854076	0,79259234	0,81031860	0,000395929	3,42426E-06	0,09015			
8	0,792592	0,854076	0,81031860	0,83058924	3,42426E-06	0,000346737	0,06148			
9	0,792592	0,830589	0,80467535	0,81031860	5,74737E-05	3,42426E-06	0,038			
10	0,804675	0,830589	0,81031860	0,82069013	3,42426E-06	7,475E-05	0,02591			
11	0,804675	0,820690	0,80976805	0,81031860	5,80301E-06	3,42426E-06	0,01601			
12	0,809768	0,820690	0,81031860	0,81651790	3,42426E-06	1,96157E-05	0,01092			
13	0,809768	0,816518	0,81191450	0,81031860	5,39882E-08	3,42426E-06	0,00675			
14	0,809768	0,810319	0,80994313	0,81191450	4,97886E-06	5,39882E-08	0,00055			
15	0,809943	0,810319	0,81191450	0,81017517	5,39882E-08	3,98384E-06	0,00038			
16	0,809943	0,810175	0,81001692	0,81191450	4,65042E-06	5,39882E-08	0,00023			
17	0,810017	0,810175	0,81191450	0,81011472	5,39882E-08	4,23239E-06	0,00016			
18	0,810017	0,810115	0,81004802	0,81191450	4,51535E-06	5,39882E-08	9,8E-05			
19	0,810048	0,810115	0,81191450	0,81008924	5,39882E-08	4,3394E-06	6,7E-05			
20	0,810048	0,810089	0,81006112	0,81191450	4,45902E-06	5,39882E-08	4,1E-05			
21	0,810061	0,810089	0,81191450	0,81007850	5,39882E-08	4,3849E-06	2,8E-05			
22	0,810061	0,810078	0,81006665	0,81191450	4,43538E-06	5,39882E-08	1,7E-05			

Рис. 4.12. Вид листа MS Excel.

5. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ ТЕХНОЛОГИЙ МОДЕЛИРОВАНИЯ

5.1. Интегрированное вычислительное материаловедение

Интегрированное вычислительное материаловедение относится к применению компьютерного моделирования, объединяющего математические модели сложных металлургических процессов с компьютерными моделями, используемыми в компонентном и технологическом проектировании. В настоящее время вычислительное моделирование используется как при проектировании изделия, так и при разработке производственного процесса с помощью таких инструментов, как конечно-элементный анализ (FEA) и вычислительная гидродинамика (CFD). С точки зрения проектирования методы FEA и CFD достаточно хорошо разработаны, что дает точные прогнозы важных конструктивных переменных, таких как напряжения, деформации и температуры, которым подвергается исследуемый компонент. Моделирование производственных процессов также проводится с использованием FEA или CFD, и эти инструменты моделирования обеспечивают средство для определения того, является ли компонент производимым, и для оптимизации производственного процесса для сокращения времени изготовления или улучшения качества компонента. Физические явления, связанные с производительностью и производством продукта, обычно регулируются несколькими общими принципами (например, эластичность, теплопередача, перенос массы), которые были предметом многолетнего изучения и разработки. Таким образом, моделирование производительности и производства продукции стало достаточно сложным и эффективным в вычислительном отношении.

Напротив, вычислительные средства в моделировании металлургических процессов и материаловедения (в микро-, мезо- и макроскопических масштабах) отстали от разработок в других инженерных дисциплинах. Поведение материалов включает в себя сложные процессы, особенно когда они испытывают множество дискретных взаимодействий, которые недостаточно описаны непрерывными моделями поведения в макроскопическом или мезоскопическом масштабе. То есть вычислительное моделирование поведения материала включает в себя множество процессов с масштабами времени и длины, которые недостаточно описаны хорошо разработанными непрерывными моде-

лями для компьютерного моделирования инженерных изделий и проектирования процессов.

Нельзя сказать, что в инструментах вычислительного материаловедения не были достигнуты значительные успехи. Однако эти инструменты обычно предназначены для использования в научных исследованиях для дальнейшего механистического понимания, а не для использования при принятии инженерных решений. Инструменты вычислительных материалов часто имеют направленный характер, а не количественный, и в большинстве случаев они требуют некоторой формы эмпирической калибровки из-за отсутствия всестороннего физического понимания сложных явлений. Самое главное, что вычислительные инструменты не предназначены для интеграции друг с другом, а также с производственным моделированием. Современная компонентная конструкция требует рассмотрения множества различных свойств, что вновь добавляет мультипликаторный эффект на сложность вычислительной задачи.

С конца 1990-х годов с развитием компьютерного моделирования были разработаны новые вычислительные инструменты для включения более сложных явлений материалов в моделирование металлургических процессов. Этот подход называется интегрированным вычислительным инжинирингом (ICME) (рисунок 5.1), который был определен как «интеграция информации о материалах, представленной в вычислительных инструментах, с анализом производительности инженерного решения и моделированием производственного процесса».

Для металлов эта информация о материалах представлена в виде количественных связей «обработка-микроструктура-свойство», связанных с базами данных термодинамических фазовых равновесий. Информация извлекается из теоретических моделей, эмпирических отношений или баз данных; однако эта информация также собирается в моделях, которые могут быть интегрированы друг с другом и с моделированием производства и производительности продукта. Благодаря комплексной интеграции моделирования материалов, проектирования и производства, ICME революционизирует способ обеспечивающий интегральный вклад в инженерное и научное знание.

Будущие достижения потребуют формирования специализированных групп экспертов в области материалов, механики, физики, инженерии, информатики и информационных технологий промыш-

ленными фирмами или государственными учреждениями, желающими разработать инструменты для конкретных приложений. Несмотря на то, что ICME все еще находится в зачаточном состоянии, он имеет большой потенциал для более надежного моделирования для оптимизации компонентов, сплавов и производственных процессов полностью связанным образом.

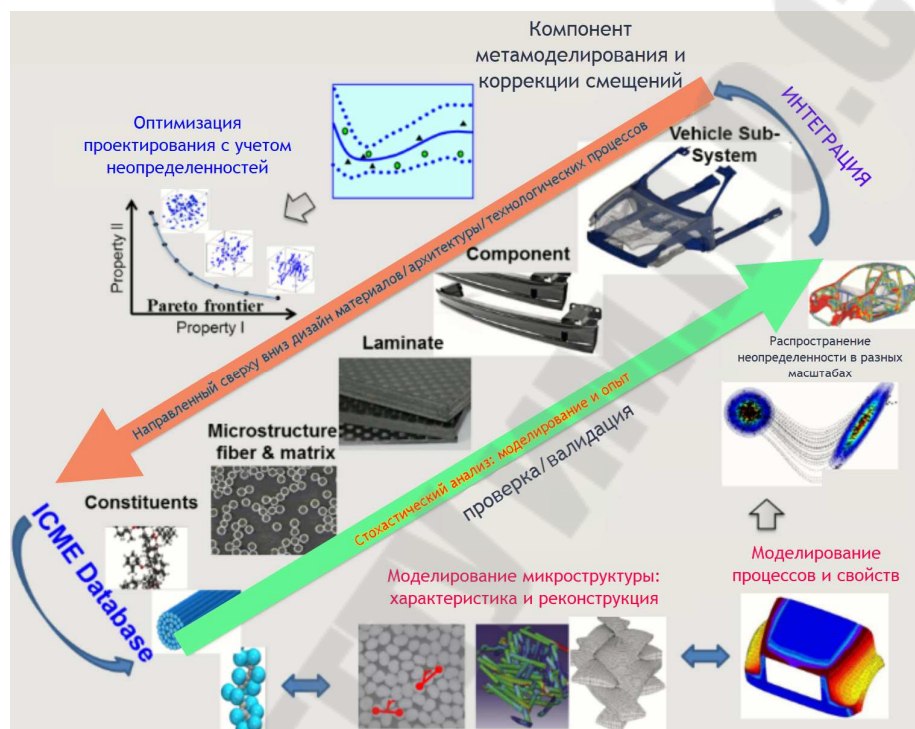


Рис. 5.1. Схема задач моделирования полимеров, армированных углеродным волокном

5.2. Интеллектуальные технологии в металлургии и их развитие

Металлургическое производство включает широкий диапазон распределенных процессов сложного характера – от подготовки сырья до производства металлопроката. Каждый из них характеризуется некоторой степенью неточности (неуверенности). В этом случае эффективно используется «мягкое вычисление». Можно с уверенностью утверждать, что «soft computing» уже способствовало значительному прогрессу в металлургической промышленности.

Математическая основа искусственного интеллекта – «soft computing» («мягкое вычисление») – интенсивно развивалась в последние десятилетия. В настоящее время оно внедряется непосредственно в фундамент индустриальной автоматизации. В ближайшем будущем

прогнозируется существенный рост использования систем искусственного интеллекта в основных производственных процессах, в том числе в металлургии [16].

Путь «мягкого вычисления» от кабинетов ученых до производственных цехов был тяжелым. Предпосылки, которые способствовали этому переходу, сформировались в недрах различных дисциплин. Кроме теоретических исследований, успех во многом обязан развитию VLSI – Very Large Scale Integration – технологии, повышению чувствительности датчиков, разработке открытых технологий, стыкующих различные вычислительные платформы и др. Средства VLSI в режиме реального времени гарантировали огромный вычислительный потенциал микропроцессоров. Например, стало возможным осуществлять управление в интерактивном режиме реального времени. Появление уникальных датчиков не только имплантировало интеллект в периферийные устройства, но и значительно повысило быстродействие управления делегированным и распределенным интеллектом.

В настоящее время, с развитием концепции нейронных сетей и нечеткой логики, «мягкие вычисления» являются значимым лидером в отрасли, включающей следующие направления: нечеткие множества; генетические алгоритмы; эволюционные вычисления; теория хаоса; искусственный интеллект; моделирование систем; вероятностное мышление; изучение принципов работы механизма; изучение интеллектуальных алгоритмов управления; распознавание образов и понимание образов; самоорганизация сложных систем; нечеткие базы данных; нечеткий поиск информации и др.

Вначале было очевидным соревнование различных направлений развития «мягкого вычисления», пока не было осознано, что они дополняют друг друга, а не конкурируют.

Перечисленные направления нашли широкое применение в металлургии, как в автономном, так и в комбинированном вариантах использования. Области, в которых они эффективно используются, различны: оценка и прогноз технологических параметров; контроль и диагностика технологических процессов; оптимизация и планирование результатов; моделирование процессов и интерактивное моделирование в режимах диалога. В частности, достигнуты существенные результаты при прогнозе изменения содержания кремния в чугуне в процессе доменной плавки, содержания водорода в металле при вакуумировании; контроле лазерной сварки, проверке качества сварных швов; обнаружении скрытых дефектов в рельсах; оптимизации горячей прокатки и контроле деформации заготовки при прокатке; плани-

ровании сокращения допусков при прокатке; моделировании отвердевания непрерывнолитой заготовки, технологии холодной прокатки; контроле изменения температуры полосы при горячей прокатке и толщины покрытия металла в линии гальванизации; контроле уровня металла в промежуточном ковше при непрерывной разливке и др. [17].

Прошло почти полвека с момента создания первых моделей искусственного интеллекта. Первоначально искусственный интеллект базировался на строгом и точном вычислении. Позже из-за осознания неточности реального мира акцент исследований сместился к «мягкому вычислению». Причина изменения парадигмы - понимание, что традиционные точные двузначные логические системы, исследования в области теории множеств и теории вероятности являются неадекватными, чтобы оперировать с неточностью, неуверенностью и сложностью реального мира.

«Мягкое вычисление» основано на нейронной сети (NN – Neural Network), нечёткой логике (FL – Fuzzy Logic – рисунок 5.2) и вероятностном описании (PR – Probabilistic Reasoning). Функции нейронных сетей – изучение степени соответствия данных, идентификация параметров, а также систем и образов. Нечеткая логика оперирует с неточностью и вероятностным описанием процессов. В последнее время FL сливается с информационной генетикой, оценивает неуверенность, систематизирует случайный поиск и оптимизацию [9].

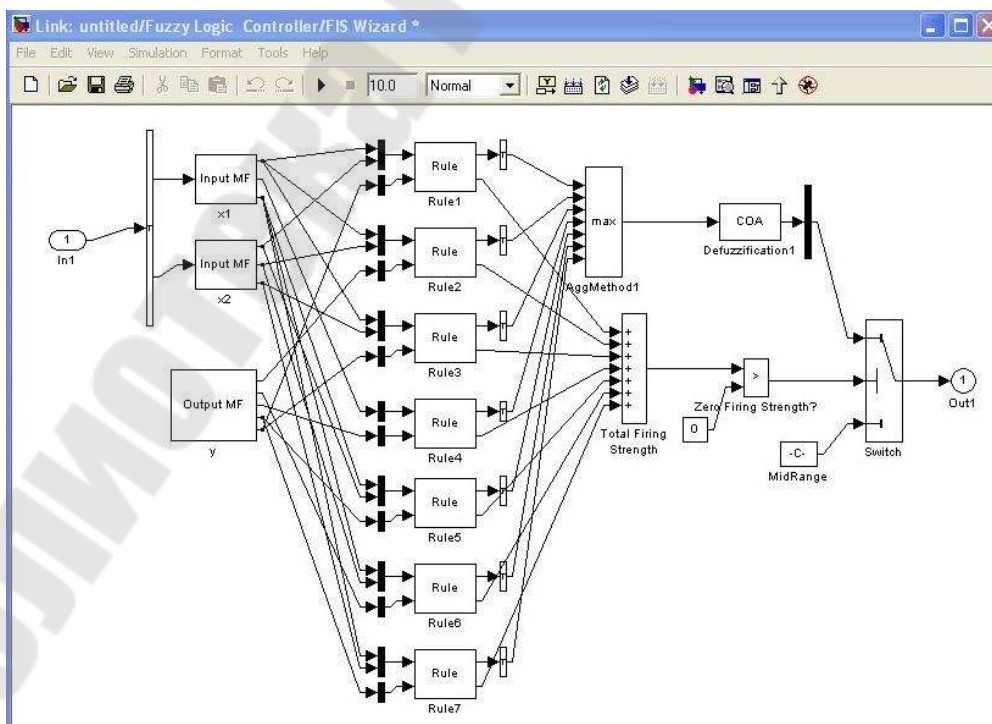


Рис. 5.2. Пример структуры модели в формулировке «нечеткой логики»

В начале 1980-х гг. эти методы были ограничены главным образом кабинетными стенами и не превышали масштабов лабораторных исследований. В конце 80-х произошел резкий скачок в развитии и использовании этих методов (более 2500 патентов только в одной Японии). «Мягкое вычисление» также способствовало коммерческому успеху в производстве изделий для потребителя – видеокамер, кондиционеров, стиральных машин, мобильных роботов, автомобилей и поездов метро. Системы искусственного интеллекта (MIQ – Machine Intelligent Quotient) быстро стали составной частью многих изделий постоянного обихода. Интеллектуальная система, объединяя известные методы и технологии, позволяет проектировать практические системы в области автоматизации и информатики, принимающие наиболее эффективные решения по результатам анализа исходных данных.

5.3. Применение нечеткой логики

Коксовые батареи. Система управления разогревом коксовых батарей (рис. 5.3) постоянно исследуется и совершенствуется. Системой первого поколения была статистическая модель нагрева. Принцип работы системы второго поколения (динамической) – вычисление баланса энергии. Она базировалась на прямой и обратной связи при определении температуры окончания. Система третьего поколения дополнена нечеткими логическими контроллерами. В результате разброс при определении температуры окончания коксования не превышает 15 °С. Надежность системы была значительно улучшена.

Холодная прокатка. На стане холодной прокатки полоса последовательно уменьшается в толщине после каждого обжатия. В связи с этим задача управления сводится к оптимизации процесса обжатия при минимизации мощности нагрузки и удовлетворении некоторых ограничений. Так как свойства материалов и коэффициент трения точно не известны, их рассматривают как нечеткие числа. Теория нечетких множеств применена для определения оптимального

значения обжата. Обычно по установленному графику максимальное уменьшение толщины достигается после первых проходов с минимальной нагрузкой обжата. Однако надежность такого управления невелика. Оптимизация процесса с использованием теории нечетких множеств обеспечивает решение, удовлетворяющее требованиям воспроизводства режимов обжата с высокой надежностью и минимальной нагрузкой.

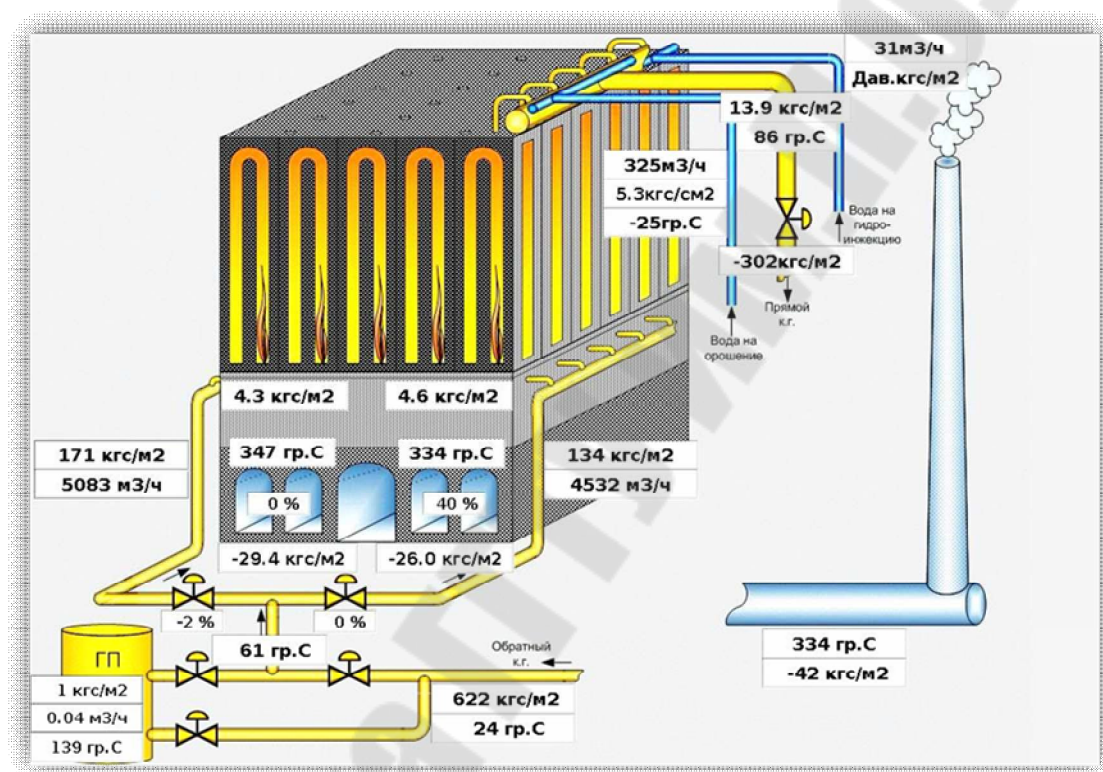


Рис. 5.3. Система визуализации работы коксовой батареи

Была разработана дополнительная система нечеткого контроля заданной толщины стальной полосы. Она состоит из контроллера нечеткого вывода и адаптивного контроллера нейро-нечеткого вывода, параллельно моделирующего процесс прокатки. Нечеткий контроллер вывода генерирует сигнал управления, а адаптивная нейро-нечеткая модель преодолевает проблему задержки выходного сигнала процесса и обеспечивает структуру и точность контроля. Эта схема управления превосходно работает.

Линии покрытия. На линиях гальванизации толщину покрытия регулируют, контролируя его массу на основе баланса общего количества металла и электролита в ванне. Так как эффективность процес-

са – нелинейная функция от входных переменных, они представляют особую ценность для полного текущего расчета. Эффективность процесса зависит от состояния электролита. Вычисление точки оптимума нуждается в постоянной адаптации к фактическому процессу, кроме учета изменения заданной массы покрытия. Из-за значительного расстояния между измерительным шаблоном и контролирующими датчиками установлены специальные мониторы. Система сокращает расход металла на гальванизацию до минимума. Эффективность гальванической линии основана на использовании диалоговой нечеткой системы, а диалоговый процесс обучения системы постоянно приспособливает математическую модель к фактическим условиям работы оборудования. В результате использования таких объединенных систем управления масса покрытия практически соответствует заданной. В последнее время в линиях гальванизации все больше используются нейронные сети.

5.4. Применение методов машинного обучения для оптимизации производственных процессов в металлургической промышленности

Одной из важных задач металлургической промышленности является оптимизация производственных процессов, что напрямую влияет на качество и себестоимость выпускаемой продукции. Оптимизация производственного процесса включает в себя множество задач, среди которых оптимизация состава сплавов, контроль параметров производственного процесса, контроль качества металла и устранение дефектов продукции.

С развитием современных технологий и искусственного интеллекта технологии машинного обучения широко используются в различных отраслях, включая металлургию. Технология машинного обучения позволяет автоматизировать производственные процессы, повысить качество продукции и снизить затраты на производство.

Применение методов машинного обучения в металлургии приводит к следующим результатам:

Улучшает качество металла. Методы машинного обучения можно использовать для определения оптимальных составов сплавов, в результате чего получают металлы с более высокими качественными свойствами.

Сокращенный срок изготовления. Оптимизируя производственные процессы с использованием методов машинного обучения, можно сократить время производства и увеличить производительность.

Сократить производственные затраты. Оптимизируя производственные процессы с использованием методов машинного обучения, можно снизить производственные затраты и повысить эффективность.

Поэтому использование методов машинного обучения для оптимизации производственных процессов в металлургической промышленности имеет большой потенциал для улучшения качества и повышения эффективности производства.

Кроме того, используя машинное обучение для обнаружения аномалий в работе оборудования и прогнозирования сбоев, можно принять необходимые меры для предотвращения простоев или повреждения оборудования, тем самым снижая затраты на ремонт и техническое обслуживание. Технологии машинного обучения делают доступными большие объемы данных, что облегчает процессы принятия решений и сокращает время разработки, а также внедрение новых технологий и производственных процессов.

Поэтому использование методов машинного обучения в металлургии имеет большой потенциал для оптимизации производственных процессов, повышения качества продукции и снижения себестоимости продукции. Методы машинного обучения можно использовать для решения задач оптимизации производства в металлургической промышленности.

Обзор существующих методов оптимизации производственных процессов в металлургии и их недостатков.

В металлургической промышленности существует множество методов оптимизации производственных процессов, которые используются для улучшения качества продукции и снижения затрат на производство.

Традиционные статистические методы. Данные методы основываются на анализе статистических данных о производственных процессах и используются для определения оптимальных параметров производственного процесса. Недостатком этих методов является то, что они не учитывают сложности и нерегулярности производственных процессов, а также не позволяют использовать большие объемы данных для оптимизации процесса.

Экспертные системы. Эти системы основываются на знаниях экспертов в области металлургии и используются для принятия решений по оптимизации производственных процессов. Недостатком экспертных систем является то, что они не могут учитывать все возможные варианты и ограничения производственного процесса, а также не могут обрабатывать большие объемы данных.

Методы математического моделирования. Эти методы основываются на разработке математических моделей производственных процессов и их оптимизации на основе алгоритмов оптимизации. Недостатком данных методов является необходимость точных математических моделей процессов, которые часто сложны и требуют большого количества времени и ресурсов для разработки.

Методы машинного обучения. Эти методы основываются на использовании алгоритмов машинного обучения для оптимизации производственных процессов. Одним из главных преимуществ данных методов является возможность использования больших объемов данных и автоматической обработки информации, что позволяет быстро оптимизировать производственный процесс. Кроме того, методы машинного обучения могут использоваться для обнаружения аномалий в работе оборудования и прогнозирования его отказа, что позволяет предпринимать необходимые меры по предотвращению простоев и повреждений оборудования.

Одним из основных недостатков всех вышеперечисленных методов является их ограниченность в оптимизации сложных производственных процессов, которые имеют большое количество входных параметров, ограничений и нелинейностей. Кроме того, для использования этих методов часто необходимы специализированные знания и навыки, что может быть проблематично для многих предприятий.

В связи с этим, использование методов машинного обучения для оптимизации производственных процессов в металлургической промышленности становится все более популярным решением. Методы машинного обучения имеют преимущество в том, что они могут адаптироваться к различным типам производственных процессов и решать задачи оптимизации, которые ранее были недоступны для традиционных методов.

Кроме того, применение методов машинного обучения позволяет использовать большие объемы данных и обрабатывать информацию быстрее, что уменьшает время на разработку новых производственных процессов и технологий. Это позволяет предприятиям

металлургической промышленности повысить эффективность производства, улучшить качество продукции и снизить затраты на производство.

Из таблицы 6.1 видно, что каждый из рассмотренных методов машинного обучения имеет свои преимущества и недостатки при оптимизации производственных процессов в металлургии. Например, нейронные сети позволяют использовать большое количество исторических данных для предсказания свойств металлов и оптимизации производственных процессов, в то время как генетические алгоритмы могут использоваться для оптимизации состава сплавов. Выбор оптимального метода машинного обучения зависит от целей и требований конкретного производства.

Таблица 5.1

Преимущества и недостатки существующих методов оптимизации производственных процессов в металлургии

Метод оптимизации	Преимущества	Недостатки
Экспертные системы	Возможность использования опыта экспертов Доступность для использования	Низкая точность Не учитывает изменчивость процессов
Математические модели	Могут обеспечить высокую точность Могут быть использованы для оптимизации сложных процессов	Требуют больших затрат на разработку и поддержку Не учитывают изменчивость процессов
Программно-оптимизационные методы	Возможность автоматизации процесса оптимизации Высокая точность оптимизации	Требуют больших затрат на разработку и поддержку Не учитывают изменчивость процессов
Методы искусственного интеллекта	Возможность учитывать изменчивость процессов Высокая точность оптимизации	Требуют больших затрат на разработку и поддержку Могут быть сложны в использовании

Разработка модели оптимизации производственных процессов в металлургии на основе методов машинного обучения

Для решения задачи оптимизации производства в металлургии, мы предлагаем использовать метод нейронных сетей. Нейронные сети могут быть обучены на исторических данных производственных процессов и использованы для предсказания оптимальных параметров производства.

Модель, разработанная на основе метода нейронных сетей, будет состоять из нескольких слоев, каждый из которых будет выполнять определенные функции. Например, первый слой будет отвечать за входные данные, такие как температура и давление, второй слой будет выполнять функцию скрытого слоя, а третий слой будет отвечать за выходные данные, которые будут представлять оптимальные параметры производства.

Для обучения нейронной сети необходимо будет использовать исторические данные производственных процессов и связанных с ними параметров. Эти данные будут использоваться для обучения нейронной сети, которая будет искать оптимальные параметры производства.

После обучения нейронной сети модель может быть использована для предсказания оптимальных параметров производства на основе текущих условий производства. Например, если текущая температура производства составляет 1000 градусов Цельсия, модель может предсказать оптимальную температуру для достижения требуемых свойств металла.

Разработанная модель на основе нейронных сетей может быть применена для оптимизации производственных процессов в металлургии, что позволит повысить эффективность производства, улучшить качество продукции и снизить затраты на производство.

Например, модель может использоваться для оптимизации производства листовой стали. Для этого нейронная сеть будет обучена на исторических данных производственных процессов, таких как температура и время выдержки, а также на данных о свойствах металла, таких как прочность и твердость. После обучения модель может быть использована для предсказания оптимальных параметров производства на основе текущих условий производства.

Таким образом, модель на основе метода нейронных сетей может быть успешно применена для оптимизации производственных процессов в металлургии. Применение этой модели позволяет повысить эффективность производства, улучшить качество продукции и снизить затраты на производство. Важно отметить, что разработанная

модель представляет собой теоретическое решение задачи оптимизации производства в металлургии на основе методов машинного обучения.

Для того, чтобы реализовать данную модель на практике, необходимо провести дополнительные исследования и эксперименты, а также учитывать особенности конкретного производства и используемого оборудования. Однако, использование методов машинного обучения для оптимизации производственных процессов в металлургии имеет большой потенциал и может значительно улучшить производительность и качество продукции в данной отрасли.

Обсуждение эффективности методов машинного обучения для оптимизации производства в металлургии

Предложенное теоретическое решение на основе методов машинного обучения для оптимизации производственных процессов в металлургии имеет свои преимущества и недостатки.

Одним из главных преимуществ данного решения является возможность использования исторических данных для обучения модели. Таким образом, модель может предсказывать оптимальные параметры производства на основе данных о прошлых производственных процессах, что уменьшает время и затраты на оптимизацию производства. Кроме того, использование методов машинного обучения позволяет автоматизировать процесс оптимизации производства и устранить возможные ошибки человеческого фактора.

Однако, существуют и некоторые недостатки данного решения. Во-первых, необходимо проводить предварительную обработку данных и отбирать наиболее значимые параметры производства. Это может потребовать дополнительных усилий и затрат на подготовку данных для обучения модели. Во-вторых, необходимо учитывать особенности конкретного производства и используемого оборудования при выборе метода машинного обучения и параметров модели. Некоторые методы машинного обучения могут не подходить для конкретных производственных процессов или оборудования.

Кроме того, важно отметить, что предложенное теоретическое решение требует дополнительных исследований и экспериментов, чтобы понять, как это решение будет работать на практике и какие изменения необходимы для его оптимальной работы в конкретных условиях производства. Это может потребовать дополнительных затрат на исследования и эксперименты, а также время для получения результатов и оценки эффективности данного решения.

Тем не менее, использование методов машинного обучения для оптимизации производственных процессов в металлургии имеет большой потенциал и может значительно улучшить производительность и качество продукции в данной отрасли. Дальнейшие исследования и эксперименты должны быть проведены, чтобы определить оптимальный метод машинного обучения и параметры модели для конкретного производства, а также для определения эффективности данного решения в действительности. Важно учитывать, что металлургическая промышленность является сложной и динамичной отраслью, и поэтому решения, которые работают в одном производственном процессе, могут не сработать в другом. Поэтому необходимо проводить дополнительные исследования для определения оптимального метода машинного обучения и параметров модели для каждого конкретного случая, чтобы обеспечить наилучшую эффективность и точность прогнозирования.

Однако, несмотря на необходимость дополнительных исследований, применение методов машинного обучения для оптимизации производственных процессов в металлургии является перспективной областью для развития. Это может привести к улучшению производительности и качества продукции в данной отрасли, а также повысить конкурентоспособность металлургических предприятий. В дальнейшем исследовании могут включать разработку более сложных моделей и методов машинного обучения, а также использование более широкого набора данных для обучения модели.

5.5. Применение численных методов для моделирования технологических процессов подготовки производства отливок

В литейном производстве отливки изготавливают путем заливки расплавленного металлического сплава определенного химического состава в форму. После охлаждения сплав затвердевает и сохраняет геометрию полости формы. Отливки могут быть готовыми деталями или заготовками, которые в дальнейшем обрабатываются на металло-режущих станках [10].

Литье в песчаные формы представляет собой универсальный процесс производства отливок. Этот процесс используется для получения отливок различной сложности практически любого веса и размера из стали, чугуна и сплавов цветных металлов.

Компьютерный анализ литейных процессов на этапе виртуального проектирования литейной технологии (до производства отливок) позволяет минимизировать возможные просчеты и ошибки, неизбежно возникающие в процессе разработки, снизить финансовые и временные затраты, повысить эффективность, конкурентоспособность, качество и надёжность выпускаемой продукции. Экономятся материалы, энергоресурсы, рабочее время, ресурс оборудования, а взамен получается много уникальной информации о технологическом процессе. Только технология компьютерного моделирования позволяет в условиях производства «заглянуть внутрь» изделия, увидеть характер протекающих в нем процессов, понять причины дефектов [10].

В настоящее время основным преимуществом систем моделирования является то, что они позволяют технологу наблюдать за процессами, происходящими в отливке, и понимать причины образования того или иного дефекта именно в этой отливке при определенных конкретных технологических параметрах. Это позволяет нам предлагать эффективные технологические решения, которые, в свою очередь, можно проверить с помощью моделирования. Когда технолог принимает то или иное технологическое решение, он руководствуется некоторыми представлениями о ходе литейных процессов, сложившимися на основе предыдущего опыта. Поскольку технолог обычно может оценить протекание процесса только по косвенным признакам (наличию или отсутствию дефекта на завершающем этапе), эти представления не всегда соответствуют действительности. И это происходит вследствие многофакторности и неоднозначности процессов литья, сложности геометрии отливки, нестабильность технологических параметров и т. д. Для того чтобы технолог имел правильное представление о протекании реального процесса при любом виде литья, значительный опыт правильных и неправильных решений должен быть накоплен и подтвержден объективным результатом. Для того чтобы разработать адекватное решение для конкретной отливки, опытный технолог-литейщик должен в определенном смысле иметь определенное количество неудачных разработанных и применённых технологий. Моделирование, с другой стороны, избавляет от необходимости накапливать этот дорогостоящий опыт методом проб и ошибок в течение многих лет, т. к. позволяет анализировать ход процесса непосредственно, а не по косвенным признакам. Так можно понять,

какие технологические факторы действительно оказывают существенное влияние на результат в данном случае, в какую сторону изменяются параметры процессов и почему. Поэтому основная цель системы моделирования состоит не только в том, чтобы удешевить процесс проверки предлагаемых технологических вариантов с помощью компьютера, но и в том, чтобы помочь технологу конкретно искать именно тот вариант, который обеспечивает требуемое качество casting. При этом важно и то, что моделирование позволяет проверить не только работоспособность выбранной технологии, но и устойчивость технологии к изменению технологических параметров. В реальном производстве технологические параметры всегда изменяются в определенных пределах. Моделирование можно использовать для проверки того, обеспечивает ли технология качество, необходимое для таких изменений. Это гораздо выгоднее, чем принимать «аварийные» меры, когда уже в освоённой отливке «вдруг» обнаруживаются дефекты, не возникшие при отработке литейной технологии [41].

Внедрение компьютерных технологий позволяет повысить эффективность создания и обработки информации: происходит реальный переход от бумажного документооборота к электронному.

С внедрением компьютерных технологий сокращаются затраты, снижается трудоемкость проектирования и освоения производства сложных новых изделий. Стоимость подготовки технологической документации снижается на 25...50 %. Сокращается более чем на 1/3 времени изготовления сложных новых изделий. Реальный выигрыш в производстве полной партии готовых отливок в несколько тысяч единиц может достигать 2–3 раз.

Использование компьютерных технологий в литейном производстве во многом связано с обработкой информации об изделии, которая создается в виде электронных моделей деталей, поступающих из САПР конструкторских бюро. Информация о технологических процессах, используемых в литейном производстве, представлена в виде математических моделей, созданных на основе деятельности систем инженерного анализа [41].

Виртуальное литейное производство, созданное на базе современной CAE – системы, не только моделирует затвердевание отливки (тепловая задача), но и позволяет прогнозировать макро- и микроструктуру отливки, а также создает информационную картину элек-

тронной модели изделия. Созданная цифровая модель (двойник технологического процесса) позволяет использовать технику быстрого прототипирования для получения высокоточных моделей, необходимых для изготовления отливок в литейном производстве.

Центральным звеном виртуального производства литых заготовок является программное обеспечение моделирования затвердевания отливки и формирования макро- и микроструктуры. Выбор программного обеспечения зависит от используемого процесса литья и ассортимента выпускаемых отливок.

Для авиакосмических производств, где много деталей ответственного назначения с тонкими стенками, тонкими ребрами, щелевыми каналами сложной формы, (напр. лопасти газотурбинного двигателя), анализ методом конечных элементов (МКЭ) имеет определенное преимущество, заключающееся в том, что он позволяет более точно передавать геометрию отливки. Данный численный метод используется в программном продукте *ProCast* (рис. 5.4).



Рис. 5.4. Стадии и этапы моделирования литья по выплавляемым моделям в пакете Procast

Этапы моделирования включают подготовку геометрии (3D-модель и 3D-сетка), определение теплофизических свойств материалов, определение граничных условий (т. е. повторение реального технологического процесса) [7].

Программа *ProCast* имеет отличный встроенный генератор 2D и

3D сетки, который в кратчайшие сроки, в абсолютном большинстве случаев автоматически, создаёт наиболее правильную расчетную сетку.

ProCast предлагает возможность моделирования заполнения формы, затвердевания и формирования микроструктуры. Расположение питателей и использование изолирующих или экзотермических элементов, их влияние на усадку можно изучить на компьютере и отобразить на экране для достижения оптимального качества литья.

Программный комплекс *ProCast* отвечает современным требованиям и позволяет генерировать расчетную модель на основе соответствующих физических процессов литейной технологии с подключением необходимых решателей в процессе моделирования.

Успех заполнения формы, затвердевания и формирования микроструктуры связан с оптимизацией литниковой системы и устранением возможных участков усадки. Размеры элементов литниковой (или литниково-питающей) системы и их влияние на усадку можно изучить на компьютере и отобразить на экране для поиска путей достижения оптимального качества литья.

В идеале инженер-литейщик или технолог должен иметь в качестве инструмента моделирования программный комплекс, ориентированный на полный цикл компьютерного моделирования процессов литья, от формообразования до чистовой обработки деталей с возможностью оптимизации технологии по стандартным или собственным (уникальным) алгоритмам.

Для описания факторов, влияющих на наличие дефектов в отливках (а их насчитывается несколько сот, по данным разных исследователей), необходимо прежде всего оценить современный уровень развития компьютерного моделирования в этой области. Общий уровень решения инженерами задач моделирования процессов дискретного литья в целом неоднозначен. В то же время компьютерное моделирование лучше подходит для обучения основным техническим понятиям, чем лабораторные эксперименты, которые, в свою очередь, могут служить важным, но не самодостаточным дополнением.

Эффективное использование систем компьютерного моделирования требует от пользователя осмысленных действий, творческого подхода и определенной квалификации. С другой стороны, использование литейным технологем системы моделирования повышает его

квалификацию, причем в сравнительно короткие сроки. Таким образом, назначение системы моделирования заключается в том, что использование пакетов класса *Procast* автоматически повышает профессиональную литейную квалификацию пользователя до необходимого уровня. Те представления о протекании реальных процессов, которые технологи нарабатывали десятилетиями, можно получить с помощью моделирования примерно за один год и при минимальных дополнительных производственных затратах. Моделирование — это современный, эффективный и безопасный способ разработки и оптимизации литейных технологий. В рамках идеи цифрового проектирования в виде сквозных стадий, без промежуточных этапов использования бумажных носителей информации, ценным является возможность систем моделирования переносить результаты моделирования технологии литья в другие пакеты (рисунок 5.5). Даже с учётом того, что передаваемый результат в большей степени несёт информацию качественную, а не точную количественную, потенциальный переход к мультисистемному анализу несёт очевидные перспективы для продолжения этапного совершенствования производственных технологий в рамках литейных и металлургических процессов [50].

Растущий интерес к методам математического моделирования в литейном производстве связан с неоспоримым преимуществом перед другими методами: возможностью проведения «удаленного» эксперимента без привлечения физических ресурсов. Это, в свою очередь, позволяет:

1. Снизить стоимость проведения экспериментов (затраты труда, материальные затраты и время);
2. Расширить исследовательские возможности, сняв ограничения на варьирование входных параметров системы;
3. Обеспечить безопасность эксперимента за счет минимизации воздействия опасных и вредных факторов в процессе исследования.

С другой стороны, остается еще ряд причин, препятствующих распространению и активному внедрению систем моделирования в литейном производстве:

1. Высокая стоимость специального программного обеспечения;
2. Ограниченное количество подготовленных специалистов;
3. Некорректная и ограниченная оценка результатов моделирования;

4. Многофакторные процессы литейного производства, неопределенность возрастает при сравнении фактических и расчетных результатов;

5. Высокая ресурсоемкость вычислений, требующих достаточно мощных компьютеров.

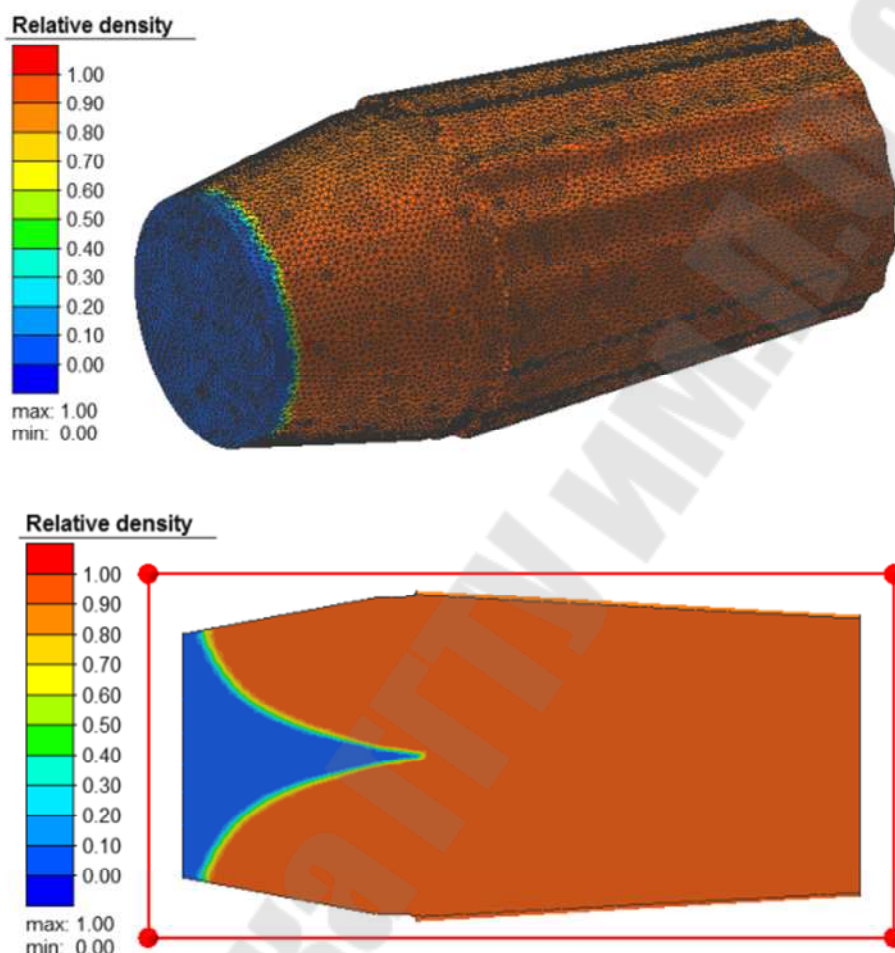


Рис. 5.5. Импорт результатов моделирования (относительная плотность/ объёмная усадка) в систему разработки технологииковки Simufact

Важно отметить, что некоторые из этих недостатков могут быть устранены путём развития вычислительной техники и расширения ее использования в производстве. Например, для моделирования литейных процессов необходимо создать 3D-модель литейного цеха и литниковой системы, даже если так было уже некоторое время.

Если раньше разработка и оптимизация процессов литья требовала обязательно этапа её создания, то сейчас, когда модели изготов-

ливаются на станках с ЧПУ, 3D-модель отливки уже существует по умолчанию.

Важно отметить, что современное состояние техники не позволяет использовать системы моделирования литейного производства для автоматической генерации готовых технологических решений, как это часто ожидается от САПР. Использование систем инженерного анализа позволяет получить прогноз некоторых характеристик техники по заданным входным параметрам системы, которые так или иначе должен оценить и проанализировать на корректность опытный пользователь-технолог. В этом смысле часто возникают сложности при внедрении систем типа ПО *Procast* в литейном производстве.

Для уточнения места средств компьютерного моделирования литейных процессов (СКМ ЛП) в производственном цикле рассмотрим три схемы организации производственного процесса: традиционную (без использования средств моделирования литейных процессов) и две «прогрессивные», предполагающие введение современных методов разработки и оптимизации технологических процессов.

Традиционный подход (метод проб и ошибок). Слабым местом этой схемы является то, что опыт технолога и традиционные средства расчета не в состоянии охватить все тонкости и факторы процесса производства отливок. В результате всегда есть шанс получить не только неоптимальную технологическую схему, но и откровенно неудачный вариант с высоким уровнем брака. Главный минус такого подхода в том, что проявление ошибок проявляется только после тестирования технологии в цехе. Это требует инициализации процесса корректировки технологии, который затрагивает весь цикл и все отделы подготовки производства, что приводит к значительным финансовым и временным затратам компании. Это сказывается на общей эффективности производства [10, 50].

Разработка нового технологического процесса с СКМ ЛП. Отличие схемы от традиционного подхода заключается во внедрении инструментов анализа на этапе технологической разработки. Принципиальное значение имеет возможность виртуального тестирования технологии на основе прогнозов, полученных с помощью СКМ ЛП, без привлечения ресурсов подразделений, расположенных ниже по цепочке. Таким образом, вы значительно повышается вероятность использования оптимальной технологии с первого раза, так сказать, с

минимальным количеством ошибок.

Новая схема предусматривает два цикла (рисунок 5.6). В первом случае затрагиваются ресурсы только двух отделов: технолога и САПР-ЛП. Обычно в конце этого цикла оптимизированный технологический проект запускается в основной этап подготовки к производству. Важно понимать, что даже наличие виртуального изучения технологии не исключает полностью возможности получения отливки с дефектами, что не исключает наличия второго, повторного цикла, характерного для первой схемы.

Эффективность новой схемы будет оцениваться на основе общего объема ресурсов, выделенных на фазу виртуальной разработки и пилотного тестирования. Конечно, количество пилотных испытаний резко сократится, но ведь есть и затраты на виртуальную разработку, которые в свою очередь необходимо минимизировать. Для этих целей можно с успехом использовать экспериментальные методы планирования.

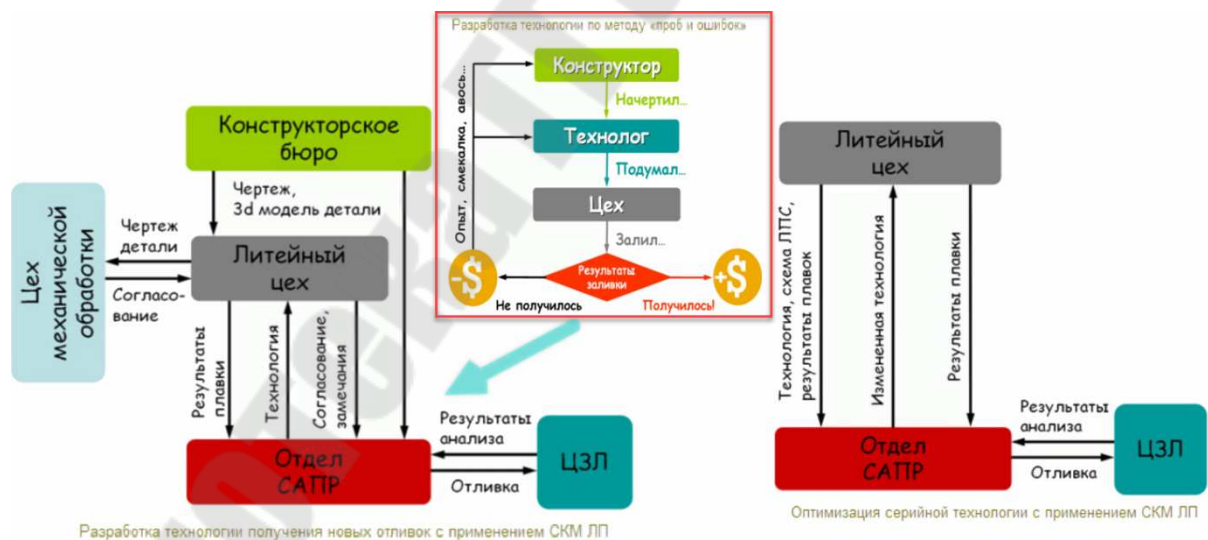


Рис. 5.6. Подходы к проектированию и разработке литейных технологий

Разработка и оптимизация литейных процессов. Оптимизация существующей технологии с помощью СКМ ЛП. Отличие ме-

тодики оптимизации существующей технологии от разработки новой состоит в том, что уже имеется базовая отправная точка, а именно информация о параметрах технологии и результаты анализа брака в производстве. В этом случае появляется прекрасная возможность определить корреляцию между результатами виртуального технологического прогноза и фактическими показателями процесса изготовления отливки. Наличие такой связи повышает объективность оценки технологических вариантов разработки воротных систем и позволяет более точно рассмотреть то или иное конкретное производство.

5.6. Simufact — программный комплекс для компьютерного моделирования

Подготовка технологии производства является важным этапом в процессе разработки новой продукции. Помимо правильного проектирования детали, вы должны убедиться, что деталь может быть изготовлена с заданной точностью с использованием существующего оборудования. Недостаточно лишь грамотно спроектировать деталь и просчитать ее работоспособность в процессе жизненного цикла. Следует удостовериться, что эта деталь может быть с заданной точностью создана на существующем оборудовании — например, учесть эффекты обратного пружинения, остаточных деформаций, коробления детали. Кроме того, требуется правильно спроектировать само оборудование (матрицы, пуансоны, крепежный инструмент и т. д.) и подобрать оптимальные режимы его работы, разработать техническую оснастку.

Изучение изменений различных технологических процессов на реальных устройствах имеет множество недостатков (например, невозможность масштабного изменения параметров устройства, возможность ошибок устройства при отладке и т. д.). В связи с этим оптимизация существующих производственных процессов и внедрение в производство новой продукции требует значительных вложений времени, материалов и капитала.

Использование компьютерного моделирования технологических процессов может привести к значительной экономии средств, поскольку моделирование процесса и выбор оптимальных параметров работы оборудования необходимы до принятия окончательного решения по технологическому оборудованию и организации производства.

Для моделирования технологических процессов может быть задействован функционал пакетов общего назначения – Marc, Dytran и MSC Nastran. Однако для более простого и эффективного использования этого функционала корпорация MSC Software предоставляет пользователям два специализированных пакета в этой области. Это – пакет Simufact forming, предназначенный для компьютерного моделирования процессов обработки металлов давлением и термообработки, и пакет Simufact welding, предназначенный для моделирования и оптимизации процессов сварки. Пакеты программного обеспечения Simufact Forming и Simufact Welding — это инструменты, позволяющие техническим специалистам практиковать процессы обработки металлов давлением и сварки в виртуальной среде. Это позволяет компаниям существенно сократить затраты на разработку и реализацию экспериментов.

Simufact Welding — программный комплекс для компьютерного моделирования и оптимизации сварочных процессов при различных конфигурациях параметров сварки.

Промышленные сварочные процессы требуют высокой надежности. Для обеспечения надежности процесса необходимо определить оптимальный метод сварки, выбрать режим сварки, в том числе источник питания, оценить требования к используемому техническому оборудованию.

Системы компьютерного моделирования могут быть использованы для проектирования сварочных процессов с целью снижения коробления и остаточных напряжений в сварных конструкциях, определения оптимальной последовательности сварочных операций, разработки оптимальных схем крепления, улучшения микроструктуры материалов для возможности прогнозирования. Зона предотвращения образования термических трещин и оценки влияния тепла на качество сварки. для оценки прочности сварных соединений.

Оптимизация сварочных процессов с помощью систем инженерного анализа сокращает количество трудоемких и дорогостоящих сварочных испытаний и помогает определить количество роботов и порядок их использования перед настройкой функционирующей производственной линии. Кроме того, существующие производственные процессы можно оптимизировать с помощью технологий моделирования.

Simufact forming — программный пакет для моделирования различных технологий обработки металлов давлением. С помощью этого

программного обеспечения можно изучать реальную кинематику устройств всех сложностей и типов, различные модели материалов (упругие, пластические и т. д.), трение и контакт между инструментами и деталями, самоконтакт формованных деталей и термодинамику процессов.

Ядро Simufact forming включает в себя базовые функции, необходимые для моделирования основных инженерных процессов, включая графический интерфейс пользователя, решатели, библиотеки материалов и инструменты для создания сеток конечных элементов.

Simufact forming (рисунок 5.1) является полнофункциональным комплексным решением для моделирования широкого спектра технологий обработки металлов давлением и позволяет получить реалистичное представление технологических процессов с полноценной 3D-визуализацией всех инструментов и деталей. Программа предназначена для технологов, занятых решением задач отладки и оптимизации технологических процессов свободной ковки, горячей и холодной объемной штамповки, экструзии, прокатки, листовой гибки и штамповки, вырубки заготовок, раскатки колец, создания механических соединений и многих других. Графический интерфейс пользователя Simufact forming легок и прост в освоении и ориентирован на технологов. Пользователь может сосредоточиться на самом процессе формования детали вместо того, чтобы сталкиваться с трудностями по настройке работы программного обеспечения. Все стандартные процессы формовки могут быть легко смоделированы за несколько кликов мыши. Однако возможности применения Simufact forming не ограничены работой с пользователями, имеющими только начальную подготовку. Опытные специалисты могут работать с расширенным функционалом пакета, что позволяет моделировать процессы любой сложности.

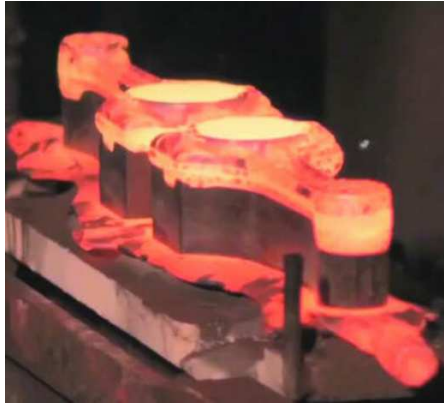


Рис. 5.7. Реальный процесс получения изделия путем объемной штамповки (слева) и реализация процесса в виртуальном пространстве Simufact forming (справа)

При моделировании технологических процессов можно учитывать реальную кинематику оборудования любой сложности и типа, различные модели материала (упругие, пластичные, с учетом упрочнения и т.д.), трение и контакт между инструментами и деталями, а также самоконтакт в формирующейся детали для прогнозирования образования складок, термодинамику процесса и др. Высококачественное моделирование в Simufact forming основывается на использовании лидирующих программных пакетов компании MSC Software – конечно-элементного решателя для нелинейных задач Marc и конечно-объемного решателя для нелинейных задач Dytran. Оба пакета постоянно совершенствуются, и новые возможности этих решателей интегрируются в новые версии Simufact (рисунок 5.2).

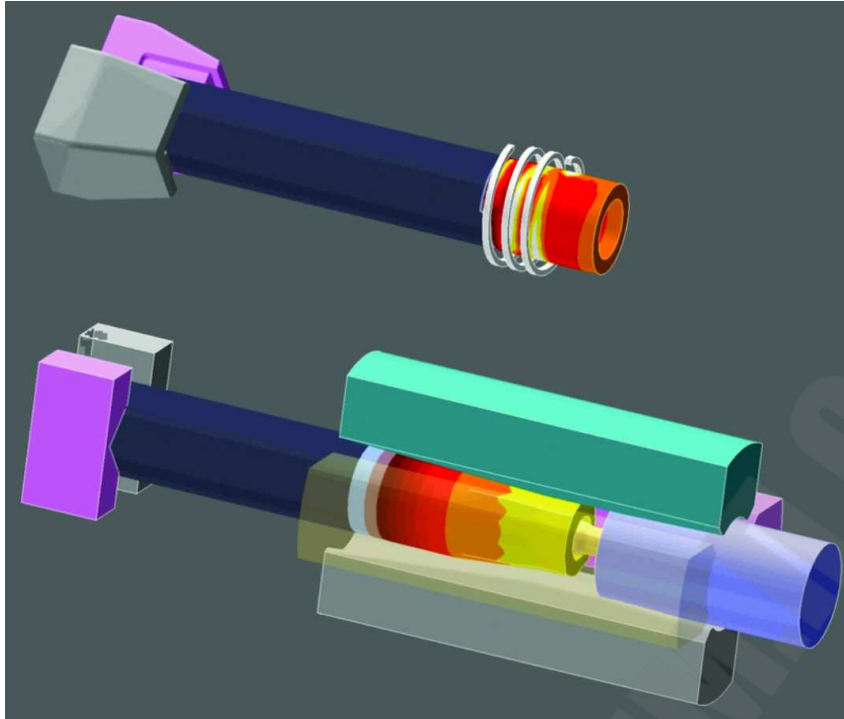


Рис. 5.8. Моделирование двух этапов обработки: предварительного индукционного нагрева заготовки с последующим этапом радиальнойковки.

Комплексные технологии виртуального моделирования и инженерного анализа компании MSC Software дают возможность с высокой точностью представить физику сложных нелинейных процессов обработки металлов давлением. Simufact forming предлагает широкий набор инструментов для виртуального проектирования и отработки реальных технологических процессов. Используя Simufact forming, можно моделировать как отдельные стадии технологического процесса, так и всю технологическую цепочку целиком – от заготовки до готового изделия. Начиная с версии 12 в Simufact forming внедрена технология AFS (Application Function Sets – установка функций для приложения). После запуска программного обеспечения пользователь указывает, какой конкретный техпроцесс он будет моделировать. В зависимости от выбора производятся соответствующие настройки – назначается решатель, определяется тип конечно-элементной сетки и технология для ее построения, определяются кинематические параметры, соответствующие процессу, и выбираются дополнительные настройки.

Модульная концепция Simufact forming позволяет задействовать именно тот функционал, который необходим для решения стоящих

перед пользователями задач. Этот подход является наиболее экономически эффективным и обеспечивает возврат инвестиций в максимально сжатые сроки.

Simufact forming позволяет получить реалистичное представление технологических процессов с полноценной 3D-визуализацией всех инструментов и деталей.

Программное обеспечение позволяет учитывать:

- реальную кинематику оборудования любой сложности и типа;
- различные модели материала — упругие, пластичные, с учетом упрочнения. Свойства материала могут зависеть от температуры и от скорости процесса;
- трение и контакт между инструментами и деталями;
- самоконтакт в формирующейся детали для прогнозирования образования складок;
- термодинамику процесса: начальные условия нагрева, теплопередачу между заготовкой, инструментом и окружающей средой, выделение тепла за счет пластических деформаций и трения и др.

В своем составе Simufact forming имеет ядро (Forming Hub), включающее базовый функционал, необходимый для моделирования основных технологических процессов (графический интерфейс пользователя, решатель, база материалов, средства построения конечно-элементной сетки и некоторые другие). Традиционно это ядро поставляется с элементами интерфейса, ориентированными на подготовку расчетных моделей процессов холодной и горячей объемной штамповки.

Библиотека ГГТУ им. П.О.Сухого

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сменяются поколения оборудования, появляются автоматические агрегаты и комплексы, постоянно повышаются требования к качеству металлопродукции, разрабатываются новые технологии. И в то же время новые поколения компьютеров создаются еще более быстрыми темпами. За последние 30 лет появились персональные компьютеры, возможности которых превосходят мощные мэйнфреймы конца 1990-х годов. Это позволило создать программное обеспечение, например, для решения задач прикладной механики (доменная печь, конвертер, прокатный пресс, штамповочный пресс и т. д.) с использованием метода конечных элементов (МКЭ). Построены модели печных и сталеплавильных процессов, процессов обработки металлов давлением. Но, к сожалению, возможности компьютеров по-прежнему значительно превышают желание эффективно их использовать.

Однако наиболее перспективные разработки и примеры их применения в области компьютерного моделирования металлургических процессов дают основу для увеличения доли информационной составляющей систем инженерного анализа и математического моделирования в структуре программ подготовки специалистов металлургического профиля. И, судя по всему, в ближайшие 10 лет должен быть сформирован синергетический эффект, в результате которого резко возрастут масштабы и эффективность прикладного использования математических методов и моделей в металлургии и смежных отраслях.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Аверченков, В. И. Основы математического моделирования технических систем : учебное пособие : / В. И. Аверченков, В. П. Федоров, М. Л. Хейфец. – 4-е изд., стер. – Москва : ФЛИНТА, 2021. – 271 с
- 2 Андреас, Мюллер Введение в машинное обучение с помощью Python. Руководство для специалистов по работе с данными: моногр. / Мюллер Андреас. - М.: Альфа-книга, 2017. - 697 с.
- 3 Асаи, К. Прикладные нечеткие системы : пер. с яп. / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иван. // М. : Мир, 1993. – 368 с. : ил.
- 4 Барский, А.Б. Логические нейронные сети / А.Б. Барский. - М.: Бином. Лаборатория знаний / Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2017. - 336 с.
- 5 Берестова, С. А. Математическое моделирование в инженерии: учебник / С. А. Берестова, Н.Е. Мисюра, Е.А. Митюшов, — Екатеринбург : Изд-во Урал, ун-та, 2018.— 244 с.
- 6 Большой энциклопедический политехнический словарь [Текст] / Под ред. А. Ю. Ишлинского. — Москва : МультиТрейд, 2004.
- 7 Компьютерное моделирование и автоматизация технологических процессов в машиностроении: учеб. пособие / Б. В. Бондин [и др.]. – Самара: 2008. Самар., гос. техн. ун-т. – 91 с.
- 8 Борисов, А. Н., Крумберг, О. А., Федоров, И. П. Принятие решения на основе нечетких моделей / А. Н. Борисов, О. А. Крумберг, И. П. Федоров – Рига, 1990. – 180 с.
- 9 Бусленко, Н. П. Моделирование сложных систем. – М. : Наука, 1978. – 400 с.
- 10 Вдовин, Р.А. Компьютерное моделирование технологического процесса литья деталей двигателей в модуле Visual-Mesh программного продукта ProCast : учебное пособие / Р.А. Вдовин. - Самара: Изд-во Самарского университета. 2019. - 108 с.
- 11 Веников, В. А. Теория подобия и моделирования / В. А. Веников, Г. В. Веников. – М. : Высш. шк., 1984. – 439 с.
- 12 Гаврилова, Т. А. Базы знаний интеллектуальных систем / Т. А. Гаврилова, В. Ф. Хорошевский – Питер, 2001. – 384 с.
- 13 Горбань, А. Н. Нейронные сети на персональном компьютере / А. Н. Горбань, Д. А. Россиев. – Новосибирск : Наука. 1996. – 276 с.

- 14 Физическое моделирование технических систем сталеплавильного производства : учебное пособие : / С. П. Еронько, Е. В. Ошовская, М. Ю. Ткачев [и др.]. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2021. – 324 с.
- 15 Ефименко, А. З. Системы управления предприятиями строительной индустрии и модели оптимизации : учеб. пособие / А. З. Ефименко – М. : МГСУ, 2011. – 304 с.
- 16 Жуков, А. Д. Решение технологических задач методами математического моделирования : монография / А. Д. Жуков, А. В. Чугунков, В. А. Рудницкая. – М. : МГСУ, 2011. – 176 с.
- 17 Информационные технологии в наукоемком машиностроении. Компьютерное обеспечение индустриального бизнеса / под ред. А. Г. Братухина. – Киев : Техника. 2001. – 625 с.
- 18 Каллан, Р. Основные концепции нейронных сетей / Р. Каллан. – М. : Вильямс, 2001. – 288 с.
- 19 Каплун, А. Б. ANSYS в руках инженера : практ. рук. / А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 272 с.
- 20 Карпов, Ю. Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 400 с.
- 21 Технология литейного производства : учебник для вузов / Ю. И. Категоренко и др. ; под ред. Ю. И. Категоренко, В. М. Милыева ; Рос. гос. проф.-пед. ун-т. - 2-е изд., перераб. и доп. - Екатеринбург : Издательство РГППУ, 2018. - 684 с. - Режим доступа: <http://elar.rsvpu.ru/handle/978-5-8050-0641-9>.
- 22 Клебанов, Я. М. Современные методы компьютерного моделирования процессов деформирования конструкций : учеб. пособие / Я. М. Клебанов, В. Г. Фокин, А. Н. Давыдов. – Самара : Самар, гос. техн. ун-т, 2004. – 100 с.
- 23 Кондаков, А. И. САПР технологических процессов : учеб. для студентов высш. учеб. заведений/ А. И. Кондаков. – М. : Академия. 2007. – 272 с.
- 24 Краснова, Е. В. Организация эксперимента : учеб, пособие / Е. В. Краснова; Краснояр. гос. акад. цветных металлов и золота (ГАЦМиЗ). – Красноярск : 1996. – 134 с.
- 25 Круглов, В. В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. / В. В. Круглов, В. В. Борисов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2002. – 382 с.: ил.

- 26 Кутателадзе, С. С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление / С. С. Кутателадзе. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 366 с.
- 27 Ли, К. Основы САПР (CAD/CAM / CAE) / К. Ли. – СПб. : Питер, 2004. – 560 с.
- 28 Львовский, Е. Н. Статистические методы построения эмпирических формул. / Е. Н. Львовский. – М. : Высш. шк., 1988. – 239 с.
- 29 Макаров, Е. Инженерные расчеты в MathCAD / Е. Макаров. – СПб. : Питер. 2003. – 448 с.
- 30 Максимов, Ю. М. Математическое моделирование металлургических процессов / Ю. М. Максимов, И. М. Рожков, М. А. Саакян. – М. : Metallurgia, 1976. – 288 с.
- 31 Медведев, В. С. Нейронные сети / В. С. Медведев, В. Г. Потемкин. – М. : ДИАЛОГ-МИФИ, 2002. – 496 с.
- 32 Морозов, В.К. Моделирование информационных и динамических систем : учебное пособие для студентов высших учебных заведений / В.К. Морозов, Г.Н. Рогачев. - Москва: Академия, 2011. - 384 с.
- 33 Моисеев, В. С., Неуструев, А. А. Методология автоматизированного проектирования литниково-питающих систем для отливок / В. С. Моисеев, А. А. Неуструев // Литейное пр-во. – 1992. – № 12. – С. 9–10.
- 34 Моисеев, В. С., Смыков, А. Ф. Оптимизационный подход к расчету литниково-питающих систем и средств воздействия на направленное затвердевание / В. С. Моисеев, А. Ф. Смыков // Литейное пр-во. – 2000.
- 35 Норенков, И. П. Информационная поддержка наукоемких изделий. CALS – технологии / И. П. Норенков, П. К. Кузьмик. – М. : Изд-во МГГУ им. Баумана. 2002. – 320 с.
- 36 Норенков, И. П. Основы автоматизированного проектирования / И. П. Норенков. – М. : Изд-во МГТУ им. Баумана, 2002. – 336 с.
- 37 Носов, Н. В. Расчет надежности и качества технологических процессов / Н. В. Носов. – Самара : СамГТУ. – 1992. – 127с.
- 38 Организация эксперимента. Планирование эксперимента в процессах ОДМ : метод. указания к выполнению курсовой работы / С. Д. Прокошкин [и др.]. – М. : МИСиС, 2003. – 156 с.

- 39 Организация эксперимента : метод. указания к лаборатор. и практ. работам для студентов специальностей 110500 «Металловедение и термическая обработка металлов» и 110400 «Литейное производство черных и цветных металлов» / сост. Е. В. Краснова,
Т. Р. Гильманшина ; ГОУ ВПО «Гос. ун-т цветных металлов и золота». – Красноярск, 2006. – 72 с.
- 40 Потемкин, А. Трехмерное твердотельное моделирование / А. Потемкин. – М. : КомпьютерПресс, 2002. – 296 с.
- 41 Программа моделирования литейных процессов LVMFlow. Версия 4.5. Руководство пользователя. - Ижевск, 2012. - 153 с.
- 42 Рогов, В. А. Методика и практика технических экспериментов : учеб, пособие для студентов высш. учеб. заведений / В. А. Рогов,
Г. Г. Позняк. – М. : Академия, 2005. – 288 с.
- 43 Рутковская, Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы : пер. с пол. / Д. Рутковская. М. Пилиньский, Л. Рутковский. – М. : Горячая линия – Телеком, 2004. – 452 с.
- 44 Рыжиков, Ю. И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. / Ю. И. Рыжиков. – М. : Альтекс, 2004. – 384 с.
- 45 Самарский, А. А., Михайлов, А. П. Математическое моделирование : Идеи, Методы. Примеры. М. : Физматлит, 2001. – 320 с.
- 46 Семенкин, Е. С. Метод обобщенного адаптивного поиска для синтеза систем управления сложными объектами / Е. С. Семенкин,
В. А. Лебедев. – М. : МАКС Пресс, 2002. – 320 с.
- 47 Семенкин, Е. С. Оптимизация технических систем: Учеб. пособие / Е. С. Семенкин, О. Э. Семенкина, С. П. Коробейников. – Красноярск : СИБУП, 1996.
- 48 Советов, Б. Я., Яковлев, С. А. Моделирование систем / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. учеб. для вузов – М. : Высш. шк., 2003. – 320 с.
- 49 Соломенцев, Ю. М. Информационно-вычислительные системы в машиностроении: CALS-технологии / Ю. М. Соломенцев [и др.] – М. : Наука, 2003. – 292 с.
- 50 Математическое моделирование металлургических процессов в АСУ ТП / Н. А. Спирин, В. В. Лавров, В. Ю. Рыболовлев, Л. Ю. Гилева, А. В. Краснобаев, В. С. Швыдкий, О. П. Онорин, К.

- А. Щипанов, А. А. Бурыкин; под ред. Н.А. Спирина. — Екатеринбург, 2014. — 558 с.
- 51 Судов, Е. В. Интегрированная поддержка жизненного цикла машиностроительной продукции. Принципы. Технологии. Методы. Модели / Е. В. Судов. – М. : Издат. дом МВМ, 2003. – 264 с.
- 52 Тихонов, А. Н., Цветков, В. Я. Методы и системы поддержки принятия решений / А. Н. Тихонов, В. Я. Цветков – М. : МАКС Пресс. 2001. – 312 с.
- 53 Тарасик, В.П. Математическое моделирование технических систем: учебн. Для ВУЗов / В.П. Тарасик. – Минск: Новое знание; Москва: ИНФРА-М, 2016. – 591 с.: ил.
- 54 Введение в математическое моделирование [Текст] / Под ред. П. В. Трусова. — Москва : Логос, 2007. – 440 с.: ил.
- 55 Трушин, С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи / С.И. Трушин. - Москва: Ассоциации строительных вузов, 2008. - 256 с.
- 56 Хайкин, С. Нейронные сети : полный курс / пер. с англ. 2-е изд. – М. : Вильямс, 2006. – 1104 с. : ил.
- 57 Хакимянов, Г.С. Математическое моделирование: учебное пособие в 2 частях/ Г.С. Хакимянов. - Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т., 2010, Ч. 1. - 148 с.
- 58 Химмельблау, Д. Анализ процессов статистическими методами / Д. Химмельблау : пер. с англ. В. Д. Скаржинского; под ред. В. Г. Горского. М. : Мир, 1973. – 960 с.
- 59 Черепашков, А. А. Компьютерные технологии. Создание, внедрение и интеграция промышленных автоматизированных систем в машиностроении : учеб, пособие / А. А. Черепашков. – Самара. Самар. гос. техн ун-т. : 2008. – 143 с.
- 60 Черепашков, А. А. Основы САПР в машиностроении : учеб, пособие / А. А. Черепашков. – Самара : Самар. гос. техн. ун-т. 2008. –133 с.

Жаранов Виталий Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Пособие

**для слушателей специальности переподготовки
1-42 01 71 «Металлургическое производство
и материалобработка»
заочной формы обучения**

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 18.01.24.

Пер. № 1Е.

<http://www.gstu.by>