Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 8

МЕХАНИКА

Ю. МАЛКИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В СМЫСЛЕ ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 IV 1937)

Эта заметка посвящается исследованию устойчивости движений в смысле Ляпунова. Допустим, что дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = X(t, x, y, x_1, \ldots, x_n), \quad \dfrac{dy}{dt} = Y(t, x, y, x_1, \ldots, x_n), \\ \dfrac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(t, x, y, x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \end{array}\right\} \tag{1}$$

где X, Y, X_s вблизи начала координат разлагаются в ряды по степеням переменных $x, y, x_1, \ldots, x_n$, начинающиеся членами не ниже второго порядка. Коэффициенты в этих разложениях предполагаются вещественными и непрерывными функциями времени, равномерно ограниченными при всех положительных значениях последнего. Коэффициенты $p_{s\sigma}$ являются непрерывными вещественными и равномерно ограниченными функциями времени и притом такими, что существуют три квадратичные формы $W(t, x_1, \ldots, x_n)$, $W_1(x_1, \ldots, x_n)$, $W_2(x_1, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие неравенствам:

$$W \geqslant W_1,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) \leqslant -W_2.$$

При этом коэффициенты формы W суть равномерно ограниченные функции времени, а формы W_1 и W_2 от времени не зависят и определенно-положительны. Обозначим через $X^\circ, Y^\circ, X_s^\circ$ выражения, в которые обращаются X, Y, X_s, если в последних положить $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Обозначим далее через $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ формы m-го порядка, представляющие собой совокупности членов наинизшего измерения в разложениях функций X° и Y°. Мы предполагаем, что эти формы обладают постоянными коэффициентами и что в разложениях функций X_s° не встречаются члены порядка ниже m. Тогда имеют место следующие предложения:

1) Если форма

$$G(x, y) = x\,Y^{(m)}(x, y) - y\,X^{(m)}(x, y)$$

не является знакоопределенной и форма

$$P(x, y) = x\,X^{(m)}(x, y) + y\,Y^{(m)}(x, y)$$

может принимать положительные значения, хотя бы на одной из прямых, определяемых уравнением $G = 0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

2) Если на всех указанных прямых форма P принимает отрицательные значения, то невозмущенное движение устойчиво и притом асимптотически.

3) Если G есть форма знакоопределенная, а величина

$$\lambda = \int_0^{2\pi} \frac{P(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}{G(\cos\vartheta, \sin\vartheta)}\, d\vartheta$$

отлична от нуля, то при $\lambda G < 0$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво, а при $\lambda G > 0$ оно неустойчиво.

Эти предложения решают вполне задачу для всех случаев кроме тех исключительных, когда на прямых $G = 0$ форма P не может принимать положительных значений, но может обращаться в нуль (при x и y, не равных нулю одновременно), и когда при G знакоопределенном величина λ равна нулю. Последний из этих случаев, представляющий особый интерес, может быть разрешен, если коэффициенты разложений правых частей уравнений (1) (включая и коэффициенты $p_{s\sigma}$) постоянны. Для этого поступаем следующим образом.

Составляем систему уравнений с частными производными:

$$\frac{\partial x_s}{\partial x} X + \frac{\partial x_s}{\partial y} Y = p_{s1} x_1 + \ldots + p_{sn} x_n + X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

и стараемся ей удовлетворить формальными рядами

$$x_s = \sum_{i+k \geqslant m} A^{(ik)} x^i y^k,$$

не содержащими свободных членов. Такие ряды всегда найдутся, будут вполне определенными и будут начинаться членами не ниже m-го порядка. Этими рядами заменяем величины $x_1, \ldots, x_n$ в первых двух уравнениях (1), после чего они принимают вид:

$$\frac{dx}{dt} = X^{(m)} + \overline{X}, \quad \frac{dy}{dt} = Y^{(m)} + \overline{Y},$$

где $\overline{X}$ и $\overline{Y}$—голоморфные функции от x и y, разложения которых начинаются членами не ниже $(m + 1)$-го порядка.

В этих уравнениях преобразовываем переменные x и y к переменным r и ϑ при помощи подстановки

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

и ищем интеграл полученных таким образом уравнений:

$$\frac{dr}{dt} = r^m P(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \ldots,$$

$$r\frac{d\vartheta}{dt} = r^m G(\cos\vartheta, \sin\vartheta) + \ldots$$

под видом

$$V = r^2 \varphi_2 + r^3 \varphi_3 + \ldots,$$

где $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ — некоторые периодические функции ϑ с периодом 2π. Для определения функций $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ мы получаем уравнения вида:

$$\frac{d\varphi_l}{dt} + (l+1)\varphi_l + f = 0 \qquad (l = 2, 3, \ldots), \tag{2}$$

где f содержит только те из функций φ_s, для которых $s < l$. Из этих уравнений все функции φ_s последовательно вычисляются при помощи квадратур. Функции φ_2 и φ_3 получаются обязательно периодическими; что же касается остальных функций, то они могут получиться и непериодическими. Пусть φ_k—первая непериодическая функция в ряду функций φ_s и пусть

$$F = 0$$

есть уравнение ее определяющее. Тогда всегда найдется такая постоянная g, что уравнение

$$F = g$$

будет обладать только периодическими решениями. Если $g > 0$, то невозмущенное движение неустойчиво; если $g < 0$, то оно устойчиво и притом асимптотически.

Аналогичным образом можно решить задачу и в том случае, когда все коэффициенты правых частей уравнений (1) суть периодические функции времени с одним и тем же периодом ω.

Доказательству утверждений этой заметки посвящена специальная статья.

Институт математики и механики.
Казанский государственный университет.

Поступило
23 IV 1937.