Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 3

МАТЕМАТИКА

Г. ХИЛЬМИ

О ТЕОРИИ КВАЗИ-МИНИМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 17 III 1937)

1. Эта заметка в сущности представляет собой дополнение к моей работе «Sur les ensembles quasi-minimaux dans les systèmes dynamiques (1), однако она написана так, что доступна читателю, не знакомому с упомянутой статьей.

Я хочу показать, что если не интересоваться связями квази-минимальных множеств с другими типами множеств общей теории динамических систем и прежде всего динамически неразложимыми множествами, которые были изучены в упомянутой работе, а ограничиться более узкой задачей: изучением движений, содержащихся в квази-минимальных множествах,—то цель может быть достигнута много быстрее и проще. Для этого нужно исходить из формально другого определения квази-минимального множества, логически эквивалентного данному мной ранее.

2. Мы будем рассматривать движения точек в метрическом пространстве M; через $f(p, t)$ мы будем обозначать положение точки $p \subset M$ в момент времени t; $f(p, 0) = p$. Мы можем предполагать, что эти движения образуют однопараметрическую группу, т. е. $f(f(p, t), \tau) = f(p, t+\tau)$. Множество всех точек вида $f(p, t)$ при фиксированном p и для всех действительных значений t мы будем называть орбитой, а точку p — ее начальной точкой. Множество всех точек вида $f(p, t)$ при фиксированном p и для всех значений $t \geqslant 0$ $(t \leqslant 0)$ мы будем называть положительной (отрицательной) полуорбитой, а точку p — начальной точкой этой полуорбиты.

Далее мы предположим, что через каждую точку $p = M$ проходит только одна орбита.

Если A — произвольное подмножество M, то символом $f(A, t)$ мы будем обозначать множество $\{f(p, t)\}$, где $p \subset A$.

Пусть x и y — две точки множества M, символ $\rho(x, y)$ обозначает расстояние между точками x и y.

Пусть $x \subset M$ — фиксированная точка; символом $S(x, \varepsilon)$ мы будем обозначать множество всех точек $y \subset M$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \varepsilon$. Это множество мы назовем окрестностью точки x радиуса ε.

Мы будем предполагать, что имеет место обычная для динамических систем непрерывная зависимость орбит от начальных условий, т. е.

что для любых независимых между собой положительных чисел ε и T можно указать столь малое положительное число δ, что включение

$$f(S(p, \delta), t) \subset S(f(p, t), \varepsilon)$$

справедливо для всех значений t, удовлетворяющих неравенству $|t| \leqslant T$.

Мы назовем множество $A \subset M$ положительно (отрицательно) инвариантным, если из условия $p \subset A$ следует, что $f(p, t) \subset A$ для всех $t \geqslant 0$ $(t \leqslant 0)$. Множество A называется инвариантным, если оно одновременно положительно и отрицательно инвариантное.

Мы будем предполагать, что для всякого множества $A \subset M$ существует счетная база относительных областей, т. е. такая счетная последовательность относительных открытых множеств $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, что для всякой точки $p \subset A$ и для любой ее сферической окрестности S найдется область U_ν, удовлетворяющая условию $p \subset U_\nu \subset S$.

Мы будем рассматривать устойчивые по Poisson'у движения. Движение называется устойчивым по Poisson'у, если для всякой точки p его орбиты и для произвольных положительных чисел ε и T существуют как положительные, так и отрицательные значения t, по абсолютной величине превышающие T, такие, что $\rho(p, f(p, t)) < \varepsilon$.

3. Нам придется пользоваться следующими леммами, доказательства которых мы опускаем в виду их очевидности, заметив только, что вторая лемма следует из непрерывной зависимости орбит от начальных условий.

Лемма I. *Пусть A — инвариантное множество и $B \subset A$ — положительно (отрицательно) инвариантное множество; тогда $A - B$ есть множество отрицательно (положительно) инвариантное.*

Лемма II. *Замыкание $\bar{A}$ положительно (отрицательно) инвариантного множества A есть множество положительно (отрицательно) инвариантное.*

4. Инвариантное замкнутое множество Ω (которое может не быть ограниченным) мы назовем квази-минимальным, если его нельзя представить в виде суммы двух отличных от Ω замкнутых множеств, одно из которых положительно, а другое отрицательно инвариантное.

Теорема I. *Пусть Ω — квази-минимальное множество и Δ — произвольное положительно (отрицательно) инвариантное подмножество Ω; тогда множество Δ или всюду плотно в Ω или нигде не плотно в нем.*

Мы ограничимся доказательством теоремы в предположении, что множество Δ положительно инвариантное; так как для случая, когда множество Δ отрицательно инвариантное, теорема доказывается совершенно аналогично.

Предположим, что множество Δ не всюду плотно в Ω, и предположим вопреки условию, что оно не будет нигде не плотным в нем. Тогда в множестве Ω найдется относительная область G, в которой будет всюду плотным множество точек, принадлежащих Δ, и такая область G', ни одна точка которой не принадлежит Δ. Рассмотрим положительно инвариантное множество всех точек вида $f(p, t)$, где $p \subset \Delta \cdot G$ и $t \geqslant 0$. Обозначим через Ω_1 замыкание этого множества; в силу леммы II множество Ω_1 будет положительно инвариантным. Очевидно, что $G \subset \Omega_1$ и $G' \cdot \Omega_1 = 0$, а потому $\Omega_1 \neq \Omega$. Рассмотрим множество $\Omega - \Omega_1$, которое в силу леммы I будет отрицательно инвариантным, и обозначим через Ω_2 замыкание этого множества, которое в силу леммы II будет отрицательно инвариантным. Заметим далее, что $G' \subset \Omega_2$ и $G \cdot \Omega_2 = 0$, а потому $\Omega_2 \neq \Omega$.

Из способа построения множеств Ω_1 и Ω_2 следует, что

$$\Omega = \Omega_1 = \Omega_2,$$

причем Ω_1 — замкнутое положительно инвариантное, а Ω_2 — замкнутое отрицательно инвариантное множество. Но это противоречит предположению, что множество Ω квази-минимальное, и теорема доказана.

5. Мы докажем теперь теоремы, устанавливающие связь устойчивых по Poisson'у движений с квази-минимальными множествами.

Теорема II. *Всякое устойчивое по Poisson'у движение $f(p, t)$ содержится в некотором квази-минимальном множестве Ω, причем орбита этого движения всюду плотна в Ω.*

Обозначим через Ω множество точек, принадлежащих замыканию орбиты $f(p, t)$. Множество Ω будет инвариантным и замкнутым; кроме того орбита движения $f(p, t)$ всюду плотна в Ω. Покажем, что множество Ω квази-минимальное.

Предположим, что это неверно. Тогда можно будет указать два отличных от Ω замкнутых множества Ω_1 и Ω_2, первое из которых положительно, а второе отрицательно инвариантное, таких, что $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$.

Точка p принадлежит по крайней мере одному из множеств Ω_1 и Ω_2; допустим для определенности, что $p \subset \Omega_1$. При наших предположениях найдется относительная область $G \subset \Omega - \Omega_1$. Так как множество Ω_1 положительно инвариантное и $p \subset \Omega_1$, то $f(p, t) \not\subset G$ при $t \geqslant 0$.

Но это противоречит свойствам движения $f(p, t)$, которое есть устойчивое по Poisson'у движение с орбитой всюду плотной в Ω.

Теорема доказана.

Теорема III. *Все точки квази-минимального множества Ω, за исключением множества точек первой категории R. Baire'а, расположены на орбитах устойчивых по Poisson'у движений, каждая из которых всюду плотна* в Ω.

Обозначим через Q множество точек, принадлежащих Ω и расположенных на таких орбитах, у которых по крайней мере одна полуорбита не будет всюду плотной в Ω, а через Q^1 и Q^2 множества точек, расположенных на орбитах, у которых не будут всюду плотными в Ω соответственно положительная и отрицательная полуорбиты.

Рассмотрим области $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$, образующие счетную базу множества Ω. Для всякой точки $p \subset Q^1$ можно указать такую область U_ν, что ни одна точка $f(p, t)$ при $t \geqslant 0$ не будет принадлежать области U_ν. Обозначим через $Q_1^1, Q_2^1, \ldots, Q_n^1, \ldots$ множества таких точек, которые являются начальными точками положительных полуорбит, не пересекающихся соответственно с областями $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots$ Каждое из множеств Q_i^1 положительно инвариантное и не может быть всюду плотным в Ω; но тогда в силу теоремы I каждое из множеств Q_i^1 нигде не плотно в Ω.

С другой стороны, очевидно, что

$$Q^1 = \sum_{i=1}^{n} Q_i^1,$$

таким образом множество Q^1 есть сумма счетного числа множеств Q_i^1, каждое из которых нигде не плотно в Ω, т. е. оно есть множество первой категории R. Baire'a. Совершенно аналогично можно доказать, что множество Q^2 будет первой категории R. Baire'a. Но тогда и множество $Q = Q^1 + Q^2$ будет первой категории R. Baire'a относительно Ω.

Множество $P = \Omega - Q$ как дополнение к множеству первой категории не может быть пустым, а каждая орбита, входящая в P, будет орбитой устойчивого по Poisson'у движения, так как обе ее полуорбиты всюду плотны в Ω. Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Hilmy, Annals of Mathematics, **37** (1936).