Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 3

ФИЗИКА

С. ШУБИН и А. СМИРНОВ

О РАССЕЯНИИ СВЕТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА ПО НЕЛИНЕЙНОЙ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

(Представлено академиком Л. И. Мандельштамом 20 III 1937)

Согласно нелинейной электродинамике наличие электростатического поля точечного заряда должно как-то исказить свойства электромагнитной световой волны в том участке пространства, где находится заряд. В настоящей статье мы покажем, что это искажение может быть отчасти описано как появление рассеянного света, и рассмотрим этот эффект рассеяния с точки зрения простейшей нелинейной теории.

1. Плотность энергии электромагнитного поля (если только она не содержит явно производных векторов поля) должна в любой теории представляться выражением вида:

$$U = \frac{b^2}{4\pi} W\left(\frac{D^2}{b^2}, \frac{B^2}{b^2}, \frac{(DB)^2}{b^4}\right), \tag{1}$$

где D и B—векторы электрического и магнитного поля *, а b—критическое поле.

Мы полагаем

$$D = D_0 + D_{tr},\ B = B_{tr}, \tag{2}$$

где D_0—продольное электростатическое поле точечного заряда, а D_{tr}, B_{tr}—поперечное поле световых волн. Так как продольная часть поля не квантуется, то можно просто написать (в обычных обозначениях):

$$D_0 = Ze\frac{r}{|r|^3}. \tag{3}$$

Подставим формулы (2) в (1) и разложим функции W по степеням величин D_{tr} и B_{tr}, отбрасывая все степени выше второй (тем самым мы пренебрегаем всеми a priori возможными процессами перехода, в которых принимают участие более чем два кванта). Это дает

$$W = W^0 + \frac{2D_0D_{tr} + D^2{}_{tr}}{b^2} W_1^{(0)} + \frac{B^2{}_{tr}}{b^2} W_2^{(0)} + \frac{(D_0B_{tr})^2}{b^4} W_3{}^{(0)} + 2\frac{(D_0D_{tr})}{b^4} W_{11}^{(0)}, \tag{4}$$

где, например, $W_1^{(0)}$ обозначает производную функции W по первому аргументу, в которой положено $D_{tr} = B_{tr} = 0$, аналогичный смысл имеют и другие обозначения.

---

* Для простоты записи мы не пользуемся никакими специальными обозначениями для векторных величин.

Вспоминая, что невозмущенная плотность энергии равна

$$4\pi W^{(0)} + \frac{D_{tr}^2 + B_{tr}^2}{8\pi},$$

и пользуясь обычным разложением для D_{tr} и B_{tr}:

$$D_{tr} = \sqrt{\frac{2\pi hc}{V}} \sum_k \sqrt{|k|}\, D_k e^{ikr};\quad B_{tr} = \sqrt{\frac{2\pi hc}{V}} \sum_k \sqrt{|k|}\, B_k e^{ikr} \tag{5}$$

(h—постоянная Планка, деленная на 2π; V—объем хольраума), легко получить отсюда следующее выражение для возмущающей энергии взаимодействия между электростатическим полем и полем световых волн:

$$H' = \frac{hc}{2V} \sum_{k', k''} \sqrt{|k'|\,|k''|} \int \Big[D_{k'} D_{k''} \Big(W_1^{(0)} - \frac{1}{2}\Big) + B_{k'} B_{k''} \Big(W_2^{(0)} - \frac{1}{2}\Big) +$$

$$+ \frac{1}{b^2} D_0 B_{k'} \cdot D_0 B_k W_3^{(0)} + \frac{2}{b^2} D_0 D_{k'} \cdot D_0 D_k W_{11}^{(0)} \Big] e^{i(k'+k'')r}\, d\tau. \tag{6}$$

Если теперь ввести величины f_k, обычно употребляемые для описания поперечного электромагнитного поля:

$$D_k = f_k + f_{-k}^{+};\quad B_k = [k_0,\ f_k - f_{-k}] \tag{7}$$

(k_0—единичный вектор в направлении k), то в выражение (6) войдут члены, содержащие произведения типа $f_{k'}^{+} f_{k''}$, которые как раз и обусловливают собой наш эффект рассеяния. Непосредственно видно, что частота рассеянного света должна быть при этом в точности равна частоте падающего. Несложные вычисления показывают, что дифференциальный эффективный поперечник, соответствующий рассеянию в телесном угле $d\Omega$ под углом Θ к направлению первичного пучка, определяется следующей формулой (полученной после суммирования по обеим поляризациям рассеянного света и усреднения по обеим поляризациям падающего света):

$$d\Phi = 8\pi^4 \frac{\alpha^6}{\lambda^4} \left[(p + q\cos\Theta + q'\sin^2\Theta)^2 + (p\cos\Theta + q + p'\sin^2\Theta)^2\right] d\Omega, \tag{8}$$

где положено

$$\alpha = \sqrt{Z}\cdot\rho,\quad \rho = \sqrt{\frac{e}{b}}, \tag{9}$$

$$p = \int_0^\infty r^2 \Big[2W_1^{(0)}\Big(\frac{1}{r^4}\Big) - 1\Big] \frac{\sin\beta r}{\beta r}\, dr + 4\int_0^\infty \frac{1}{r^2} W_{11}^{(0)}\Big(\frac{1}{r^4}\Big) \frac{\sin\beta r - \beta r\cos\beta r}{(\beta r)^3}\, dr, \tag{10$_1$}$$

$$q = \int_0^\infty r^2 \Big[2W_2^{(0)}\Big(\frac{1}{r^4}\Big) - 1\Big] \frac{\sin\beta r}{\beta r}\, dr + 2\int_0^\infty \frac{1}{r^2} W_3^{(0)}\Big(\frac{1}{r^4}\Big) \frac{\sin\beta r - \beta r\cos\beta r}{(\beta r)^3}\, dr, \tag{10$_2$}$$

$$p' = 4\int_0^\infty \frac{1}{r^2} W_{11}^{(0)}\Big(\frac{1}{r^4}\Big) \Big[\frac{\sin\beta r}{\beta r} - 3\,\frac{\sin\beta r - \beta r\cos\beta r}{(\beta r)^3}\Big] dr, \tag{10$_3$}$$

$$q' = 2\int_0^\infty \frac{1}{r^2} W_3^{(0)}\Big(\frac{1}{r^4}\Big) \Big[\frac{\sin\beta r}{\beta r} - 3\,\frac{\sin\beta r - \beta r\cos\beta r}{(\beta r)^3}\Big] dr, \tag{10$_4$}$$

$$\beta = 4\pi\frac{\alpha}{\lambda}\sin\frac{\Theta}{2}. \tag{11}$$

В частности, когда

$$\lambda \gg 4\pi\alpha \tag{12}$$

(т. е. λ велико по сравнению с линейными размерами той области, в которой $|D_0| > b$ или $\sim b$), зависимость $d\Phi$ от λ и величины заряда

Ze получается одинаковой для всех W. В этом предельном случае мы можем положить во всех интегралах (10) просто $\beta = 0$, что дает

$$p = \int\limits_0^\infty r^2 \left[2W_1^{(0)}\left(\frac{1}{r^4}\right) - 1\right] dr + \frac{4}{3}\int\limits_0^\infty \frac{1}{r^2} W_{11}^{(0)}\left(\frac{1}{r^4}\right) dr;$$

$$q = \int\limits_0^\infty r^2 \left[2W_2^{(0)}\left(\frac{1}{r^4}\right) - 1\right] dr + \frac{2}{3}\int\limits_0^\infty \frac{1}{r^2} W_3^{(0)}\left(\frac{1}{r^4}\right) dr \tag{13}$$

и $p' = q' = 0$.

Подставляя это в (8), мы получаем:

$$d\Phi = 8\pi^4 \frac{\alpha^6}{\lambda^4}[(p^2+q^2)(1+\cos^2\vartheta) + 4pq\cos\vartheta] \tag{14}$$

и

$$\Phi = \frac{128\pi^5}{3} Z^3 \frac{\rho^6}{\lambda^4}(p^2+q^2). \tag{15}$$

2. Примем для иллюстрации полученных формул на конкретном примере, что W дается первым борновским выражением:

$$W = \sqrt{1 + \frac{D^2+B^2}{b^2} + \frac{D^2B^2}{b^4}} - 1. \tag{16}$$

Тогда мы получаем из (14)

$$d\Phi = \frac{2\pi^4}{9}\gamma^2\frac{\alpha^6}{\lambda^4}[25(1+\cos^2\vartheta) - 48\cos\Theta]\,d\Omega, \tag{17}$$

где

$$\gamma = \int\limits_0^\infty \frac{dr}{\sqrt{1+r^4}} = 1.8541. \tag{18}$$

Отсюда, вспоминая, что согласно Борну

$$\rho = \frac{2}{3}\gamma\frac{e^2}{mc^2},$$

имеем:

$$\Phi = \frac{200\pi}{3}\left(\frac{4\pi\gamma^2}{9}\right)^4 Z^3 \frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right). \tag{19}$$

По второй версии борновской теории

$$W = \sqrt{1 + \frac{D^2+B^2}{b^2} + \frac{D^2B^2-(DB)^2}{b^4}} - 1, \tag{20}$$

что дает

$$d\Phi = \frac{2\pi^4}{9}\gamma^2\frac{\alpha^6}{\lambda^4}[13(1+\cos^2\vartheta) - 24\cos\Theta]\,d\Omega \tag{21}$$

и

$$\Phi = \frac{104\pi}{3}\left(\frac{4\pi\gamma^2}{9}\right)^4 Z^3\frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^6. \tag{22}$$

Вычисления показывают, что для $\lambda \sim 4\pi\alpha$ эффективный поперечник, вычисляемый из «точной» формулы (8), в 2—3 раза меньше, чем тот, который дает формула (15). Вообще возрастание Φ с переходом к более коротким волнам идет согласно (8) значительно медленнее, чем по закону λ^4.

3. Если все поля, с которыми мы имеем дело, слабы, то выражение (1) может быть написано в совершенно общей форме и содержит только две произвольные постоянные:

$$W = \frac{D^2+B^2}{2b^2} + c_1\frac{(D^2-B^2)}{b^4} + c_2\frac{(DB)^2}{b^4}. \tag{23}$$

Подстановка этого выражения в вышеприведенные формулы приводит к расходящимся результатам [подобно тому, как собственная энергия точечного заряда, вычисленная по (23), расходится в нелинейных поправках еще сильнее, чем в первом члене]. Разобранные примеры показывают однако, что если мы подставим (23) в (10) или (13) и будем интегрировать не от 0 до ∞, а от 1 до ∞ (т. е. как бы припишем нашему заряду эффективный радиус порядка α), то результат получится в общих чертах такой же, как и при подстановке соответствующего «точного» W. Поэтому для общей ориентировки небесполезно привести полученное таким путем выражение для эффективного поперечника:

$$d\Phi = \frac{32\pi^4}{9}\frac{\alpha^6}{\lambda^4}\left\{[100\,\sigma_1^2 + (\sigma_2 - 6\sigma_1)^2](1 + \cos\Theta) + 40\,\sigma_1(\sigma_2 - 6\sigma_1)\cos\Theta\right\} d\Omega \quad (24)$$

и

$$\Phi = \frac{512\pi^5}{27} Z^3 \frac{\rho^6}{\lambda^4}[100\,\sigma_1{}^2 + (\sigma_2 - 6\,\sigma_1)^2] \quad (25)$$

(оба эти выражения справедливы при $\lambda \gg 4\pi\alpha$).

Согласно Гейзенбергу и Эйлеру мы имеем:

$$\sigma_1 = -0.49; \quad \sigma_2 = 7\,\sigma_1.$$

При этом угловое распределение определяется фактором

$$101\,(1 + \cos^2\Theta) + 40\cos\Theta,$$

т. е. большая часть света рассеивается под углами $\Theta < 90°$. Для Φ отсюда находим $\Phi \sim 1.4 \cdot 10^5 Z^3 \frac{\rho^6}{\lambda^4}$, что при подстановке $\rho = \frac{e^2}{mc^2}$ приводит к численным значениям такого же порядка величины, какие получаются из борновского W.

4. Если рассматривать задачу взаимодействия радиального электростатического поля со световым полем с точки зрения дираковской теории позитрона, то предыдущие рассуждения могут быть применены лишь в известном предельном случае:

а) когда мы имеем дело не с точечным зарядом, а с заряженным шариком, радиус которого больше, чем комптоновская длина волны, а значение полного заряда таково, что сила поля в каждой точке $\ll \frac{m^2c^3}{he}$;

б) когда длина волны λ больше комптоновской.

Нам представлялось однако небесполезным посмотреть сперва, что дает простейшая нелинейная теория, так как здесь мы имеем дело с новым эффектом, который повидимому может быть реально наблюден и следовательно может служить для сравнения результатов различных теорий.

Для $\lambda = 4.7$ X · E и $Z = 82$ вышеприведенные формулы дают $\Phi \sim 10^{-24}$ см^2, что не противоречит наблюдениям Майтнер ([1]) и Боте и Горна ([2]) над жесткой компонентой рассеянного излучения в свинце. Угловое распределение, выведенное из борновского выражения для плотности энергии, находится однако в резком противоречии с данными Боте и Горна.

Теоретическая группа
Уральского физико-технического института.
Свердловск.

Поступило
20 III 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] ZS. f. Phys., **84**, 137 (1933). [2] ZS. f. Phys., **88**, 683 (1934).