Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 2

МАТЕМАТИКА

В. С. ИГНАТОВСКИЙ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ПО ПОВОДУ ЛАПЛАСОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ. VI

Мы рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c_1\frac{\partial u}{\partial t}+a_1\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+mu=\varphi(x,y,t). \tag{1}$$

При этом $u(x,y,t)$ есть функция, зависящая лишь от x, y и t, а не от z. Мы имеем таким образом плоский случай и хотим решить следующую задачу.

Плоскость YZ прямоугольной системы координат мы считаем граничной плоскостью, с правой стороны от которой (положительные x) действительно уравнение (1).

Аналогично четырем величинам (2) и (3) нашей заметки I [1], мы и тут введем четыре величины, вытекающие из $u(x,y,t)$:

$$u(0,y,t)=u_0(y,t);\quad \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\right|_{x\to 0}=h(y,t) \tag{2}$$

и

$$u(x,y,0)=f(x,y);\quad \left.\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}\right|_{t\to 0}=F(x,y). \tag{3}$$

Граничную плоскость, от которой зависят граничные условия, предполагаем простирающейся в пределах $-\infty<y<+\infty$. Поэтому мы применим к нашим уравнениям (1)—(3) двухстороннюю трансформацию Лапласа (относительно y).

Мы получим поэтому для нижних функций $u(x,y,t)$ и $\varphi(x,y,t)$ относительно y:

$$w(x,\varepsilon,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\varepsilon y}\,u(x,y,t)\,dy \tag{4}$$

и

$$\gamma(x,\varepsilon,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\varepsilon y}\,\varphi(x,y,t)\,dy. \tag{5}$$

Аналогично получим для

$$u_0(y,t),\quad h(y,t),\quad f(x,y),\quad F(x,y) \tag{6}$$

следующие нижние функции относительно y:

$$\eta(\varepsilon, t), \quad \zeta(\varepsilon, t), \quad \vartheta(x, \varepsilon), \quad \theta(x, \varepsilon). \tag{7}$$

Далее получим из (1)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_1\frac{\partial w}{\partial t} + a_1\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (m - \varepsilon^2)\, w = \gamma(x, \varepsilon, t). \tag{8}$$

Мы положим теперь, что из четырех величин (2) и (3) нам даны: первая из величин (2) и обе величины (3). Тогда выражения (6) и (7) заметки I дадут нам в нижнем пространстве относительно y полное решение задачи в случае, если мы в этих выражениях на место

$$u(x, t), \quad v, \quad u_0(t), \quad f(x), \quad F(x) \tag{9}$$

вставим следующие величины *:

$$w(x, \varepsilon, t), \ \sqrt{v^2 - \varepsilon^2}, \eta(\varepsilon, t), \vartheta(x, \varepsilon), \theta(x, \varepsilon). \tag{10}$$

С этими таким образом измененными выражениями (6) и (7) заметки I мы переходим в верхнее пространство относительно y и получаем таким образом окончательное решение нашей задачи. Мы не имеем возможности выписать его здесь полностью, а ограничимся лишь частью, соответствующей выражению (7) заметки I (для $x > tc$), а недостающее мы постараемся описать.

Мы будем иметь:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{e^{-\mu t}}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-tc}^{+tc} e^{-\nu z} P\left\{f(x - z, y - s), t, z, s, v\right\} dz + \\ &+ \frac{e^{-\mu t}}{2c}\int\limits_{-ct}^{+ct} e^{-\nu z} P\left\{F(x - z, y - s) + \mu f(x - z, y - s), t, z, s, v\right\} dz + \\ &+ \frac{c}{2}\int\limits_0^t e^{-z\mu}\, dz \int\limits_{-zc}^{+zc} e^{-\nu l} P\left\{\varphi(x - l, y - s, t - z), z, l, s, v\right\} dl, \qquad x > tc. \end{aligned} \tag{11}$$

При этом P служит для обозначения функции и например будет

$$P\left\{f(x - z, y - z), t, z, s, v\right\} = $$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\sqrt{c^2t^2 - z^2}}^{+\sqrt{c^2t^2 - z^2}} \frac{f(x - z, y - s)\cos v\sqrt{c^2t^2 - z^2 - s^2}}{\sqrt{c^2t^2 - z^2 - s^2}}\, ds. \tag{12}$$

Поэтому выражение (11) может быть преобразовано в интегралы типа Пуассона-Парсиваля; например вместо первого члена в (11) мы можем написать:

$$\frac{e^{-\mu t}}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r=0}^{ct} e^{-\nu r\cos\varphi}\, \frac{f(x - r\cos\varphi, y - r\sin\varphi)\cos v\sqrt{c^2t^2 - r^2}}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}}\, r\,dr, \tag{13}$$

* Не надо смешивать встречающуюся там переменную y интегрирования с координатой y в настоящей заметке.

что отличается лишь фактором $\cos\varrho\sqrt{c^2t^2-r^2}$ под интегралом от обычного интеграла Пуассона-Парсиваля плоского уравнения волны ($\mu=\nu=m=0$). Также и тут мы интегрируем вдоль круга с центром в ауфпункте и радиусом, равным ct, т. е. увеличивающимся со временем. Этот круг, обозначаемый нами для краткости волновым кругом, пройдет по всей плоскости YX и даст нам возможность описать пропущенное нами выражение для $u(x,y,t)$, соответствующее (6) заметки I.

Прежде всего заметим, что выражение (7) заметки I, если мы откинем условие $x>tc$ и положим $\nu=0$ и $\varphi(x,t)=0$, соответствует, как это известно, например для случая бесконечной в обе стороны проволоки. То же самое будет справедливо и для полного выражения (7) заметки I.

Совершенно аналогично и (11), без условия $x>tc$, справедливо для всего пространства, т. е. по всей плоскости YX, причем наша граничная плоскость или линия (ось Y) уже больше для нас не существует.

Мы построим зеркальные изображения функций $f(x,y)$, $F(x,y)$ и $\varphi(x,y,t)$ относительно оси Y и откинем нашу граничную плоскость или линию. Тогда волновой круг, при обходе всей плоскости YX, пройдет также поверх этих изображений и прибавит соответственные интегралы к интегралам выражения (11). Это обстоятельство и описывается пропущенным нами выражением. Кроме того оно содержит еще член

$$-\frac{c}{\pi}e^{-\nu x}\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\frac{x}{c}}^{t}e^{-\mu z}\,dz\int\limits_{-\sqrt{c^2z^2-x^2}}^{\sqrt{c^2z^2-x^2}}\frac{u_0(y-s,\,t-z)\cos\varrho\sqrt{c^2z^2-x^2-s^2}}{\sqrt{c^2z^2-x^2-s^2}}\,ds, \quad (14)$$

который зависит от данных значений величины $u_0(y,t)$ вдоль оси Y, причем интегрирование ведется вдоль той части этой оси, которая в данный момент отрезается волновым кругом.

В частном случае, когда $f(x,y)=F(x,y)=\varphi(x,y,t)=0$, полным решением, при $x<tc$, будет для $u(x,y,t)$ как раз выражение (14). При $x>ct$ получим нуль.

Если с левой стороны (1) будем иметь еще член $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, а с правой соответственно $\varphi(x,y,z,t)$, т. е. случай трех измерений, то ясно, что мы можем от (1) к этому случаю перейти совершенно аналогично тому, как мы это сделали при переходе от случая одного измерения к (1). Но так как мы при этом встречаемся с некоторыми особенностями, о которых желательно было бы упомянуть, то поэтому мы еще вернемся к этому случаю в одной из следующих заметок.

В заключение приведем замечание, относящееся ко всем предыдущим заметкам и касающееся выражения для сворачивания*, которое мы употребляли в более расширенном виде. Пусть

$$f_1(z)=\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}e^{-zt}F_1(t)\,dt; \qquad \beta_1>\alpha_1, \quad (15)$$

---

* Это выражение «сворачивание», соответствующее немецкому слову «Faltung», введено Г. М. Мюнцем ([2]).

и

$$f_2(z) = \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} e^{-zt} F_2(t)\,dt; \qquad \beta_2 > \alpha_2. \tag{16}$$

Тогда получим:

$$f_1(z) f_2(z) = \int\limits_{\alpha_1+\alpha_2}^{\beta_1+\beta_2} e^{-zt} F(t)\,dt, \tag{17}$$

причем

$$F(t) = \int\limits_{\mathrm{Max}(\alpha_1;\ t-\beta_2)}^{\mathrm{Min}(\beta_1;\ t-\alpha_2)} F_1(\tau) F_2(t-\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

что может быть рассматриваемо как обобщенная теорема свертывания.

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \infty$ (18) переходит в обыкновенную теорему свертывания.

Доказательство (17) и (18), на котором мы здесь останавливаться не будем, основывается на предположении абсолютной интегрируемости (15) и (16). Более слабые предположения, а также и обобщения, аналогично тому, как это сделал Дэч (³), при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $\beta_1 = \beta_2 = \infty$, мы не применяли.

Исследовательский институт
математики и механики.
Ленинградский государственный
университет.

Поступило
3 III 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. С. Игнатовский, ДАН, II, 1 (1935). [2] Г. М. Мюнц, Доклады 2-го Всесоюзного съезда 1934 г., I, 324. [3] G. Doetsch, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Ser. II, IV, 71 (1935).