Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 1

МАТЕМАТИКА

М. КРЕЙН

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ГЕОМЕТРИИ ВЫПУКЛЫХ АНСАМБЛЕЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ ЛИНЕЙНОМУ НОРМИРОВАННОМУ И ПОЛНОМУ ПРОСТРАНСТВУ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 20 XI 1936)

Пусть E—пространство типа (B), т. е. линейное нормированное и полное пространство *.

Кривая $L: x = x_t \, (a \leqslant t \leqslant b)$, проведенная в E, называется слабо непрерывной, если для всякого линейного функционала $f \subset \overline{E}$ функция от t: $f(x_t)$ непрерывна в (a, b). Легко показать, что наименьший линейный замкнутый ансамбль E_1, содержащий такую кривую L (линейная замкнутая обертка кривой L), является сепарабельным пространством типа (B). Следовательно согласно теореме Банаха-Мазура [см. (B), теорема 9, стр. 185] пространство E_1 эквивалентно некоторому линейному замкнутому подпространству пространства (C). С помощью этого факта без труда устанавливается:

Теорема 1. *Если кривая $L: x = x_t \subset E \, (a \leqslant t \leqslant b)$ слабо непрерывна, то, какова бы ни была функция $\sigma(t) \, (a \leqslant t \leqslant b)$ ограниченной вариации, ей всегда отвечает один и только один элемент $y \subset E$ такой, что равенство*

$$f(y) = \int_a^b f(x_t) \, d\sigma(t)$$

имеет место при любом $f \subset \overline{E}$.

Для этого элемента y будем писать:

$$y = \int_a^b x_t d\sigma(t). \tag{1}$$

Опираясь на теорему Helly (¹), а также на одну теорему Мазура (²), нетрудно далее обосновать следующую теорему:

Теорема 2. *Ансамбль K всех $y \subset E$, допускающих представление (1) с некоторой неубывающей функцией $\sigma(t)$, вариация которой $\sigma(b)$ —*

* Терминологию и обозначения мы заимствуем из книги С. Банаха «Théorie des opérations linéaires», Варшава, 1932; в дальнейшем мы обозначаем эту книгу знаком (B).

$-\sigma(a) = 1$, *совпадает с наименьшим выпуклым замкнутым ансамблем, описанным около кривой L. Ансамбль K слабо компактен и слабо замкнут.*

Теперь можно сформулировать теорему, которая кажется на первый взгляд парадоксальной.

Теорема 3. *Если пространство E таково, что единичная сфера $\|x\| \leqslant 1$ не является слабо компактной, то, какова бы ни была слабо непрерывная кривая L, соответствующий ансамбль K содержит только граничные точки. Если кроме того кривая L не содержится ни в какой гиперплоскости $f(x) = c$ ($f \subset \overline{E}$, c — число), то ансамбль K содержит некоторый ансамбль K_0, плотный в K, через точки которого не проходит ни одна опорная гиперплоскость ансамбля K.*

Первая часть этой теоремы есть непосредственное следствие теоремы 2. Чтобы доказать вторую часть, рассмотрим ансамбль K_0 именно тех точек $y_0 \subset K$, которые допускают представление

$$y_0 = \int_a^b x_t d\sigma_0(t),$$

где $\sigma_0(t)$ — функция, существенно растущая в (a, b), и $\sigma_0(b) - \sigma_0(a) = 1$. Согласно цитированной теореме Мазура ([2]) выпуклый ансамбль K_0, будучи слабо плотным в K, является плотным в K в обычном смысле. С другой стороны, если некоторая гиперплоскость $f(x) = c$ проходит через какое-либо $y_0 \subset K_0$, то $c = f(y_0)$, и следовательно в силу того, что

$$f(y_0) = \int_a^b f(x_t)\, d\sigma_0(t) \quad \text{и} \quad \sigma_0(b) - \sigma_0(a) = 1,$$

мы будем иметь:

$$\int_a^b [f(x_t) - c]\, d\sigma_0(t) = 0. \tag{2}$$

Если кривая L не содержится ни в какой гиперплоскости, то $f(x_t) - c \not\equiv 0$, следовательно в силу (2) функция $f(x_t) - c$ меняет знак в (a, b), т. е. гиперплоскость $f(x) = c$ пересекает кривую L и стало быть ансамбль K. Теорема 3 таким образом доказана.

Заметим, что условия теоремы 3 можно реализовать, беря в качестве E хотя бы (C)-пространство непрерывных функций, определенных в $(0, 1)$ [с определением нормы $\|x\| = \sup\limits_{0 \leqslant s \leqslant 1} |\varphi(s)|$, а в качестве L кривую, проведенную в (c):

$$x = e^{(s+1)\,t} \quad (a \leqslant t \leqslant b).$$

Теорема 2 допускает следующее обобщение.

Теорема 4. *Если некоторый ансамбль $G \subset E$ сепарабелен, слабо компактен и слабо замкнут, то наименьшее выпуклое замкнутое множество K, описанное около G, обладает теми же свойствами.*

Укажем, что ансамбль G называется **слабо компактным**, если всякая последовательность элементов $\{x_n\} \subset G$ содержит частную подпоследовательность $\{x_{n_\nu}\}$, сходящуюся слабо к некоторому элементу $x_0 \subset E$. Ансамбль G будет кроме того слабо замкнут, если $x_0 \subset G$.

Доказательство теоремы 4. Без ограничения в общности можно полагать пространство E сепарабельным, ибо в противном случае можно было бы заменить во всех последующих рассуждениях пространство E сепарабельным пространством E_1, являющимся линейной замкнутой оберткой ансамбля G. Но если E сепарабельно, то существует последовательность функционалов $\{ f_n \} \subset \overline{E}$, слабо плотная в E [см. (B), теорема 4, стр. 124]. С помощью этой последовательности определим расстояние (x, y) между всякими двумя элементами $x \subset G$ и $y \subset G$ по формуле:

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|}.$$

Легко показать, что при этом определении расстояния ансамбль G является полным и компактным. Кроме того сходимость какой-либо последовательности $\{ x_n \} \subset G$ к x_0 в смысле

$$\lim_{n \to \infty} (x_n, x_0) = 0$$

эквивалентна слабой сходимости $\{ x_n \}$ к x_0.

В силу компактности и полноты G существует (³) непрерывное преобразование совершенного неплотного ансамбля Кантора $P \subset (0, 1)$ в ансамбль G. Обозначим через x_t элемент из G, соответствующий точке $t \subset P$; кроме того положим в каждом смежном с P интервале (t_1, t_2)

$$x_t = \frac{(t - t_1)\, x_{t_1} + (t_2 - t)\, x_{t_2}}{t_2 - t_1}. \tag{3}$$

Этим самым x_t определено для всякого $t \subset (0, 1)$. Если последовательность $\{ t_n \} \subset P$ сходится к t_0, то $\lim\limits_{n \to \infty} (x_{t_n}, x_{t_0}) = 0$, и следовательно последовательность $\{ x_{t_n} \}$ сходится слабо к x_0. Отсюда легко заключить, что кривая $L : x \doteq x_t \, (a \leqslant t \leqslant b)$ слабо непрерывна.

Так как, с другой стороны, кривая L, содержа в себе G, не выходит из K [благодаря условию (3)], то K является одновременно наименьшим выпуклым замкнутым ансамблем, содержащим L; таким образом теорема 4 есть следствие теоремы 2.

Теорема 4 позволяет слегка обобщить замечательное предложение Шаудера (⁴).

A) *Пусть E — сепарабельное пространство типа (B), а $K \subset E$ — выпуклый слабо компактный и слабо замкнутый ансамбль. Всякий слабо непрерывный оператор $U(x)$, отображающий K в свою часть, имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

Этот результат возможно теперь продвинуть несколько далее.

B) *Пусть E—пространство типа (B) и $H \subset E$—некоторый выпуклый замкнутый ансамбль. Всякий слабо непрерывный оператор $U(x)$, отображающий H в сепарабельную слабо компактную и слабо замкнутую часть $G \subset H$, имеет по крайней мере одну неподвижную точку.*

Действительно, согласно теореме 4 наименьший выпуклый замкнутый ансамбль K, содержащий G, сепарабелен, слабо компактен и слабо замкнут. С другой стороны, очевидно $G \subset K \subset H$ и следовательно $U(x)$ отображает K в ансамбль $U(K) \subset G \subset K$, откуда согласно теореме А) Шаудера $U(x)$ имеет неподвижную точку, принадлежащую K.

Государственный университет.
Одесса.

Поступило
20 XI 1936.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Wintner, Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, 78, 89, Leipzig, Hirzel (1929). [2] S. Mazur, Studia Mathematica, IV, 81 (1933). [3] F. Hausdorff, Mengenlehre, 197, Berlin (1927). [4] J. Schauder, Studia Mathematica, 2, 176, Theorem III (1930).