Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 1

МАТЕМАТИКА

В. В. НЕМЫЦКИЙ

I

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СРАВНИМЫЕ С ЛИНЕЙНЫМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 II 1937)

Рассмотрим нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна

$$\varphi x = \int_B K(x, y) f(y, \varphi)\, dy; \tag{1}$$

мы назовем их «сравнимыми с линейными», если для всех u

$$|f(x, u)| \leqslant C|u| + D.$$

Ряд авторов, Иглиш, Голомб, Гаммерштейн ([1]), доказывает теоремы существования для уравнений подобного типа. Целью настоящей работы будет дать ряд обобщений теорем этих авторов, а также указать на возможность значительно более простых доказательств этих положений.

Относительно ядра мы сделаем следующие ограничения:

1. $\int_B K^2(x, s)\, ds \leqslant B$, где B—константа.

2. $\int_B |K(x+h, s) - K(x, s)|\, ds < \varepsilon$, если $|h| < \delta$ независимо от x.

Голомб и Иглиш ([1]) вместо условия (2) предполагали, что ядро $K(x, s)$ имеет допустимые разрывы. Ясно, что во всех «основных» случаях наше условие в этих предположениях выполнено. Что касается функции $f(x, u)$, то мы предположим, что $f(x, u)$ непрерывна по u.

Установим сначала следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если ядро удовлетворяет условиям* (1) *и* (2) *и если* $f(x, u)$ *непрерывна по* u, а $|f(x, u)| \leqslant C|u| + D$, *причем*

$$C \max \left| \int_B K(x, s)\, ds \right| < 1,$$

то уравнение (1) *имеет решение.*

Рассмотрим оператор

$$\psi(x) = O(\varphi) = \int_B K(x, s) f(x, \varphi)\, ds;$$

согласно теореме III моей работы ([2]) он непрерывен в пространстве равномерной сходимости. Докажем, что этот оператор преобразует сферу этого пространства в компактное множество; имеем

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| \leqslant \int_B |K(x+h, y) - K(x, y)|(CL + D)\, dx,$$

если $|\varphi| < L$, т. е.

$$|\psi(x+h) - \psi(x)| \leqslant (CL + D) \int_B |K(x+h, y) - K(x, y)|\, dx,$$

т. е. функции $\psi(x)$ равностепенно непрерывны. Из неравенства Шварца непосредственно следует, что они равномерно ограничены. Следовательно на основании теоремы Ascoli семейство $\{|\varphi(x)| \leqslant L\}$ преобразуется в компактное семейство.

Пусть теперь $\max \left| \int K(x, s)\, ds \right| = K$ и пусть

$$L = \frac{2KD}{1 - KC}.$$

Докажем, что сфера $|\varphi(x)| \leqslant L$ преобразуется в свою часть. Имеем для функций, составляющих сферу $|\varphi(x)| \leqslant L$:

$$|\psi(x)| \leqslant \int_B |K(x, s)|(C|\varphi| + D)\, ds \leqslant KC|\varphi| + KD,$$

$$|\psi(x)| \leqslant KC\frac{2KD}{1 - KC} + KD = \frac{2KD}{1 - KC}\left[\frac{KC}{2} + \frac{1}{2}\right]$$

и так как $\frac{KC}{2} < \frac{1}{2}$, то

$$|\psi(x)| < \frac{2KD}{1 - KC} = L.$$

Теорема 2. *Если $K(x, s)$ удовлетворяет условиям* (1) *и* (2) *и если для всех и имеем* $|f'_u(u, s)| < C$, причем

$$C \max \int_B |K(s, t)|\, dt = \alpha < 1,$$

то решение уравнения (1) *будет существовать и притом единственное.*

Рассмотрим операцию

$$\psi(x) = O(\varphi) = \int_B K(x, s) f(s, \varphi)\, ds.$$

Она, как было показано в теореме 1, непрерывные функции переводит в другие непрерывные. Пусть даны две произвольные непрерывные функции u и v, тогда имеем

$$|\varphi - \psi| = \left| \int K(x, s) f_u(\tilde{u}, s)(u - v)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int |K(x, s)| \cdot C \max |u - v|\, ds \leqslant C \max |u - v| \int |K(x, s)|\, ds,$$

т. е.

$$|\varphi - \psi| \leqslant \alpha \max |u - v|, \text{ где } \alpha < 1.$$

Тогда, как легко видеть, итерации операции $O(\varphi)$ приводят к решению, притом единственному ([3]).

Теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2, Иглиш доказал в предположениях аналогичности функции $f(u, s)$ по u.

Методы доказательств теорем 1 и 2 непосредственно могут быть приложены к доказательству следующих двух теорем Golomb'а ([4]).

Теорема 3. *Если* $K(x, s)$ *удовлетворяет условиям* (1) *и* (2) *и если*

$$|f_i(s, u_1, u_2, \ldots, u_n)| \leqslant a + K_{i_1}|u_1| + \ldots + K_{i_n}|u_n|$$

и если

$$\left(K_{i_1}^2 + K_{i_2}^2 + \ldots + K_{i_n}^2\right)\left(M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2\right) < 1,$$

где

$$M_i^2 = \int_B \int_B |K_i(s, t)|^2\, ds\, dt,$$

то существует решение системы уравнений

$$u_i = \int_B K_i(s, t) f_i(s, u_1, \ldots, u_n)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 4. *Система*

$$u_i = \int_B K_i(s, t) f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_n)\, dt$$

имеет единственное решение, если

$$\int_B \int_B K_i^2(s, t)\, ds\, dt < \infty$$

и

$$[f_i(s, u_1, \ldots, u_n) - f_i(s, v_1, \ldots, v_n)]^2 \leqslant m_1^2 (u_1 - v_1) + \ldots + m_n^2 (u_n - v_n),$$

$$\sum m_i^2 = m^2 < \frac{1}{\int\limits_B \int\limits_B K^2(x, s)\, ds\, dt}.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Москва.

Поступило
23 II 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Iglisch R., Math. Ann., **108**, 1; Golomb, Math. ZS., **39**, 1; Hammerstein, Acta Math., **54**. [2] Немыцкий, Мат. сб., **41**, 3. [3] Мат. сб., **41**, 4.

II.

ОБЩЕЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 23 II 1937)

Рассмотрим операторное уравнение

$$\varphi = O(\varphi).$$

В оператор $O(\varphi)$ могут войти операции типа «функций», результаты которых находятся по данным значениям независимых переменных, и операции типа «функционалов», результаты которых могут быть найдены, если функции, входящие под их знак, заданы для всех значений из их области определения. Мы скажем, что данное операторное уравнение будет интегральным, если единственная операция типа «функционала», входящая под ее знак, есть интегрирование.

Общее интегральное уравнение может быть записано в следующем виде

$$u = f\Big[\, u, \alpha, \lambda, \int\limits_{B_1} K_1(u, \alpha, \lambda, \beta)\, d\beta \ldots \int\limits_{B_n} K_n(u, \alpha, \lambda, \beta)\, d\beta \ldots \Big];$$

число интегралов может быть бесконечным и число переменных в интегралах может расти вместе с номером n неограниченно. Все до сих пор рассмотренные типы интегральных уравнений Шмидта, Гаммерштейна, Урысона, Смирнова ([1]) представляются как частный случай этого общего уравнения. Цель настоящей заметки показать возможность установления теорем существования для общего интегрального уравнения.

Мы применим метод последовательных приближений в его «геометрической» формулировке, т. е. принцип Каччополи-Банаха ([2]). Для этого предположим, что функция $f(u, \alpha, \lambda, \int\limits_{B_1} \dots)$ и функции $K_i(u, \alpha, \lambda, \beta)$ удовлетворяют условиям Липшица, т. е.

$$|f(u', \lambda, \alpha, \gamma_1', \dots, \gamma_n') - f(u'', \lambda, \alpha, \gamma_1'', \dots, \gamma_n'' \dots)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum A_i |\gamma_i' - \gamma_i''| + B|u' - u''|,$$

где

$$\gamma_n = \int\limits_{B_k} K_n \, d\beta$$

и где A_i—функции, зависящие от α и λ, а B только от λ.

$$|K_i(u', \alpha, \beta, \lambda) - K_i(u'', \alpha, \beta, \lambda)| \leqslant C_i |u' - u''|,$$

где C—функции, зависящие от α и λ.

Рассмотрим операцию

$$v = O(u) = f(u, \lambda, \alpha, \int\limits_{B_1} \dots \int\limits_{B_n} \dots).$$

Тогда имеем

$$|O(u') - O(u'')| \leqslant \sum A_i |\gamma_i' - \gamma_i''| + B|u' - u''| \leqslant$$
$$\leqslant \sum A_i \int\limits_{B_i} |K_i(u', \alpha, \beta, \lambda) - K_i(u'', \alpha, \beta, \lambda)| \, d\beta + B|u' - u''| \leqslant$$
$$\leqslant \sum A_i \int\limits_{B_i} C_i(\alpha, \lambda) |u' - u''| \, d\beta + B|u' - u''| =$$
$$= \sum A_i C_i \int\limits_{B_i} |u' - u''| \, d\beta + B|u' - u''|.$$

Пусть теперь функции $\{u(x)\}$ пробегают некоторое множество в полном нормированном пространстве и пусть расстояние $\rho(u_1 u_2) = \|u - v\|$ (норме разности). Далее предположим, что между операцией интегрирования и взятием нормы функции имеется следующая связь:

$$\left|\int f \, dx\right| \leqslant M \|f\|;$$

это условие всегда выполняется для обычно рассматриваемых нормированных пространств.

Применяя это соотношение и имея в виду, что норма суммы меньше или равна сумме норм, имеем

$$\rho[O(u') O(u'')] = \|O(u') - O(u'')\| \leqslant \sum A_i C_i M_i \|u' - u''\| +$$
$$+ |B| \|u' - u''\| \leqslant \left(\sum A_i C_i M_i + B\right) \rho(u', u'').$$

Следовательно решение заданного уравнения будет существовать, если оператор $O(u)$ дает отображение точки некоторого полного нормированного пространства с нормой, удовлетворяющей условию:

$$\left|\int f \, dx\right| \leqslant M \|f\|,$$

в точку того же пространства и если выполнены условия Липшица, причем

$$\left| \sum A_i C_i M_i + B \right| \leqslant d < 1. \tag{1}$$

Конкретизируя наше утверждение для пространства L^p или C, мы получим например следующие теоремы существования.

Теорема 1. Если f и K_i непрерывны, по α, λ и β, и удовлетворяют условиям Липшица по u, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \ldots$ и соблюдены условия (1), то уравнение $u = f(\ )$ имеет единственное решение, получаемое методом итераций. Причем итерации равномерно сходятся к решению.

Теорема 2. Если f и K_i удовлетворяют условиям Липшица по переменным u, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \ldots$ и если функции A_i, C_i; $f(0, \alpha, \lambda, 0, \ldots, 0 \ldots)$ суммируемы в степени p, а $K_i(0, \alpha, \lambda, \beta)$ ограничены, и если

$$\sum^{\infty} M_i \int |A_i C_i|^p \, d\alpha \ \ \mathrm{mes}\, B_i + B \leqslant d < 1,$$

то уравнение $u = f(\ )$ имеет единственное решение. Это решение может быть получено методом итераций, причем итерации сходятся к решению в среднем.

Конечно этим же способом могут быть рассмотрены и системы интегральных уравнений.

Москва.

Поступило
23 II 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Schmidt, Math. Ann., **65**, 4; Hammerstein, Acta Math., **54** (1930); Урысон, Мат. сб., **31**, 2; Смирнов, ДАН, III, 5 (1936). [2] См. напр. Немыцкий, Мат. сб., **41**, 4.