Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 1

МАТЕМАТИКА

Е. ЛЮСТИХ

НЕСКОЛЬКО СХЕМ МЕХАНИЧЕСКИХ ИНТЕГРАТОРОВ

(Представлено академиком А. Н. Крыловым 5 II 1937)

Во многих задачах физики интеграл по плоскости может быть сведен к интегралу по плоскому замкнутому контуру вида:

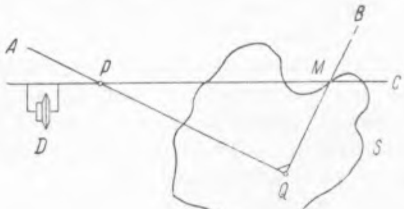
$$\oint \sin(m\theta + \alpha)\sin(n\varphi + \beta)\,d\varphi, \tag{1}$$

где m, n, α, β — постоянные числа,

$\left.\begin{array}{l}\theta\text{ — зенитный угол}\\ \varphi\text{ — азимут}\end{array}\right\}$ сферические координаты элемента контура,

причем начало координат находится на расстоянии h от плоскости контура и полярная ось предполагается перпендикулярной этой плоскости.

Ниже описывается ряд схем для механического вычисления такого рода интегралов путем обвода на чертеже заданного контура S. Пред-



Фиг. 1.

полагается, что на чертеже обозначена проекция Q начала координат на плоскость S. Для удобства изложения в дальнейшем чертеж считается расположенным горизонтально.

Наиболее простым является интегратор для вычисления телесного угла ω, под которым видна из начала координат поверхность, охватываемая контуром S*. Он состоит из трех прямых горизонтальных стержней A, B и C (фиг. 1). Стержни A и B соединены под прямым

---

* Схема интегратора для вычисления телесных углов разработана автором в Гравиметрической лаборатории ВКГР Главнефти СССР.

углом и вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через точку Q чертежа. Стержень C шарнирно прикреплен к стержню A в точке P на расстоянии h (в масштабе чертежа) от точки Q и несет на себе колесико D, совершенно аналогичное колесику планиметра Амслера и выполняющее ту же функцию. Плоскость острого края колесика пересекает стержень C перпендикулярно на расстоянии a от точки P. Точка M пересечения стержней B и C подвижна относительно обоих стержней и при вращении интегратора вокруг оси Q двигается все время в точности над линией S.

Легко доказать, что при этом условии угол между стержнями A и C будет всегда равен θ, и при полном обводе точкой M контура S край колесика D повернется на дугу

$$l = \oint (a + h \cos\theta)\, d\varphi.$$

Отсюда нетрудно перейти к величине телесного угла ω, которая, как известно, выражается интегралом

$$\omega = \oint (1 - \cos\theta)\, d\varphi.$$

Разумеется, должна быть предусмотрена возможность легко изменять расстояние h. Интересно заметить, что, так как по отношению к замкнутому контуру, описываемому любой точкой стержня C, прибор представляет из себя полярный планиметр Амслера, площадь, охватываемая таким контуром, сама по себе может служить мерой величины телесного угла ω.

Дальнейшим усовершенствованием этого интегратора является устройство, вполне подобное устройству дискового планиметра, с тем лишь отличием, что вращение передается диску с помощью вала, протянутого вдоль стержня A, и при изменении расстояния h диск передвигается вместе с точкой P, не теряя сцепления с валом (причем придется очевидно применять конические зубчатки вместо цилиндрических). Преимуществом такой схемы кроме большей точности является и бо́льшая простота вычислений, так как отпадает необходимость делить результат отсчета на величину h.

Интегратор для вычисления телесных углов может найти применение в светотехнике, а в особенности в магнитометрии и в гравиметрии, где с его помощью легко разрешается задача расчета магнитного потенциала или вертикальной составляющей силы тяжести для тела, заданного графически в горизонталях.

Схема, изображенная на фиг. 1, является основой, усложняя которую получаем ряд новых интегрирующих механизмов. Так например, присоединяя к стержню C зубчатую передачу, удваивающую угол поворота оси колесика D, аналогично тому, как это сделано в интеграторе Амслера, мы получим прибор для вычисления величины

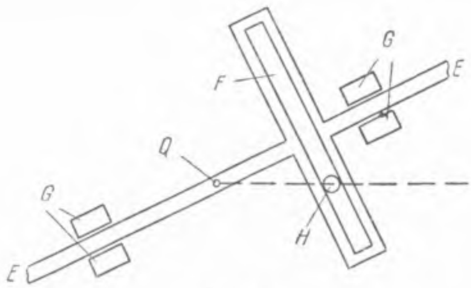
$$\oint \cos 2\theta\, d\varphi.$$

Такая система имеет большое значение для светотехнических расчетов, так как освещенность точки на плоскости, создаваемая параллельной плоской светящейся поверхностью равномерной яркости B, выражается интегралом по контуру светящейся поверхности

$$E = \frac{B}{4} \oint (1 - \cos 2\theta)\, d\varphi,$$

полагая начало координат в освещаемой точке *. Для этой схемы также может быть применен вариант, подобный дисковому интегратору Амслера.

Еще один интегратор получаем, преобразуя дисковый вариант введением механизма, изображенного на фиг. 2. Механизм этот состоит из горизонтального стержня EE, прерванного в одном месте горизонтальной пластинкой со щелью F, перпендикулярной стержню EE. Стержень EE способен передвигаться в направляющих G, G, связанных неподвижно с системой стержней A и B фиг. 1, и своим передвижением (с помощью, например зубчатой рейки) приводит во вращение



Фиг. 2.

диск интегратора. В щель F входит вертикальный штифт H, неподвижный относительно чертежа контура S. При повороте интегратора вокруг оси Q на угол $d\varphi$ диск поворачивается на угол, пропорциональный

$$\sin\varphi\, d\varphi,$$

где φ — угол между стержнем EE и направлением QH. Поэтому интегратор может быть применен для вычисления

$$\oint \cos m\theta \sin\varphi\, d\varphi,$$

а, располагая штифт H на краю зубчатого колеса, катящегося при вращении всей системы вокруг оси Q по ободу неподвижного зубчатого колеса иного диаметра, мы сможем вычислять

$$\oint \cos m\theta \sin n\varphi\, d\varphi.$$

В обоих случаях весьма просто можно получать вместо косинуса — синус и, наоборот, или перейти вообще к формуле (1).

Эти интеграторы могут найти применение в гравиметрии, так как величины, измеряемые гравитационным вариометром, для плоского горизонтального слоя выражаются:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} = \frac{3}{4h}\oint \sin\theta\cos\varphi\, d\varphi - \frac{1}{4h}\oint \sin 3\theta\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} = \frac{3}{4h}\oint \sin\theta\sin\varphi\, d\varphi - \frac{1}{4h}\oint \sin 3\theta\sin\varphi\, d\varphi,$$

$$2\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{4h}\oint \cos 3\theta\sin 2\varphi\, d\varphi - \frac{9}{4h}\oint \cos\theta\sin 2\varphi\, d\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{4h}\oint \cos 3\theta\cos 2\varphi\, d\varphi - \frac{9}{4h}\oint \cos\theta\sin 2\varphi\, d\varphi.$$

Москва.

Поступило
5 II 1937.

* Эта схема разработана автором совместно с Е. С. Ратнером для светотехнической лаборатории Всесоюзного электротехнического института.