Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XV, № 1

МАТЕМАТИКА

Н. С. КОШЛЯКОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ОБ ОДНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИИ В ТЕОРИИ РИМАНОВОЙ ФУНКЦИИ $\zeta(s)$

Предметом настоящего сообщения является вывод одного преобразования определенных интегралов, следствием чего получается возможность найти новые выражения для Римановой функции $\zeta(s)$ [1, 2].

Предположим, что при заданных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеет место соотношение

$$\sqrt{a}\int_0^\infty \varphi(ax)\,\psi(x)\,dx = \sqrt{b}\int_0^\infty \varphi(bx)\,\psi(x)\,dx, \tag{1}$$

причем параметры a и b связаны равенством $ab = k$, где через k обозначена какая-нибудь абсолютная постоянная.

Полагая в (1) $a = \sqrt{k}\,nu$, $b = \frac{\sqrt{k}}{nu}$, найдем, что

$$\int_0^1 u^{s-1}\,du\int_0^\infty \varphi(\sqrt{k}\,nux)\,\psi(x)\,dx + \frac{1}{n}\int_0^1 u^{-s}\,du\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\sqrt{k}\,ux}{n}\right)\psi(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{n}\int_0^\infty u^{-s}\,du\int_0^\infty \varphi\left(\frac{\sqrt{k}\,ux}{n}\right)\psi(x)\,dx. \tag{2}$$

Применяя в последнем интеграле порядок интегрирования и вводя обозначение

$$\Phi(s) = \int_0^\infty \varphi(x)\,x^{-s}\,dx\int_0^\infty \psi(x)\,x^{s-1}\,dx, \tag{3}$$

получим следующее преобразование функции $\Phi(s)$:

$$(\alpha\beta)^{\frac{s-1}{2}}\,\Phi(s) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{s}{2}}\int_0^1 u^{s-1}\,du\int_0^1 \varphi(\alpha xu)\,\psi(x)\,dx +$$
$$+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1-s}{2}}\int_0^1 u^{-s}\,du\int_0^\infty \varphi(\beta xu)\,\psi(x)\,dx, \tag{4}$$

где постоянные α и β связаны соотношением $\alpha\beta = k$. Если функция $\varphi(x)$ допускает разложение в степенной ряд, то формула (4) может быть заменена следующей:

$$(\alpha\beta)^{\frac{s-1}{2}}\Phi(s) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{s}{2}}\int\limits_0^\infty F(s, \alpha x)\,\psi(x)\,dx +$$

$$+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1-s}{2}}\int\limits_0^\infty F(1-s, \beta x)\,\psi(x)\,dx, \tag{5}$$

где

$$F(s,x) = \frac{\varphi(0)}{s} + \frac{\varphi'(0)}{s+1}\frac{x}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{s+2}\frac{x^2}{2!} + \ldots \tag{6}$$
$$\alpha\beta = k,\ 0 < Res < 1.$$

Полагая в формуле (4) $\alpha = \beta = \sqrt{k}$ и $s = \frac{1}{2} + \frac{it}{2}$, найдем, что

$$Re\left\{k^{\frac{s-1}{2}}\Phi(s)\right\}_{s=\frac{1}{2}+\frac{it}{2}} = 4\int\limits_0^\infty \Psi(z)\cos tz\,dz, \tag{7}$$

где

$$\Psi(z) = e^{-z}\int\limits_0^\infty \varphi(\sqrt{k}\,e^{-2z}x)\,\psi(x)\,dx. \tag{8}$$

Обращая интеграл (7) по формуле Фурье, найдем, что

$$\int^\infty Re\left\{k^{\frac{s-1}{2}}\Phi(s)\right\}_{s=\frac{1}{2}+\frac{it}{2}}\cos 2zt\,dt = \pi\Psi(z), \tag{9}$$

где функция $\Psi(z)$ может быть представлена так:

$$\Psi(z) = e^{z}\int\limits_0^\infty \varphi(\sqrt{k}\,e^{2z}x)\,\psi(x)\,dx. \tag{10}$$

Остановимся на некоторых частных случаях полученных преобразований.

Пусть

$$\varphi(x) = e^{-x^2},\ \psi(x) = \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x;\ k = \pi;\ 0 < Res < 1. \tag{11}$$

Из интегралов Лапласа

$$e^{-ax^2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{a}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\pi^2}{a^2}y^2}\cos 2\pi y\,dy \tag{12}$$

и

$$\int\limits_0^\infty \left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x\right\}\cos 2\pi yx\,dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{\Gamma'(1+y)}{\Gamma(1+y)} - \log y\right\} \tag{13}$$

вытекает, что [3]

$$\sqrt{a}\int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2}\left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x\right\}dx =$$

$$= \sqrt{b}\int\limits_0^\infty e^{-b^2x^2}\left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x\right\}dx, \tag{14}$$

где $ab = \pi$.

Так как

$$\Phi(s) = -\frac{\pi}{\sin \pi s}\, \pi^{\frac{1}{2}-s}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s), \tag{15}$$

то разложение (5) дает в рассматриваемом случае следующий результат:

$$\xi(s) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{s}{2}} \int_0^\infty F_1(s, \alpha x) \left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x\right\} dx +$$

$$+ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1-s}{2}} \int_0^\infty F_1(1-s, \beta x) \left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x\right\} dx, \tag{16}$$

где

$$F_1(s, x) = \frac{\sin \pi s}{\pi}\, s(1-s) \left\{\frac{1}{s} - \frac{x^2}{1!}\,\frac{1}{s+2} + \frac{x^4}{2!}\,\frac{1}{s+4} - \ldots\right\}, \tag{17}$$

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\, \pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),\ \Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right),\ \alpha\beta = \pi.$$

Обращаясь к соотношениям (7) — (10), находим в рассматриваемом частном случае следующие формулы:

$$\Xi\left(\frac{t}{2}\right) = (t^2+1)\, \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}{\pi} \int_0^\infty \Psi_1(z) \cos tz\, dz, \tag{18}$$

где

$$\Psi_1(z) = e^{-z} \int_0^\infty e^{-\pi e^{-4z} x^2} \left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x\right\} dx \tag{19}$$

и, обратно,

$$\int_0^\infty \frac{\Xi(t)}{t^2 + \frac{1}{4}}\, \frac{\cos 2zt}{\operatorname{ch} \pi t}\, dt = e^z \int_0^\infty e^{-\pi e^{4z} x^2} \left\{\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \log x\right\} dx \tag{20}$$

Последний результат принадлежит Hardy ([4]).

Рассмотрим теперь второй частный случай, относящийся к разложениям, связанным с числовой функцией $\tau(n)$ числом делителей n. Мною было доказано ([5]), что

$$\sqrt{a} \int_0^\infty e^{-ax} \left\{\sigma(x) + \frac{1}{4\pi x}\right\} dx = \sqrt{b} \int_0^\infty e^{-bx} \left\{\sigma(x) + \frac{1}{4\pi x}\right\} dx, \tag{21}$$

где $ab = 4\pi^2$ и

$$\sigma(x) = -C + \log x - \frac{1}{4\pi x} + \frac{x}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\tau(n)}{x^2 + n^2}, \tag{22}$$

что соответствует формуле (1) при

$$\varphi(x) = e^{-x};\quad \psi(x) = \sigma(x) + \frac{1}{4\pi x},\quad k = 4\pi^2.$$

Принимая во внимание, что

$$\Phi(s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}\, \frac{\zeta(s)\zeta(1-s)}{(2\pi)^s}, \tag{23}$$

получим

$$\zeta(s)\zeta(1-s)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{s}{2}}\int_0^\infty F_2(s,\alpha x)\left\{\sigma(x)+\frac{1}{4\pi x}\right\}dx+$$

$$+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1-s}{2}}\int_0^\infty F_2(1-s,\beta x)\left\{\sigma(x)+\frac{1}{4\pi x}\right\}dx, \tag{24}$$

где $\alpha\beta=4\pi^2$ и

$$F_2(s,x)=2\sin\pi s\left\{\frac{1}{s}-\frac{x}{1!}\,\frac{1}{s+1}+\frac{x^2}{2!}\,\frac{1}{s+2}-\ldots\right\}.$$

Применяя формулы (7) и (9), найдем, что

$$\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\frac{it}{2}\right)\right|^2=8\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}\int_0^\infty \Psi_2(z)\cos tz\,dz, \tag{25}$$

где

$$\Psi_2(z)=e^{-z}\int_0^\infty e^{-2\pi e^{-2z}x}\left\{\sigma(x)+\frac{1}{4\pi x}\right\}dx \tag{26}$$

и, обратно,

$$\int_0^\infty\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2\frac{\cos 2zt}{\operatorname{ch}\pi t}\,dt=2\pi e^z\int_0^\infty e^{-2\pi e^{2z}x}\left\{\sigma(x)+\frac{1}{4\pi x}\right\}dx. \tag{27}$$

Имея в виду привести третий пример, введем в рассмотрение функцию $X(x)$, определив ее разложением

$$X(x)=-\frac{\pi^2}{6}-C^2+2C_1-\sum_1^\infty\tau(n)\left\{\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n}\right\}, \tag{28}$$

где C — постоянная Эйлера, а

$$C_1=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{3}+\ \ldots\ +\frac{\log n}{n}-\frac{\log^2(n+1)}{2}\right\}. \tag{29}$$

Применяя сумматорную формулу для сумм вида $\sum_1^\infty\tau(n)f(n)$ [6], получим следующее представление функции $X(x)$:

$$X(x)-2C\log x-\frac{1}{2}\log^2 x=-2\int_0^\infty\frac{t}{t^2+x^2}\left\{\sigma(t)+\frac{1}{4\pi t}\right\}dt, \tag{30}$$

откуда вытекает формула

$$\zeta^2(s)=\frac{\sin\pi s}{\pi}\int_0^\infty\left\{\frac{1}{2}\log^2 x+2C\log x-X(x)\right\}\frac{dx}{x^s},\quad 0<Res<1. \tag{31}$$

Далее, на основании интеграла Hardy [7]

$$\int_0^\infty J_0(t)\,Y_0\left(\frac{x^2}{t}\right)dt=Y_0(2x)-\frac{2}{\pi}K_0(2x) \tag{32}$$

можно доказать, что

$$K_0(ax) = \frac{4\pi^2}{a} \int\limits_0^\infty K_0\left(\frac{4\pi^2}{a} y\right) \left\{\frac{2}{\pi} K_0(4\pi \sqrt{xy}) - Y_0(4\pi \sqrt{xy})\right\} dy \tag{33}$$

и следовательно

$$\int\limits_0^\infty K_0(ax) \left\{ X(x) - 2C \log x - \frac{1}{2} \log^2 x \right\} dx =$$

$$= \frac{4\pi^2}{a} \int\limits_0^\infty K_0\left(\frac{4\pi^2}{a} y\right) dy \int\limits_0^\infty \left\{\frac{2}{\pi} K_0(4\pi \sqrt{yx}) - Y_0(4\pi \sqrt{yx}) \right\} \left\{ X(x) - \right.$$

$$\left. - 2C \log x - \frac{1}{2} \log^2 x \right\} dx. \tag{34}$$

Принимая теперь во внимание формулу (30)

$$\int\limits_0^\infty \left\{X(x) - 2C \log x - \frac{1}{2} \log^2 x\right\} \left\{\frac{2}{\pi} K_0(4\pi\sqrt{yx}) - Y_0(4\pi \sqrt{yx}\right\} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{X(y) - 2C \log y - \frac{1}{2} \log^2 y\right\}, \tag{35}$$

найдем, что

$$\sqrt{a} \int\limits_0^\infty K_0(ax) \left\{X(x) - 2C \log x - \frac{1}{2} \log^2 x\right\} dx =$$

$$= \sqrt{b} \int\limits_0^\infty K_0(bx) \left\{X(x) - 2C \log x - \frac{1}{2} \log^2 x\right\} dx, \tag{36}$$

где $ab = 4\pi^2$, что соответствует формуле (1) при

$$\varphi(x) = K_0(x); \quad \psi(x) = X(x) - 2C \log x - \frac{1}{2} \log^2 x; \quad k = 4\pi^2.$$

В рассматриваемом случае

$$\Phi(s) = \frac{1}{2^{s+1}} \frac{\pi}{\sin \pi s} \pi^{1-2s} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \zeta^2(s) \tag{37}$$

и формула (7) дает

$$\Xi^2\left(\frac{t}{2}\right) = (t^2 + 1)^2 \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2}}{4\pi} \int\limits_0^\infty {}_3\Psi(z) \cos tz \, dz, \tag{38}$$

где

$$\Psi_3(z) = e^{-z} \int\limits_0^\infty K_0(2\pi e^{-2z} x) \left\{X(x) - 2C \log x - \frac{1}{2} \log^2 x\right\} dx \tag{39}$$

и, обратно,

$$\int\limits_0^\infty \frac{\Xi^2(t)}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)^2} \frac{\cos 2zt}{\operatorname{ch} \pi t} dt =$$

$$+ e^z \int\limits_0^\infty K_0(2\pi e^{2z} x) \left\{X(x) - 2C \log x - \frac{1}{2} \log^2 x\right\} dx. \tag{40}$$

Институт математики и механики
Ленинградского государственного
университета.

Поступило
20 II 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Ramanujan, Collec. Pap., p. 72. [2] Н. С. Кошляков, ДАН, II, № 7 (1934). [3] Н. С. Кошляков, ДАН, IV, № 4 (1934). [4] Ramanujan, Quarterly Journal (1934). [5] Н. С. Кошляков, ДАН, IV, № 6 (1936). [6] Н. С. Кошляков, ДАН, III, № 6 (1934). [7] Hardy, Messenger of Mathem., vol. LVI, № 12 (1927). [8] Н. С. Кошляков, ДАН, IV, № 6 (1936).