Доклады Академии Наук СССР
1937. Том XIV, № 9

МАТЕМАТИКА

К. ПЕРСИДСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЛЯПУНОВА

(Представлено академиком А. Н. Крыловым 20 II 1937)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$—вещественные переменные и $\varphi = \varphi(x_1, x_2 \ldots, x_n, t)$ вещественная и непрерывная функция в каждой точке x области

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < r^2 \tag{A}$$

и при любом значении t некоторого промежутка

$$0 \leqslant t < t(x), \tag{B}$$

где величина $t(x)$ вообще зависит от взятой точки $x = x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ области (A); мы будем полагать, что в точке O $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$ функция φ обращается в нуль при всех значениях t промежутка

$$0 \leqslant t < t(O) = \infty.$$

Такую функцию φ будем называть функцией класса L.

Если некоторая функция φ класса L в каждой точке x области (A) и при любом t промежутка (B) принимает значения одного знака, то эту функцию будем называть знакопостоянной.

Знакопостоянную функцию φ будем называть знакоопределенной, если она в каждой точке x области (A) и при любом значении t промежутка (B), на поверхности $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \rho^2$, где $\rho > 0$—любое число, меньшее r, удовлетворяет условию

$$|\varphi| \geqslant \lambda(\rho),$$

где $\lambda(\rho)$—некоторое отличное от нуля число, вообще зависящее от величины ρ; причем полагаем, что если в некоторой точке x области (A) величина $t(x)$ промежутка (B) имеет конечное значение, то $|\varphi|$ в этой точке x при значениях t, достаточно близких к $t(x)$, будет не менее некоторого положительного M, постоянного для всех точек x области (A).

Если $t(x) = \infty$ для каждой точки x области (A), то функции класса L будут функциями Ляпунова (1).

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx_\rho}{dt} = \omega_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

правые части которой в каждой точке x области

$$x_1^2 + x_2 + \dots + x_n^2 \leqslant R^2$$

и при всех значениях $t \geqslant 0$ суть вещественные непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные первого порядка относительно переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; допустим, что в точке O функции ω_s обращаются в нули при любом $t \geqslant 0$.

Пусть

$$x_s = f_s(t, c_1, c_2, \dots, c_n) \qquad (s = 1, 2, \dots, n) \tag{2}$$

суть решения системы (1), где функции f_s обращаются в c_s при $t = 0$ и где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — некоторые произвольные вещественные постоянные, удовлетворяющие условию

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 < R^2.$$

Эти решения (2) будут существовать по крайней мере для всех тех значений $t > 0$, при которых будет иметь место неравенство

$$f_1 + f_2^2 + \dots + f_n^2 \leqslant R^2;$$

при этих же значениях t у функций $f_1, f_2 \dots, f_n$ будут существовать непрерывные частные производные первого порядка по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n, t$, а якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(c_1, c_2, \dots, c_n)} = e^{\int\limits_0^t \sum \frac{d\omega_s(f_1, f_2, \dots, f_n, t)}{\partial f_s} dt}$$

будет величиной отличной от нуля. Очевидно, что при

$$c_1, c_2 = \dots = c_n = 0$$

функции f_s обратятся в нули при любом значении $t \geqslant 0$.

Если систему уравнений (2) разрешить относительно величин $c_1, c_2, \dots, c_n$:

$$c_s = \varphi_s(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad \varphi_s = x_s \quad \text{при } t = 0), \tag{3}$$
$$(s = 1, 2, \dots, n),$$

то получим n независимых интегралов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ системы уравнений (1).

Эти функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ будут непрерывными, имеющими непрерывные частные производные первого порядка по переменным

$$x_1, x_2, \dots, x_n, t,$$

в каждой точке x области

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < R^2, \tag{A'}$$

при положительных значениях t, близких к нулю, и будут обладать этими же свойствами по крайней мере для всех тех значений t некоторого промежутка

$$0 \leqslant t < t(x), \tag{B'}$$

при котором будет иметь место неравенство

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2 \leqslant R^2,$$

где величина $t(x)$ вообще зависит от взятой точки x области (A′). Очевидно, что в точке O функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ будут обращаться в нули при всех значениях $t \geqslant 0$. Очевидно, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ будут принадлежать к функциям класса L, а функция

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2$$

будет непрерывной положительной знакопостоянной функцией, имеющей непрерывные частные производные первого порядка по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n, t$, в каждой точке x области (A′) по крайней мере для всех тех значений $t > 0$, при которых эта функция в данной точке x остается менее или равной R^2.

Функция $v = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n$ будет положительной знакоопределенной функцией, если только решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы (1) устойчиво. Действительно, если это решение устойчиво, то для любого наперед заданного числа $\rho > 0$ будет иметь место неравенство $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 < \rho^2$, если только $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 < \theta(\rho^2)$, где $\theta(\rho^2)$ есть некоторая положительная, не убывающая с возрастанием ρ функция и отличная от нуля при $\rho \neq 0$.

Тогда для любой точки x области (A′) и при любом t промежутка (B′) на поверхности $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \rho^2$ будет иметь место неравенство

$$v = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2 \geqslant \lambda(\rho) = \theta(\rho^2),$$

так как, если допустить, что это неравенство не имеет места в некоторой точке x области (A′) и при некотором значении t' промежутка (B′), при котором $v \leqslant R^2$, то тогда у системы (1) легко найти такое решение, что при $t = t'$ имело бы место равенство $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = \rho^2$, при $c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 < \theta(\rho^2)$, что невозможно.

Имеет место следующая теорема:

Чтобы решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ системы уравнений (1) было устойчиво, необходимо и достаточно существование знакоопределенной функции v, полная производная которой v' в силу этих уравнений была бы или тождественно равной нулю или функцией знакопостоянной, обратной по знаку с функцией v для всех тех значений

$$x_1, x_2, \dots, x_n t,$$

при которых функция v остается знакоопределенной.

Эта теорема является обращением известной теоремы Ляпунова [1] для функций класса L.

Было уже доказано, что в случае устойчивости функция

$$v = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2$$

будет знакоопределенной, а ее производная v' в силу уравнений (1) очевидно будет тождественно равной нулю; если положить например

$$v' = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2)\,(1 + e^{-t}),$$

то эта функция будет тоже функцией знакоопределенной, а ее полная производная v' в силу уравнений (1)

$$v' = -(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_n^2)\,e^{-t}$$

будет функцией знакопостоянной, обратной по знаку с функцией v для всех тех значений $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, при которых функция v остается знакоопределенной. Отсюда следует необходимость условий указанной теоремы.

Доказательство достаточности условий, приведенных в теореме, элементарно и немногим чем отличается от доказательства указанной теоремы Ляпунова.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Казанского государственного университета.

Поступило
20 II 1937.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпунов, Общая задача устойчивости движения, Харьков (1892), Москва, (1935).