Доклады Национальной академии наук Беларуси

1999 март—апрель Том 43 № 2

УДК 539.375

Н. М. БОРОДАЧЕВ, Г. П. ТАРИКОВ

ПОСТРОЕНИЕ ВЕСОВОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ СЛОЕ

(Представлено академиком А. И. Свириденком)

Построена весовая функция для внутренней плоской круговой трещины в упругом изотропном слое конечной толщины.

В работе [1] получено самое общее выражение весовой функции для круговой трещины в упругом теле в таком виде:

$$K_1(\varphi; r, \theta) = N(\varphi; r, \theta)\delta_n u_z(r, \theta) \,/\, U^*(r, \theta), \tag{1}$$

где

$$N(\varphi; r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \theta)}, \tag{2}$$

$$U^*(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\varphi) N(\varphi; r, \theta) d\varphi, \tag{3}$$

$$f^*(\varphi) = \frac{\pi^2}{\mu}(1 - \nu) a \delta a K_1(\varphi). \tag{4}$$

Здесь используются цилиндрические координаты r, θ, z, a — радиус трещины, ν — коэффициент Пуассона, μ — модуль сдвига, δa — вариация радиуса трещины, u_z — проекция вектора перемещений на ось z, $\delta_n u_z$ — вариация перемещения поверхности трещины, вызванная вариацией контура трещины, $K_1(\varphi)$ — коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва.

Рассмотрим применение формулы (1) к нахождению весовой функции для внутренней круговой трещины, расположенной в средней плоскости упругого изотропного слоя конечной толщины $2h$. Чтобы воспользоваться формулой (1), нужно иметь так называемое пробное решение. В качестве пробного решения рассмотрим случай, когда трещина подвержена действию равномерного давления p. В силу симметрии слоя и нагрузки можно рассматривать только половину слоя. Следовательно, граничные условия будут иметь вид

$$\begin{gathered} \text{при } z = h \ \sigma_z = 0 \text{ и } \tau_{rz} = 0; \\ \text{при } z = 0 \ \tau_{rz} = 0;\ u_z = 0 \text{ при } r > a \text{ и } \sigma_z = -p \text{ при } r < a. \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь σ_z, τ_{rz} — нормальные и касательные напряжения.

При решении краевой задачи (5) воспользуемся представлением перемещений и напряжений через две гармонические функции. Используя результаты работы [2], можно показать, что

$$u_z(r, \theta) = -\frac{1-\nu}{\mu}\int_0^\infty \xi^{-1} J_0(\xi r) d\xi \int_0^a f(t)(\cos\xi t - \cos\xi a) dt, \tag{6}$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя, а $f(t)$ является решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода,

$$f(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^a f(t)[G(t+x)+G(t-x)-G(a+x)-G(a-x)]dt=-\frac{2}{\pi}p, \tag{7}$$

$$G(x)=\int_0^\infty \frac{\xi h(1+\xi h)+e^{-\xi h}\operatorname{sh}\xi h}{\operatorname{ch}\xi h\operatorname{sh}\xi h+\xi h}\cos\xi x d\xi,\quad 0\le x\le a.$$

Формулу (6) можно преобразовать к виду

$$u_z(r,\theta)=0 \text{ при } r\ge a,$$

$$u_z(r,\theta)=-\frac{1-\nu}{\mu}\left[\operatorname{Arch}\frac{a}{r}\int_0^a f(t)dt-\int_0^a f(t)\operatorname{Arch}\frac{t}{r}dt\right],\quad r\le a. \tag{8}$$

Используя выражение (8), можно найти коэффициент интенсивности напряжений

$$K_1=-a^{-1/2}\int_0^a f(t)dt. \tag{9}$$

Далее, необходимо определить величину $\delta_n u_z(r,\theta)$. Так как функция $f(t)$ зависит также и от радиуса трещины a, то получаем

$$\begin{aligned}\delta_n u_z(r,\theta)=\frac{\partial u_z}{\partial a}\delta a=-\frac{1-\nu}{\mu}\delta a\Bigg[&(a^2-r^2)^{-1/2}\int_0^a f(t)dt+\\ &\operatorname{Arch}\frac{a}{r}\int_0^a\frac{\partial f(t)}{\partial a}dt-\int_0^a\frac{\partial f(t)}{\partial a}\operatorname{Arch}\frac{t}{r}dt\Bigg].\end{aligned} \tag{10}$$

Введем обозначения и новые переменные

$$\alpha=x/a,\quad \tau=t/a,\quad \lambda=a/h,\quad \omega(\alpha)=-\frac{\pi}{2}\frac{f(a\alpha)}{p}. \tag{11}$$

С учетом обозначений (11) интегральное уравнение (7) можно представить в такой форме:

$$\omega(\alpha)=1+\pi^{-1}\int_0^1 K(\alpha,\tau)\omega(\tau)d\tau, \tag{12}$$

где

$$K(\alpha,\tau)=M(\tau+\alpha)+M(\tau-\alpha)-M(1+\alpha)-M(1-\alpha),$$

$$M(\beta)=\lambda\int_0^\infty\frac{\psi(1+\psi)+e^{-\psi}\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}\psi\operatorname{sh}\psi+\psi}\cos(\psi\lambda\beta)d\psi.$$

Формулы (9), (10) теперь принимают вид

$$K_1=\frac{2}{\pi}pa^{1/2}\int_0^1\omega(\tau)d\tau, \tag{13}$$

$$\delta_n u_z=\frac{2(1-\nu)}{\pi\mu}pa\delta a\left[(a^2-r^2)^{-1/2}\int_0^1\omega(\tau)d\tau+\frac{1}{a}B(r,\lambda)\right], \tag{14}$$

$$B(r,\lambda)=\lambda\left[\operatorname{Arch}\frac{a}{r}\int_0^1\frac{\partial\omega(\tau)}{\partial\lambda}d\tau-\int_{r/a}^1\frac{\partial\omega(\tau)}{\partial\lambda}\operatorname{Arch}\frac{a\tau}{r}d\tau\right]. \tag{15}$$

Далее, на основании формул (4) и (13) имеем

$$f^*=\frac{2\pi(1-\nu)}{\mu}pa^{3/2}\delta a\int_0^1\omega(\tau)d\tau.$$

Подставляя это соотношение в (3), получаем

$$U^* = \frac{2\pi(1-\nu)}{\mu} pa^{3/2}\delta a \int_0^1 \omega(\tau)d\tau. \tag{16}$$

На основании выражений (1), (2), (14) и (16) имеем окончательно

$$K_1(\varphi; r, \theta) = \frac{(a^2 - r^2)^{1/2}[1 + \gamma(r, \lambda)]}{\pi^2 a^{1/2}\left[a^2 + r^2 - 2ar\cos(\varphi - \theta)\right]}, \tag{17}$$

где

$$\gamma(r, \lambda) = \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{1/2} B(r, \lambda) / \Omega(\lambda),$$

$$\Omega(\lambda) = \int_0^1 \omega(\tau, \lambda)d\tau.$$

Формула (17) определяет весовую функцию для внутренней круговой трещины в упругом изотропном слое конечной толщины.

В приведенные выше формулы входит функция ω, которая удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода (12). Для решения интегрального уравнения (12) наиболее целесообразно применение приближенного способа, основанного на замене данного интегрального уравнения конечной системой линейных алгебраических уравнений [3].

Summary

The weight function is obtained for an internal circular crack in an elastic isotropic layer of an infinite thickness.

Литература

1. Бородачев Н. М., Тариков Г. П. // Докл. АН Беларуси. 1997. Т. 41, № 6. С. 112—114.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., 1967.
3. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М., 1965.

Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого,
Киевский международный университет гражданской авиации

Поступило 03.03.98