УДК 621.89

К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧЕ

Г. П. ТАРИКОВ
Учреждение образования «Белорусский государственный университет транспорта», г. Гомель

В. Н. ПАРХОМЕНКО
Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Введение

В процессе работы зубчатой передачи (системы шестерня-колесо) зубья нагреваются, что влияет на распределение контактных давлений по площадке контакта. Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения применительно к деталям машин и механизмов до сих пор является актуальной [4]. Большое количество работ посвящено изучению данного вопроса [3]. В работах [1], [2] данная задача исследуется с учетом тепловых явлений, т. е. решается пространственная контактная задача термоупругости.

Целью работы является вывод интегрального уравнения контактной задачи термоупругости применительно к зубчатой передаче с точечным контактом.

Постановка задачи

Рассматривается термоупругая задача о контакте зубьев (шестерни и колеса) с начальным контактом в точке. При этом задаются радиусами кривизны контактирующих тел в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 1).

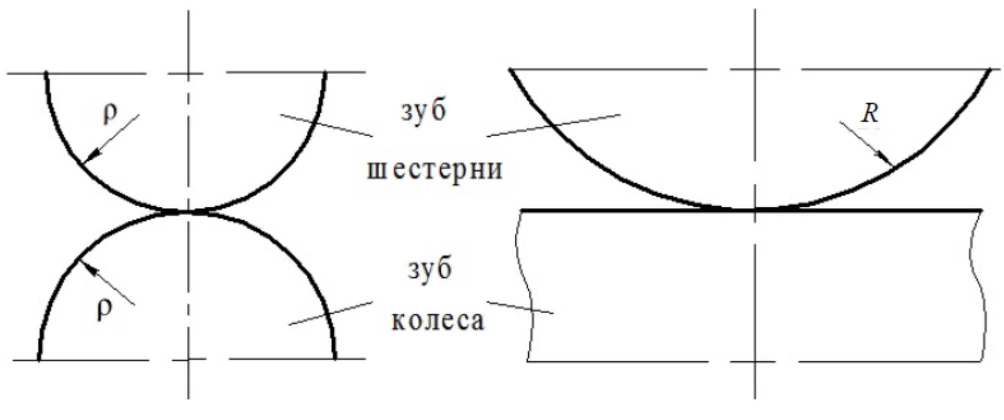

Рис. 1. Схема зубчатой передачи с точечным контактом

На рис. 2 показан зуб шестерни с криволинейными образующими боковых поверхностей.

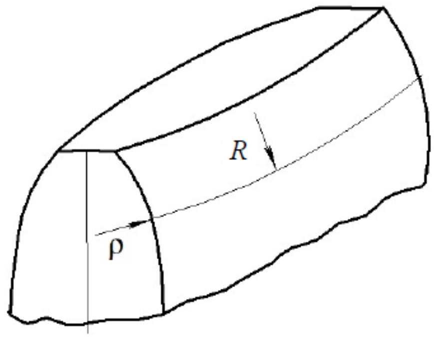

Рис. 2. Зуб шестерни с криволинейными образующими боковых поверхностей

В соответствии с гипотезой Герца контактирующие тела при определении напряженного состояния заменяются упругими полупространствами, прижатыми друг к другу по площадке контакта. Поэтому вначале построим решение краевой задачи термоупругости для полупространства.

Пространственная задача термоупругости в перемещениях сводится к решению дифференциального уравнения равновесия

$$\frac{1}{1-2\nu}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\nabla^2\vec{u}=\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla\left(\alpha\theta\right) \quad (1)$$

и уравнения теплопроводности

$$\nabla^2\theta=0. \quad (2)$$

Здесь $\vec{u}$ – вектор перемещений; ν – коэффициент Пуассона; ∇ – набла-оператор; ∇^2 – оператор Лапласа; α – коэффициент линейного расширения; θ – температура, которая отсчитывается от температуры естественного состояния.

К уравнениям (1) и (2) необходимо добавить еще граничные условия, которые будут сформулированы позже.

Известные способы интегрирования уравнения (1) базируются в основном на представлении Папковича–Нейбера, в котором вектор перемещений выражается через гармонический вектор и гармонический скаляр. Однако, структура решения данного представления такова, что сложно удовлетворять условиям общего вида. Поэтому, воспользуемся другой формой решения уравнения (1), которая позволяет без особых затруднений удовлетворять граничным условиям довольно общего вида.

Следуя работе (3), будем использовать общее решение уравнения (1) в таком виде:

$$\vec{u}=\vec{B}-\frac{1}{2(1-2\nu)}x_3\nabla\varphi+\frac{(1+\nu)\alpha}{2(1-\nu)}\nabla\left(x_3\phi\right), \quad (3)$$

где $\nabla^2\vec{B}=0;\ \nabla^2\varphi=0\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=\frac{2(1-\nu)}{3-4\nu}(\nabla\cdot\vec{B});\ \ \theta=\frac{\partial\phi}{\partial x_3}.$

Здесь использована прямоугольная система координат $x_1,\ x_2,\ x_3$, причем ось x_3 направлена перпендикулярно к границе полупространства.

В формуле (3) $\vec{B}$ – гармонический вектор; φ – гармонический скаляр.

В компонентах декартовой системы координат решение (3) имеет вид:

$$u_1=B_1-\frac{1}{2(1-2\nu)}x_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\beta x_3\frac{\partial\phi}{\partial x_1};$$

$$u_2 = B_2 - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \beta x_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_2};$$

$$u_3 = B_3 - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \beta (x_3 \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \phi), \tag{4}$$

где $\beta = \frac{(1+\nu)\alpha}{2(1-\nu)}$; $\theta = \frac{\partial \phi}{\partial x_3}$.

Компоненты B_1, B_2, B_3 гармонического вектора $\vec{B}$ могут быть найдены с использованием граничных условий.

Чтобы перейти к напряжениям, необходимо воспользоваться обобщенным законом Гука с учетом температурных слагаемых:

$$\hat{T} = 2\mu \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \hat{E}(\nabla \cdot \vec{u}) + \hat{\varepsilon} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \hat{E} \right], \tag{5}$$

где $\hat{T}$, $\hat{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; μ – модуль сдвига; $\hat{E}$ – единичный тензор.

Пусть на плоскости $x_3 = 0$ заданы нормальные напряжения σ_{33}, а касательные напряжения σ_{33} и σ_{32} отсутствуют, т. е.

$$\sigma_{33} = \begin{cases} -f(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega; \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{cases}$$

где Ω – область нагружения в плоскости $x_3 = 0$.

Удовлетворяя этим граничным условиям и используя формулы (4) и (5), находим гармонические функции B_1, B_2, B_3 и φ:

$$B_1 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial N_3}{\partial x_1} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - 2\beta \frac{\partial \xi}{\partial x_1};$$

$$B_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial N_3}{\partial x_2} + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - 2\beta \frac{\partial \xi}{\partial x_2}; \tag{6}$$

$$B_3 = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial N_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \varphi;$$

$$\varphi = -\frac{1-2\nu}{\mu} \frac{\partial N_3}{\partial x_3} + 2(1-2\nu)\beta\phi;$$

$$\varphi = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}; \phi = \frac{\partial \xi}{\partial x_3}; \theta = \frac{\partial \phi}{\partial x_3};$$

$$N_3(x_1, x_2, x_3) = N(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} f(y_1 y_2) \ln(x_3 + r) dy_1 dy_2, \tag{7}$$

$$r = \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{1/2}.$$

Подставляя выражения (6) в третью формулу (7), получаем:

$$u_3 = -\frac{1}{2\mu}\left[2(1-\nu)\frac{\partial N_3}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial^2 N_3}{\partial x_3^2} + 4(1-\nu)\mu\beta\phi\right]. \qquad (8)$$

Решение уравнения теплопроводности

Для использования полученных выше результатов необходимо располагать решением уравнения теплопроводности (2). При решении уравнения теплопроводности можно использовать различные граничные условия. Пусть граничное условие для температуры θ имеет вид:

$$\theta = \begin{cases} \theta_0(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega_0; \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega, \end{cases} \qquad (9)$$

где Ω_0 – область (в плоскости $x_3 = 0$), в которой поддерживается ненулевая температура.

Решение уравнения теплопроводности (2) можно представить в таком виде:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega}\frac{1}{r}\theta_0(y_1 y_2)dy_1 dy_2, \qquad (10)$$

где $\theta = \dfrac{\partial\phi}{\partial x_3}$.

Решение (10) удовлетворяет граничному условию (9), т. е. соответствует случаю, когда в области Ω_0 задана температура θ. Однако можно задавать интенсивность теплового потока на площадке Ω_0, а вне этой площадки (в плоскости $x_3 = 0$) полагать, что интенсивность теплового потока равна нулю.

Если задавать тепловой поток на площадке контакта, то придем к такому интегральному уравнению контактной задачи термоупругости, которое, по-видимому, нельзя решить в аналитической форме. Поэтому, в дальнейшем будем использовать граничные условия (9) и решение уравнения теплопроводности (10).

Подставляя в формулу (8) выражение для N из (7), будем иметь:

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1-\nu}{2\pi\mu}\iint_{\Omega} f(y_1 y_2)\frac{dy_1 dy_2}{r} -$$

$$-\frac{x_3}{4\pi\mu}\frac{\partial}{\partial x_3}\iint_{\Omega} f(y_1 y_2)\frac{dy_1 dy_2}{r} - \frac{1-\nu}{\pi}\iint_{\Omega}\beta\theta_0(y_1 y_2)\frac{dy_1 dy_2}{r}. \qquad (11)$$

При составлении формулы (11) учтено выражение (10), а также то, что

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\ln(x_3 + r) = \frac{1}{r}.$$

По формуле (11) можно определить перемещение u_3 в любой точке полупространства $x_3 \geq 0$.

Чтобы получить перемещение u_3 в точках на границе полупространства, положим в (11) $x_3 = 0$. В результате получим:

$$u_3(x_1, x_2, 0) = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \iint_{\Omega} f(y_1 y_2) \frac{dy_1 dy_2}{R} -$$

$$-\frac{1+\nu}{2\pi} \alpha \iint_{\Omega} \theta_0(y_1 y_2) \frac{dy_1 dy_2}{R} \theta. \tag{12}$$

В формуле (12) учтено, что

$$(1-\nu)\beta = \frac{1}{2}(1+\nu)\alpha;$$

$$R^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2.$$

Формула (12) имеет отношение к одному полупространству. При рассмотрении контактной задачи каждое из контактирующих тел заменяется упругим полупространством. Поэтому, когда рассматривается контакт двух упругих тел, то [5]:

$$u_3(x_1, x_2, 0) = u_3^{(1)}(x_1, x_2, 0) + u_3^{(2)}(x_1, x_2, 0) =$$

$$= \delta - \varphi_1(x_1, x_2) - \varphi_2(x_1, x_2) \text{ при } (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Здесь δ – сближение упругих тел; $\varphi_1(x_1, x_2)$, $\varphi_2(x_1, x_2)$ – уравнения поверхностей соприкасающихся тел.

Уравнение (12) можно представить в таком виде:

$$\delta - \varphi_1(x_1, x_2) - \varphi_2(x_1, x_2) =$$

$$= \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2\pi} \frac{1}{R} p(y_1 y_2) dy_1 dy_2 - \frac{(\eta_1 + \eta_2)}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} \theta_0(y_1 y_2) dy_1 dy_2 \tag{13}$$

при $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Здесь $\vartheta_i = \dfrac{1-\nu_i}{\mu_i}$; $\eta_i = (1+\nu_i)\alpha_i$, $i = 1, 2$.

На основании граничного условия для напряжения σ_{33} имеем, что $f(x_1, x_2) = p(x_1, x_2)$, где p – нормальное давление на площадке контакта. Это отражено в первом интеграле уравнения (13).

Ограничиваясь в уравнении (13) рассмотрением лишь локальных эффектов [5], получаем:

$$\delta - \frac{x_1^2}{2R_1} - \frac{x_2^2}{2R_2} = \frac{(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{2\pi} \iint \frac{1}{R} p(y_1 y_2) dy_1 dy_2 - \frac{(\eta_1 + \mu_2)}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{1}{R} \theta_0(y_1 y_2) dy_1 dy_2 \tag{14}$$

при $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Уравнение (14) является двумерным интегральным уравнением первого рода контактной задачи термоупругости. Распределение температуры тел в области контакта в уравнении (14) выражена функцией $\theta_0(x_1, x_2)$, которая считается известной. Функция $p(x_1, x_2)$ определяется в результате решения уравнения (14). Вопросы, связанные с определением радиусов R_1 и R_2, подробно рассматриваются в монографии [5].

Заключение

Получено двумерное интегральное уравнение контактной задачи термоупругости первого рода, решение которого позволит исследовать влияние температуры зубьев на распределения контактных давлений по эллиптической площадке контакта и определить величины полуосей контактного эллипса.

Литература

1. Бородачев, Н. М. О решении пространственной температурной задачи теории упругости в перемещениях / Н. М. Бородачев, В. В. Астанин // Проблемы прочности. – 2005. – № 3. – С. 86–95.
2. Бородачев, Н. М. Пространственная контактная задача с учетом тепловыделения при трении скольжения / Н. М. Бородачев, Г. П. Тариков // Трение и износ. – 2003. – Т. 24, № 2. – С. 153–160.
3. Бородачев, Н. М. О задаче Герца с учетом тепловыделения / Н. М. Бородачев, Г. П. Тариков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 2. – С. 3.
4. Иванов, М. Н. Детали машин / М. Н. Иванов. – М. : Высш. шк., 1991. – 383 с.
5. Лурье, А. И. Теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука, 1970. – 939 с.

Получено 20.09.2013 г.