

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ «СРЕДА–ИСТОЧНИК»

О.Н. Шабловский

Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, г. Гомель,
Республика Беларусь
E-mail: shablovsky-on@yandex.by

Получено новое точное решение волнового уравнения с источником, зависящим от искомой функции и времени. Функция источника имеет полиномиальную (третьей степени) нелинейность, а также два дополнительных аддитивных члена, в которые входят вторая и третья степени искомой функции и явная синусная зависимость от времени. Построенные соотношения описывают именно процесс возбуждения колебаний в системе «среда – нелинейный реономный источник» и поэтому не содержат в себе как частный случай решение волнового уравнения с обычной кубической нелинейностью. Физическая интерпретация результатов работы обусловлена свойствами внешнего периодического воздействия на среду. Решение получено на плоскости «искомая функция – время» и дает аналитические выражения частных производных искомой функции по пространственной координате и времени. Это позволяет изучать нестационарные свойства изолиний искомой функции: их скорость и условия, при которых эта скорость является знакопеременной. Важное влияние на поведение изолиний оказывает наклон функции источника в малой окрестности нулевого значения искомой функции. А именно: его знак определяет режим движения (дозвуковой либо сверхзвуковой) изолинии, а его модуль служит масштабом при вычислении безразмерной частоты возбуждающих колебаний. В работе рассмотрены интервалы высоких и низких частот. В каждый момент времени градиентные свойства искомой функции характеризует монотонный профиль, располагающийся в полубесконечной области на плоскости «координата – искомая функция». Указаны условия, при которых происходят периодические по времени кинк-пульсации: в отдельные мгновения исходный монотонный профиль трансформируется в кинк, соответствующий двум состояниям равновесия системы. Изучены нестационарные свойства кривизны монотонных профилей: появление точек перегиба и точек спрямления. Рассмотрены два монотонных профиля: левая и правая ветви, расположенные в полубесконечных областях, соответственно, слева и справа от начала координат. Эти ветви совершают колебательные движения, периодически сближаясь и удаляясь друг от друга. В моменты времени, когда ветви примыкают к началу координат, они образуют неподвижный разрыв, который является слабым или сильным, если наклоны ветвей соответственно разных знаков либо одного знака. Обнаружено, что в ходе такого колебательного процесса в интервале высоких частот возможен трансзвуковой переход: скорость изолинии меняется от дозвукового значения к сверхзвуковому. Построена конфигурация волнового типа: левая и правая ветви, образующие слабый либо сильный разрыв, совершают периодическое по времени движение вдоль оси координат.

Ключевые слова: волновое уравнение; кубическая нелинейность источника; трансзвуковой переход; подвижная граница; слабый и сильный разрыв.

Введение. Волновые уравнения с линейными и нелинейными источниками (уравнения Клейна–Гордона) являются фундаментальными уравнениями математической физики и позволяют изучать динамические свойства неравновесных состояний теплофизических, физико-химических и биологических систем [1–3]. Область практического применения уравнений Клейна–Гордона в значительной степени расширяется при учете явной зависимости функции источника от времени. Такой нелинейный реономный источник позволяет моделировать влияние

внешней силы и рассматривать физически содержательные режимы воздействия на скорость и направление движения волны. Современное состояние названной проблемы и подробная библиография представлены в работах [4–8]. Отметим, что в этих исследованиях основное внимание было обращено на уравнение синус-Гордона с модификациями, относящимися к различным способам внешнего нестационарного воздействия на среду.

Цель данной статьи – построить и проанализировать точное решение волнового уравнения, для которого функция источника содержит кубическую нелинейность и явную синусную зависимость от времени.

Построение решения. Одномерное волновое уравнение с источником имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial (x')^2} = k_v, \quad (1)$$

где τ – функция, описывающая некоторое физическое свойство среды; t – время; $x' = x/w$; x – декартова координата; w – скорость распространения малых возмущений; $k_v = k_v(\tau, t)$ – функция источника. Для размерных и безразмерных уравнений пользуемся одинаковой формой записи, применяя масштабы τ_b и t_b :

$$(\tau/\tau_b) \rightarrow \tau, (t/t_b) \rightarrow t, [x/(wt_b)] \rightarrow x', (k_v t_b^2/\tau_b) \rightarrow k_v.$$

Изолиния $\tau(x', t) = \tau_i = \text{const}$ перемещается со скоростью $N = dx'/dt$, которая является дозвуковой/сверхзвуковой, если число Маха $M = dx'/dt = N/w$ меньше/больше единицы. Обозначим

$$u = \partial \tau / \partial x', \quad v = \partial \tau / \partial t, \quad d\tau = u dx' + v dt$$

и вместо (1) запишем систему уравнений

$$(\partial v / \partial t) - (\partial u / \partial x') = k_v, \quad \partial u / \partial t = \partial v / \partial x'.$$

После преобразования независимых переменных $(x', t) \rightarrow (\tau, t)$ получаем [9]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial \tau} - u \frac{\partial u}{\partial \tau} = k_v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial \tau} = u \frac{\partial v}{\partial \tau}. \quad (3)$$

Здесь $D(\tau, t)/D(x', t) = \partial \tau / \partial x' \neq 0$. Изолиния $\tau = \tau_i$ движется со скоростью $M = -v(\tau_i, t)/u(\tau_i, t)$.

Решение представим в виде

$$u = \tau [a_0 + \tau (a_1 \sin kt + a_2 \cos kt)], \quad (4)$$

$$v = \tau [b_0 + \tau (b_1 \sin kt + b_2 \cos kt)], \quad k \equiv \text{const} > 0. \quad (5)$$

Шесть постоянных коэффициентов $a_u, b_u, \alpha = 0, 1, 2$ связаны, согласно (3), следующими двумя соотношениями:

$$a_0 b_1 = b_0 a_1 - k a_2, \quad a_0 b_2 = b_0 a_2 + k a_1. \quad (6)$$

Остальные формулы, необходимые для замыкания задачи, получаем на основе (2) при построении функции источника, вид которой определяется выражением

$$k_v = Q_1 \tau \pm Q_2 \tau^2 \sin(kt + \beta) + Q_3 \tau^3 (1 + a_3 \sin 2kt). \quad (7)$$

В этом случае

$$b_0^2 = a_0^2 + Q_1, \quad b_1^2 - a_1^2 = b_2^2 - a_2^2 = Q_3/2, \quad (8)$$

$$Q_3 a_3 = 2(b_1 b_2 - a_1 a_2), \quad \text{tg } \beta = C_2/C_1, \quad Q_2^2 = C_1^2 + C_2^2,$$

$$C_1 = 3(b_0 b_1 - a_0 a_1) - k b_2, \quad C_2 = 3(b_0 b_2 - a_0 a_2) + k b_1.$$

Физическое содержание данного решения зависит от выбора коэффициентов Q_1, Q_2, Q_3 . Подробные формулы для Q_2^2, a_3^2 будут указаны в ходе дальнейших вычислений. Величина β , а также выбор знаков «+» и «-» перед Q_2 в (7) относятся к допустимым вариантам начального ($t = 0$) состояния источника. После подстановки b_1, b_2 из (6) в (8) получаем

$$(a_2)_{1,2} = \frac{1}{k} \left[b_0 a_1 \pm \sqrt{a_0^2 \left(a_1^2 + \frac{Q_3}{2} \right)} \right], \quad (9)$$

причем знак перед корнем такой же, как знак произведения $b_0 a_1$. Здесь и в дальнейшем нижние индексы 1, 2 соответствуют знакам «+»/«-» перед корнем. При проведении расчетов учитываем, что

$$a_2^2 - a_1^2 = 4b_0 k a_1 a_2 / (k^2 - Q_1), \quad a_1^2 + a_2^2 = a_0^2 Q_3 / (k^2 + Q_1), \quad (10)$$

В результате находим

$$(a_1^2)_{1,2} = \frac{a_0^2 Q_3}{2(k^2 + Q_1)} \left[1 \pm \sqrt{\frac{4k^2 b_0^2}{4a_0^2 k^2 + (k^2 + Q_1)^2}} \right] > 0. \quad (11)$$

Обращаем внимание на то, что здесь подкоренное выражение положительное и меньше единицы. Выбор знака перед корнем в (11) выполняется при физическом истолковании решения. Из последующих аналитических преобразований будет ясно, что выражения (10) не содержат особенность типа «деление на ноль». Связь $a_0^2 \leftrightarrow Q_2^2$ имеет вид:

$$16k^2 a_0^2 Q_3 = (k^2 + Q_1) Q_2^2 - Q_3 (k^4 + 10k^2 Q_1 + 9Q_1^2). \quad (12)$$

Таким образом, аналитическая структура решения (4), (5) основана на формулах (12), (11), (9), (8) и (6). Следует отметить, что полученное решение не содержит в себе как частный случай варианты, когда $Q_2 = 0$ и/или $a_3 = 0$.

Свойства решения. Возьмем для определенности конечный интервал $\tau \in (0, \tau_m]$, $\tau_m \equiv \text{const} > 0$, для которого $u > 0$, $x' \in (-\infty, x'_m]$. Для $\tau < 0$ рассуждения аналогичные. Принимаем естественное ограничение

$$a_0^2 > (a_1^2 + a_2^2) \tau_m^2, \quad (13)$$

которое говорит о том, что $\text{sgn} u = \text{sgn}(\tau a_0)$.

Обозначим $a_{12}^2 = a_1^2 + a_2^2$, см.(10); $b_{12}^2 = b_1^2 + b_2^2$. Из (8) следует, что $b_{12}^2 = a_{12}^2 + Q_3$. Представим скорость изолинии $\tau = \tau_i$ и ее закон движения следующими выражениями:

$$dx'_i/dt = -[b_0 + b_{12} \tau_i \sin(kt + \beta_2)] / [a_0 + a_{12} \tau_i \sin(kt + \beta_1)], \quad (14)$$

$$a_0 > 0, \quad b_0 < 0, \quad a_{12} > 0, \quad b_{12} > 0,$$

$$x'_i(t) \equiv x'(\tau = \tau_i, t) = -\frac{b_0 t}{a_0} - \frac{1}{a_0} \ln \frac{a_0 + a_{12} \tau_i \sin(kt + \beta_1)}{a_0 + a_{12} \tau_i \sin \beta_1} + \text{const}. \quad (15)$$

Здесь $\text{tg} \beta_1 = a_2/a_1$, $\text{tg} \beta_2 = b_2/b_1$, $\cos(\beta_1 - \beta_2) = b_0 a_{12} / (a_0 b_{12})$, $\beta_1 \neq \beta_2$. Итоговая запись функции (15) не содержит b_{12} . Пусть $x'(\tau = \tau_i, t = 0) = 0$; тогда изолиния $(\tau_i + \Delta\tau) \leq \tau_m$, расположенная выше ($\Delta\tau > 0$), имеет начальную координату $x'(\tau_i + \Delta\tau, t = 0) = c_0 > 0$, где

$$\exp(-a_0 c_0) = \tau_i [a_0 + (\tau_i + \Delta\tau) a_{12} \sin \beta_1] / [(\tau_i + \Delta\tau)(a_0 + \tau_i a_{12} \sin \beta_1)] < 1.$$

Анализ показал, что при всех $t \geq 0$ выполнено неравенство $x'(\tau_i + \Delta\tau, t) > x'(\tau_i, t)$, которое означает, что в каждый момент времени верхняя изолиния расположена справа от нижней вдоль оси x' . Следовательно, данное решение не разрушается во все время движения профиля $u = u(x', t)$.

Если $a_0^2 = \tau_m^2 a_{12}^2$, т. е. $[\tau_m^2 Q_3 / (k^2 + Q_1)] = 1$, то, согласно (14), в те моменты времени $t = t_p$, когда $\sin(kt + \beta_1) = -1$, τ_m – изолиния удаляется на бесконечность ($x'_m \rightarrow \infty$) с неограниченно большой скоростью, и исходный профиль принимает вид кинк-перехода между состояниями равновесия ($\tau = 0, t \geq 0$) и ($\tau = \tau_m, t = t_p$). Такой режим движения можно назвать кинк-пульсациями монотонного профиля $u = u(x', t) > 0$, рис. 1.

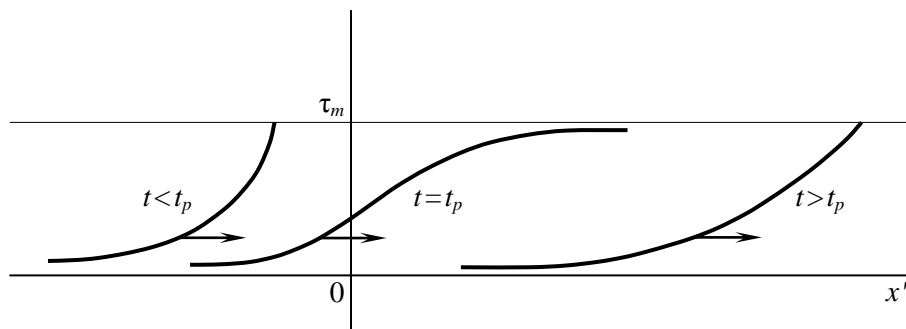


Рис. 1. Кинк-пульсации монотонного профиля.
Стрелка указывает направление движения

Обсудим поведение решения в малой окрестности $\tau = 0$. При $\tau = +0$ получаем из (4), (5) с точностью до членов первого порядка по τ : $\tau = \tau_0 \exp \xi$, $\xi = a_0 x' + b_0 t \leq 0$, $a_0 > 0$, $b_0 < 0$, $x' \leq 0$, $t \geq 0$, $\tau_0 \equiv \text{const}$. Ясно, что эта экспонента (ангармоническое автомодельное решение) удовлетворяет уравнению $d^2 \tau / d\xi^2 = \tau$, которое есть результат линеаризации (1), (7) в окрестности решения $\tau = 0$. Данный вывод относится к положительным и отрицательным значениям $Q_1 = b_0^2 - a_0^2$, где Q_1 – наклон функции источника $k_v = Q_1 \tau$ (см. (7)). Рассмотрим изолинию $\tau = \tau_i = \varepsilon > 0$, где ε – малое положительное число; далее для краткости называем ее ε -изолинией. Для нее квадрат числа Маха равен $M_\varepsilon^2 = 1 + (Q_1/a_0^2) > 0$, поэтому Q_1 характеризует отклонение скорости ε -изолинии от скорости звука. При $Q_1 < 0$ эта скорость дозвуковая, при $Q_1 > 0$ – сверхзвуковая. Проанализируем поведение решения (4), (5), (7) при различных вариантах выбора знаков коэффициентов Q_1 и Q_3 .

Колебания высокой частоты. Допустим, что $Q_1 < 0$, $Q_3 > 0$, $k^2 + Q_1 > 0$. Условие (13) приводит к неравенству

$$0 < \left[Q_3 \tau_m^2 / (k^2 + Q_1) \right] < 1. \quad (16)$$

Для удобства аналитических преобразований введем в рассмотрение вместо Q_2^2 вспомогательный параметр m_1 :

$$Q_2^2 = -16Q_1Q_3 / (1 - m_1^2), \quad 0 < m_1 < 1. \quad (17)$$

Требование выполнения неравенства $b_0^2 = a_0^2 + Q_1 > 0$ дает оценку интервала, в котором меняется частота колебаний источника (7). Обозначаем $\mu^2 = k^2 / (-Q_1)$ и получаем интервал высоких частот

$$1 < \mu_2^2 < \mu^2 < \mu_1^2, \quad (18)$$

$$\mu_1^2 = (3m_1 + 5) / (1 - m_1), \quad \mu_2^2 = (5 - 3m_1) / (1 + m_1). \quad (19)$$

В этом случае имеем $a_0^2 = -Q_1 a_{01}^2$,

$$a_{01}^2 = \frac{(\mu^2 - 1)}{16\mu^2} \left(\frac{16}{1 - m_1^2} - \mu^2 + 9 \right) > 1, \quad (20)$$

и поэтому $a_1^2 + a_2^2$ в (10) не содержит $k^2 + Q_1 = -Q_1(\mu^2 - 1)$.

Порядок расчетов состоит в следующем. Указываем интервал $(0, \tau_m]$, внутри которого расположена область изменения функции $\tau(x', t)$. Задаем произвольно параметр источника $Q_1 < 0$; выбираем значение $m_1 \in (0, 1)$ и подсчитываем μ_1^2 , μ_2^2 в (19); частоту колебаний источника можем варьировать в интервале (18). Для выбранного значения μ^2 подсчитываем $k^2 + Q_1 > 0$, а на

основе оценки (16) задаем параметр источника Q_3 : $0 < Q_3 < [(-Q_1)(\mu^2 - 1)/\tau_m^2]$. Определяем Q_2 из (17). Коэффициент a_3 в (7) характеризует амплитуду внешнего периодического воздействия на среду и коррелирует с частотой колебаний следующим образом:

$$a_3^2 = 1 + \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 - \mu^2}{4(\mu^2 - 1)}. \quad (21)$$

При фиксированном m_1 , (см. (19)), зависимость a_3^2 от μ^2 – монотонно убывающая. Вместе с тем верхняя граница значений Q_3 монотонно растет по мере роста $\mu^2 > 1$. Далее вычисляем последовательно a_0^2 , a_1^2 и $(a_2)_{1,2}$ по формулам (12), (11) и (9), а также находим b_0^2 ; здесь в (11) был взят «–» перед корнем. Для подсчета b_1 , b_2 и $\text{tg}\beta$ применяем (6) и (8). Выбор знаков коэффициентов a_0 , a_1 , $(a_2)_{1,2}$, b_0 выполняем при физическом истолковании данного решения.

Итак, константа m_1 влияет опосредованным образом на ширину интервала частоты колебаний (см. (18), (19)) и на параметры Q_2 , Q_3 , a_3 источника (см. (16), (17), (21)). Случай $m_1 = 1 - 0$ оставляем в стороне, потому что он приводит к неограниченно большим значениям Q_2 и a_3 .

Пример расчета. Задаем $\tau_m = 1$, $Q_1 = -1$, $m_1 = 1/2$. Тогда $\mu_1^2 = 13$, $\mu_2^2 = 7/3$; берем $\mu = 2$. Значит, $Q_3 \in (0, 3)$. Берем $Q_3 = 1$ и получаем $Q_2 = 8/\sqrt{3}$, $a_3^2 = 115/36$. Далее находим $a_0^2 = 79/64$, $b_0^2 = 15/64$. Числовые значения остальных констант, входящих в решение, здесь не приводятся: эти вычисления нетрудно воспроизвести.

Обсудим возможность перемены знака скорости изолинии. Основное неравенство (16) запишем в виде $\tau_m^2 = \delta_m^2 (-Q_1)(\mu^2 - 1)/Q_3$, $\delta_m^2 \in (0, 1)$, и тогда $\tau_i^2 = \delta_i^2 \tau_m^2$, $\delta_i^2 \in (0, 1]$. Скорость τ_i -изолинии сохраняет постоянный знак, если $b_0^2 > \tau_i^2 b_{12}^2$. Это условие выполняется для изолиний с номерами δ_i , удовлетворяющими неравенству

$$\delta_i^2 \leq (a_{01}^2 - 1) / \left[\delta_m^2 (a_{01}^2 - 1 + \mu^2) \right]. \quad (22)$$

Здесь знак равенства относится к изолинии, скорость которой обращается в ноль в отдельные моменты времени. Скорость τ_i -изолинии знакопеременная, если

$$(a_{01}^2 - 1) / \left[\delta_m^2 (a_{01}^2 - 1 + \mu^2) \right] < \delta_i^2 \leq 1. \quad (23)$$

Такие δ_i^2 существуют, если δ_m^2 не является слишком малым:

$$(a_{01}^2 - 1) / (a_{01}^2 - 1 + \mu^2) < \delta_m^2 < 1.$$

Поведение кривизны линии $\tau = \tau(x', t)$ ясно из рассмотрения формулы

$$\partial^2 \tau / \partial (x')^2 = u [a_0 + 2\tau a_{12} \sin(kt + \beta_1)]. \quad (24)$$

Это выражение имеет постоянный знак, если $a_0^2 > 4\tau_m^2 a_{12}^2$, т.е. $(\mu^2 - 1) > [4\tau_m^2 Q_3 / (-Q_1)]$. Кривизна обращается в ноль в отдельные моменты времени на изолиниях $\tau = \tau_{if}$, для которых $a_0^2 \leq 4\tau_{if}^2 a_{12}^2$. Знак неравенства соответствует точкам перегиба, знак равенства – точка спрямления, поэтому с учетом оценки (16) получаем

$$\left[\tau_m^2 Q_3 / (-Q_1) \right] < (\mu^2 - 1) \leq \left[4\tau_{if}^2 Q_3 / (-Q_1) \right]. \quad (25)$$

Эти неравенства совместны, если $(\tau_m^2 / 4) < \tau_{if}^2 < \tau_m^2$.

Колебания низкой частоты. Рассмотрим случай $Q_1 < 0$, $Q_3 < 0$, когда $k^2 + Q_1 < 0$. Должны быть выполнены условия $b_0^2 = a_0^2 + Q_1 > 0$ и $[a_1^2 + (Q_3/2)] > 0$, (см. (9)). В формуле (11) для a_1^2

нужно взять «+» перед корнем. Итоговые оценки выглядят так: $(k^2 + Q_1) < Q_3 \tau_m^2 < 0$, $Q_2^2 = m_2^2 Q_1 Q_3$, $9 < m_2^2 < 24$, $a_0^2 = -Q_1 a_{01}^2$, $a_{01}^2 = (1 - \mu^2)(m_2^2 - 9 + \mu^2)/(16\mu^2)$.

Низкие частоты располагаются в интервале

$$0 < \mu^2 < \mu_3^2 < (1/2), \quad \mu_3^2 = \left(-m_2^2 - 6 + \sqrt{m_2^4 + 16m_2^2}\right)/2.$$

В отличие от колебаний высокой частоты здесь a_3^2 – возрастающая функция аргумента μ^2 :

$$a_3^2 = 1 + \frac{m_2^2 - 9 + \mu^2}{4(1 - \mu^2)}. \quad (26)$$

Верхняя граница значений $|Q_3|$ равна $(-Q_1)(1 - \mu^2)/\tau_m^2$ и убывает по мере роста частоты колебаний. Порядок расчетов аналогичен предыдущему.

Пример расчета: $\tau_m = 1$, $Q_1 = -1$, $m_2^2 = 10$, $\mu_3^2 = -8 + \sqrt{65}$, $(-19/20) < Q_3 < 0$; берем $\mu^2 = 1/20$, $Q_3 = -1/10$ и получаем $Q_2^2 = 1$, $a_3^2 = 97/76$.

Условия, при которых скорость изолинии имеет постоянный либо переменный знак, записываются, соответственно, в виде (22) либо (23). Содержание этих соотношений такое: $\tau_m^2 = \delta_m^2 Q_1 (1 - \mu^2)/Q_3$, $\tau_i^2 = \delta_i^2 \tau_m^2$, $\delta_i^2 \in (0, 1]$, $\delta_m^2 \in (0, 1)$. Точки перегиба и точки спрямления изолиний τ_{if} появляются в отдельные моменты времени (см. обсуждение формулы (25)), если

$$\left(\tau_m^2 Q_3 / Q_1\right) < (1 - \mu^2) \leq \left(4\tau_{if}^2 Q_3 / Q_1\right), \quad \left(\tau_m^2 / 4\right) < \tau_{if}^2 < \tau_m^2.$$

Знак кривизны изолинии сохраняется при условии, что $(1 - \mu^2) > (4\tau_m^2 Q_3 / Q_1)$.

При очень малой частоте $\mu^2 = +0$ наблюдается неустойчивость данного решения: $a_0^2 \sim (1/\mu^2) \gg 1$. Ситуация меняется, если принять следующую зависимость коэффициента Q_2 от частоты колебаний: $m_2^2 - 9 = m_{21}^2 \mu^2$, $0 < m_{21}^2 \mu^2 < 15$. Тогда имеем устойчивое решение:

$$Q_2^2 = (9 + m_{21}^2 \mu^2) Q_1 Q_3, \quad a_{01}^2 = (1 - \mu^2)(1 + m_{21}^2)/16, \quad a_3^2 = 1 + \frac{\mu^2(1 + m_{21}^2)}{4(1 - \mu^2)}. \quad (27)$$

Здесь, как и в случае (26), a_3^2 – возрастающая функция аргумента μ^2 . Далее нам понадобится интересный вариант $b_1 = 0$, для которого

$$\begin{aligned} m_2^2 - 9 &= \mu^2 (21\mu^4 + 92\mu^2 + 15) / [(5\mu^2 + 1)(1 - \mu^2)], \\ m_2^2 &\in (9, 24), \quad Q_2^2 = m_2^2 Q_1 Q_3, \quad \mu^2 \in (0, 1/4], \quad b_2 = b_0 a_{12}^2 / (a_0 a_2), \\ a_{01}^2 &= (\mu^4 + 6\mu^2 + 1) / (5\mu^2 + 1), \quad a_{12}^2 = a_0^2 Q_3 / (k^2 + Q_1), \\ a_3^2 &= 1 + \frac{4(\mu^4 + 6\mu^2 + 1)}{(5\mu^2 + 1)(1 - \mu^2)^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим еще, что для рассмотренных режимов колебаний высокой и низкой частоты ($b_0 \neq 0$) отсутствует трансзвуковой переход вида $(M_\varepsilon^2 < 1) \rightarrow (M^2 > 1)$.

Широкий интервал частот. Перейдем к изучению варианта $Q_1 > 0$, $Q_3 > 0$, который отличается от двух предшествующих положительностью параметра Q_1 источника: ε -изолиния движется со сверхзвуковой скоростью. В этом случае $Q_2^2 = m_3^2 Q_1 Q_3$, $k^2 = \mu^2 Q_1$, $\tau_m^2 Q_3 < (k^2 + Q_1)$,

$$a_3^2 = 1 + \frac{m_3^2 - 9 - \mu^2}{4(\mu^2 + 1)}, \quad m_3^2 > 9, \quad (29)$$

и процесс возбуждения колебаний происходит на конечном интервале частот $0 < \mu^2 < (m_3^2 - 9) < \infty$. Здесь a_3^2 – монотонно убывающая функция аргумента μ^2 при фиксированном m_3^2 . Далее имеем: $a_0^2 = Q_1 a_{01}^2$, $a_{01}^2 = (\mu^2 + 1)(m_3^2 - 9 - \mu^2)/(16\mu^2) > 0$; в формуле (11) для a_1^2 нужно взять «+» перед корнем; a_2 определяется выражением (9). В частности, при $\mu^2 = 1$ получаем $a_{01}^2 = (m_3^2 - 10)/8 > 0$, $a_1^2 = a_{01}^2 Q_3/2$,

$$(a_2)_{1,2} = (1 \pm 1) a_{01} [Q_3(1 + a_{01}^2)/2]^{1/2} / \mu.$$

На основе соотношений $\tau_m^2 = \delta_m^2 Q_1 (\mu^2 + 1)/Q_3$, $\tau_i^2 = \delta_i^2 \tau_m^2$, $\delta_m^2 \in (0, 1)$, $\delta_i^2 \in (0, 1]$ находим, что скорость τ_i -изолинии сохраняет постоянный знак при $\delta_i^2 \leq (1 + a_{01}^2)/[\delta_m^2(1 + a_{01}^2 + \mu^2)]$. Перемена знака происходит при $(1 + a_{01}^2)/[\delta_m^2(1 + a_{01}^2 + \mu^2)] < \delta_i^2 \leq 1$. Такое δ_i^2 существует, если $[(1 + a_{01}^2)/(1 + a_{01}^2 + \mu^2)] < \delta_m^2 < 1$. Трансзвуковой переход отсутствует. Условие появления точек перегиба и точек спрямления имеет вид

$$(\tau_m^2 Q_3 / Q_1) < (\mu^2 + 1) \leq (4\tau_{if}^2 Q_3 / Q_1).$$

Комментарий к этим оценкам такой же, как при обсуждении формул (24), (25). В случае малой частоты [$\mu^2 \rightarrow 0$] данное решение неустойчивое: $a_0^2 \sim (1/\mu^2) \gg 1$.

Физические свойства источника (7) меняются, если считать, что коэффициент Q_2 зависит от частоты возбуждающих колебаний. Возьмем $m_3^2 - 9 = m_{31}^2 \mu^2$, где $m_{31}^2 > 1$ – фиксированный конечный параметр; тогда $Q_2^2 = (9 + m_{31}^2 \mu^2) Q_1 Q_3$, $a_{01}^2 = (\mu^2 + 1)(m_{31}^2 - 1)/16$,

$$a_3^2 = 1 + \frac{\mu^2 (m_{31}^2 - 1)}{4(\mu^2 + 1)}, \quad (30)$$

и решение устойчивое для любого конечного μ^2 . Теперь, в отличие от (29), a_3^2 – монотонно возрастающая функция μ^2 .

При $Q_3 > 0$ допускается случай $Q_1 = 0$, когда ε -изолиния имеет звуковую скорость: качественно новых результатов здесь нет.

Задача с подвижной границей. В качестве физической модели решения (4), (5) рассмотрим процесс в полубесконечной области с неизвестной подвижной границей $x' = x'_w(t)$: $(\partial\tau/\partial x') > 0$, $x' \in (-\infty, x'_w]$, $\tau \in (0, \tau_w] \subseteq (0, \tau_m]$;

$$x' \rightarrow -\infty, \partial\tau/\partial x' \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0; x' = x'_w(t), (\partial\tau/\partial x')_w = g(\tau_w), \quad (31)$$

где $\tau_w = \tau(x_w, t)$. Функция $g(\tau_w) = g_1 \tau_w + g_2 \tau_w^2$ характеризует зависимость градиента искомой функции от самой этой неизвестной функции; здесь g_1, g_2 – положительные постоянные. Такая физическая интерпретация пригодна для всех трех рассмотренных выше вариантов: колебания высокой и низкой частоты, широкий интервал частот. Скорость движения границы равна

$$\begin{aligned} dx'_w/dt &= [(\tau_w d\tau_w/dt) - V_w]/U_w, \\ U_w &= a_0 + \tau_w a_{12} \sin(kt + \beta_1), V_w = b_0 + \tau_w b_{12} \sin(kt + \beta_2), \\ a_0 &> 0, b_0 < 0, a_{12} > 0, b_{12} > 0. \end{aligned}$$

Функцию $\tau_w(t)$ находим из граничного условия (31) с учетом структуры решения (4): $\tau_w = (a_0 - g_1)/[g_2 - a_{12} \sin(kt + \beta_1)]$. Здесь следует принять $0 < g_1 < a_0$, $g_2 > a_{12}$, и тогда $\tau_w(t) \leq \tau_m^1$, где $\tau_m^1 = (a_0 - g_1)/(g_2 - a_{12})$ есть верхняя граница значений функции $\tau_w(t)$. Исходное

допущение $\tau_m^1 \leq \tau_m$ будет выполнено, если $(a_0 + \tau_m a_{12}) < (g_1 + \tau_m g_2)$. Этому неравенству всегда можно удовлетворить подходящим выбором $g_2 > 0$.

Колебания двух монотонных ветвей. Изучим отдельный вариант $b_0 = 0$ (см. (8)). Формулы расчета такие: $a_0^2 = -Q_1 > 0$, $a_1^2 = a_2^2$, $a_{12}^2 = -Q_1 Q_3 / (k^2 + Q_1)$, $b_1 = -b_2 = (-ka_2/a_0)$, $\text{tg } \beta = 1$, $a_3^2 = (\mu^2 + 1)^2 / (\mu^2 - 1)^2$. Здесь $k^2 = -Q_1 \mu^2$, $\tau_m^2 = \delta_m^2 Q_1 (1 - \mu^2) / Q_3$, $\delta_m^2 \in (0, 1)$.

Колебания высокой частоты: $Q_3 > 0$, $Q_1 < 0$, $k^2 + Q_1 > 0$, $\mu^2 > 1$, $Q_2^2 = -m^2 Q_1 Q_3$. Этот случай наблюдается при $m^2 \geq 16$ для двух частот

$$\mu^2 = \left[m^2 - 6 \pm \sqrt{m^2 (m^2 - 16)} \right] / 2. \quad (32)$$

Колебания низкой частоты: $Q_3 < 0$, $Q_1 < 0$, $k^2 + Q_1 < 0$, $Q_2^2 = m^2 Q_1 Q_3$, $m^2 > 9$, $\mu^2 < 1$,

$$\mu^2 = \left[-6 - m^2 + \sqrt{m^2 (m^2 + 16)} \right] / 2.$$

На интервале $\tau \in (0, \tau_m]$ проанализируем режим колебаний двух монотонных ветвей, имеющих разные знаки наклона.

Левая ветвь: $\partial \tau / \partial x' > 0$, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_{12} > 0$; $x' \in (-\infty, x'_l]$; $x' \rightarrow -\infty$, $\tau \rightarrow (+0)$.
Правая ветвь: $\partial \tau / \partial x' < 0$, $a_0 < 0$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $a_{12} < 0$; $x' \in [x_r, \infty)$; $x' \rightarrow +\infty$, $\tau \rightarrow (+0)$. Для обеих ветвей $b_1 < 0$, $b_2 > 0$, $b_{12} < 0$. Модули одноименных коэффициентов слева и справа одинаковые; $\text{tg } \beta_2 = -\text{ctg } \beta_1$; например, далее $\beta_2 = \beta_1 + (\pi/2)$. Скорости τ_m -изолиний на левой (l) и правой (r) ветвях такие:

$$\frac{dx'_l}{dt} = -\frac{dx'_r}{dt} = \frac{dx'_m}{dt} = -b_{12} \tau_m \cos \varphi / [a_0 + a_{12} \tau_m \sin \varphi]_l, \quad \varphi = kt + \beta_1. \quad (33)$$

Тогда закон движения τ_m -изолинии дается формулой

$$x'_m(\varphi) = \left[\frac{b_{12}}{a_{12} k} \ln \frac{a_0 + a_{12} \tau_m}{a_0 + a_{12} \tau_m \sin \varphi} \right]_l, \quad (34)$$

$$x'_l(\varphi) = -x'_r(\varphi) = x'_m(\varphi).$$

Качественная схема расположения монотонных профилей на плоскости (x', τ) представлена на рис. 2. Проанализируем поведение точек (x', τ_m) ; далее для краткости называем их τ_m -точками. В моменты времени, когда $\varphi = 2\pi n_0$ (n_0 – целое положительное число) τ_m -точки на ветвях смещены влево и вправо на одинаковые расстояния от $x' = 0$, и их скорости направлены навстречу друг другу. При $\varphi = (\pi/2) + 2\pi n_0$, $x' = 0$ ветви смыкаются с нулевой скоростью и образуют слабый разрыв: при $\tau = \tau_m$ терпит разрыв первого рода первая производная по координате. При $\varphi = \pi + 2\pi n_0$ ветви расходятся и в последующем τ_m -точки достигают наибольшего удаления от $x' = 0$: $\varphi = (3\pi/2) + 2\pi n_0$, см. (34). Итак, нулевую скорость τ_m -изолиний на левой и правой ветвях имеем дважды в течение одного периода колебаний: в момент смыкания ветвей и в момент наибольшего их удаления друг от друга.

Обсудим пример трансзвукового перехода на τ_m -изолинии при $\varphi = 2\pi n_0$. В этом случае $(dx'_m/dt)^2 = \mu^2 \delta_m^2$, $\delta_m^2 \in (0, 1)$. Для низких частот ($\mu^2 < 1$) трансзвуковой переход отсутствует, а при $\mu^2 > 1$ он существует, если $\mu^2 > (1/\delta_m^2)$. Например, для $\delta_m^2 = 1/2$ это неравенство будет выполнено, если, согласно (32), $m^2 > 25$ (знак «+» перед корнем) либо $16 \leq m^2 < 25$ (знак «-» перед корнем).

Теперь рассмотрим колебания двух монотонных ветвей, имеющих одинаковый знак наклона. Левая ветвь: $\tau \in (0, \tau_m]$, $\partial \tau / \partial x' > 0$, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_{12} > 0$, $b_1 < 0$, $b_2 > 0$, $b_{12} < 0$; $x' \in (-\infty, x'_l]$; $x' \rightarrow -\infty$, $\tau \rightarrow (+0)$. Правая ветвь: $\tau \in [-\tau_m, 0)$, $\partial \tau / \partial x' > 0$, $a_0 < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$,

$a_{12} > 0, b_1 > 0, b_2 < 0, b_{12} > 0; x' \in [x'_r, \infty); x' \rightarrow \infty, \tau \rightarrow (-0)$. Скорости $(\pm\tau_m)$ -точек противоположны друг другу и вычисляются по формуле

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)_{l,r} = \frac{-(b_{12})_{l,r} (\pm\tau_m) \cos \varphi}{(a_0)_{l,r} + (a_{12})_{l,r} (\pm\tau_m) \sin \varphi}. \quad (35)$$

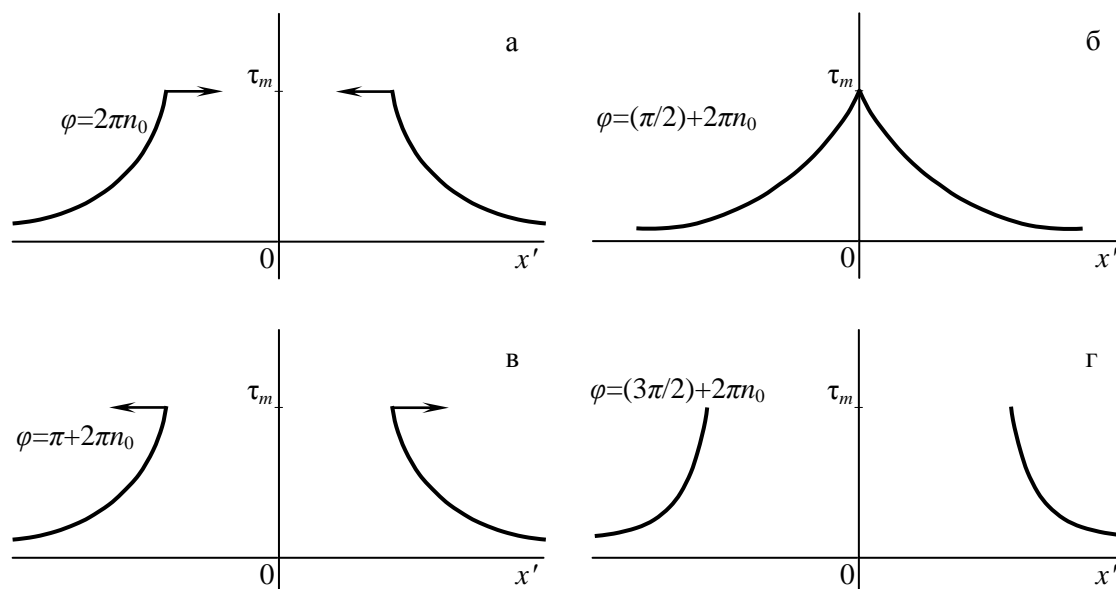


Рис. 2. Колебания двух монотонных ветвей, имеющих разные знаки наклона. Стрелка указывает направление движения

Закон движения $(\pm\tau_m)$ -изолиний дается выражением

$$(x')_{l,r} = \frac{1}{k} \left(\frac{b_{12}}{a_{12}} \right)_{l,r} \ln \frac{(a_0)_{l,r} + (a_{12})_{l,r} (\pm\tau_m)}{(a_0)_{l,r} + (a_{12})_{l,r} (\pm\tau_m) \sin \varphi},$$

$$x'_j(\varphi) = -x'_r(\varphi).$$

Процесс колебаний ветвей аналогичен тому, что наблюдался для профилей с наклонами разных знаков, но теперь при $\varphi = (\pi/2) + 2\pi n_0$ имеем в точке $x' = 0$ неподвижный сильный разрыв: функция $\tau(x', t)$ меняется скачком от $-\tau_m$ до τ_m , рис. 3.

Для вариантов (33) и (35) корреляция «наклон ветви – скорость τ_m -изолинии» представляется в форме

$$M = \pm [\mu^2 F(\zeta)]^{1/2}, \quad (36)$$

$$M = dx'_m/dt, \zeta = u_m/\tau_m, F(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} [a_{12}^2 \tau_m^2 - (\zeta - a_0)^2] \geq 0. \quad (37)$$

Две линии (36) образуют на плоскости (ζ, M) эллипсоидную петлю динамического гистерезиса. Для левой и правой ветвей петли расположены симметрично по отношению к оси $\zeta = 0$. На рис. 4 показан качественный вид такой петли для левой ветви: $\zeta \in [\zeta_1, \zeta_2], \zeta_{1,2} = a_0 \mp \tau_m a_{12}$.

Представляют интерес колебания на интервале $(0, \tau_j]$ с нестационарной границей $\tau_j = \tau_j(t)$, для которой принято условие $(\partial\tau/\partial x')_j = g_2 \tau_j^2, g_2 \equiv \text{const}$. Возьмем ветви, имеющие наклоны разных знаков. Левая ветвь: $\partial\tau/\partial x' > 0, x' \in (-\infty, x'_{jl}], \tau \in (0, \tau_j], a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_{12} > 0, b_1 < 0, b_2 > 0, b_{12} < 0, g_2 > 0$. Правая ветвь: $\partial\tau/\partial x' < 0, x' \in [x'_{jr}, \infty), \tau \in (0, \tau_j], a_0 < 0, a_1 < 0, a_2 < 0, a_{12} < 0, b_1 < 0, b_2 > 0, b_{12} < 0, g_2 < 0$. В данном случае

$$\tau_j = \frac{a_0}{g_2 - a_{12} \sin \varphi}, \quad \frac{dx'_j}{dt} = \frac{1}{g_2} \left(\frac{a_{12}k}{a_0} - b_{12} \right) \cos \varphi, \quad \varphi = kt + \beta_1, \quad (38)$$

$$x'_j = \frac{1}{g_2 k} \left(\frac{a_{12}k}{a_0} - b_{12} \right) (\sin \varphi - 1), \quad (39)$$

$$\tau_{jl} = \tau_{jr}, \quad (dx'_j/dt)_l = -(dx'_j/dt)_r, \quad (x'_j)_l = -(x'_j)_r.$$

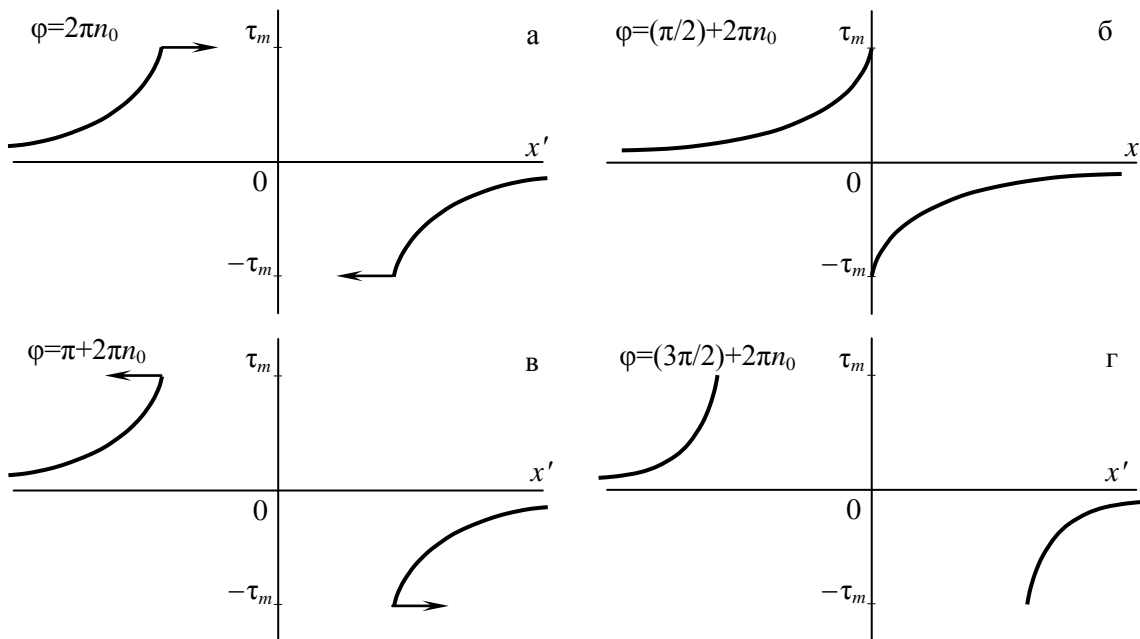


Рис. 3. Колебания двух монотонных ветвей, имеющих одинаковые знаки наклона. Стрелка указывает направление движения

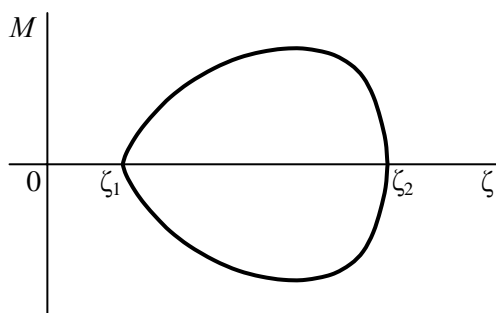


Рис. 4. Петля динамического гистерезиса на плоскости «наклон ветви – скорость τ_m -изолинии»

Здесь следует принять $g_2 = 2a_{12}\Delta_j$, $\Delta_j > 1$. Условие $a_0^2 > a_{12}^2 \tau_j^2$ означает, что

$$\left(\tau_j^2 \right)_{\varphi=\varphi_1} = \delta_j^2 (-Q_1) (\mu^2 - 1) / Q_3, \quad \varphi_1 = (\pi/2) + 2\pi n_0, \quad \delta_j^2 \in (0,1)$$

и приводит к связи $\delta_j^2 = 1 / (2\Delta_j - 1)^2$. В качественном отношении процесс колебаний этих ветвей похож на случай (33), (34) (рис. 2), но теперь на границах ветвей имеем периодическую зависимость τ_j от времени, см. (38). При $\varphi = \varphi_1$ две смыкающиеся ветви образуют слабый разрыв. Для $\varphi = 2\pi n_0$ трансзвуковой переход существует при высоких частотах, если $\mu^2 > \Delta_j^2 > 1$.

При рассмотрении ветвей, имеющих одинаковый знак наклона, поступаем следующим образом. Левая ветвь: $\partial\tau/\partial x' > 0$, $\tau \in (0, \tau_{jl}]$, $x' \in (-\infty, x'_{jl}]$, $a_0 > 0$, $a_{12} > 0$, $b_{12} < 0$, $g_2 > 0$. Правая ветвь: $\partial\tau/\partial x' > 0$, $\tau \in [\tau_{jr}, 0)$, $x' \in [x'_{jr}, \infty)$, $a_0 < 0$, $a_{12} > 0$, $b_{12} > 0$, $g_2 > 0$. Здесь справедливы формулы (38), (39), в которых выбор знаков коэффициентов соответствует наименованию ветви: $\tau_j = \tau_{jl} = -\tau_{jr}$, $(dx'_j/dt) = (dx'_j/dt)_l = -(dx'_j/dt)_r$, $x'_j = x'_{jl} = -x'_{jr}$. При $\varphi = (\pi/2) + 2\pi n_0$ эти ветви образуют неподвижный сильный разрыв. Рассуждения, относящиеся к выбору параметров g_2 , Δ_j , δ_j^2 и условию появления трансзвукового перехода, остаются такими же, как и в предыдущем случае для ветвей с наклонами разных знаков. Качественная картина колебаний аналогична той, что показана на рис. 3, но теперь граничная функция τ_j содержит синусную зависимость от времени, см. (38).

Колебания слабого и сильного разрывов. Вернемся к интервалу низких частот и обсудим физическую модель решения при $b_1 = 0$: см. соотношения, сопутствующие формуле (28). На интервале $\tau \in (0, \tau_m]$ две монотонные ветви смыкаются друг с другом при $\tau = \tau_m \equiv \text{const}$ и образуют слабый разрыв. Левая ветвь: $\partial\tau/\partial x' > 0$, $x' \in (-\infty, x'_m]$, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_{12} > 0$, $b_0 < 0$, $b_2 < 0$. Правая ветвь: $\partial\tau/\partial x' < 0$, $x' \in [x'_m, \infty)$, $a_0 < 0$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $a_{12} < 0$, $b_0 > 0$, $b_2 > 0$. Расположение ветвей похоже на то, что изображено на рис. 2, б. Обе ветви примыкают друг к другу при всех $t \geq 0$. Скорость слабого разрыва равна

$$dx'_m/dt = -(b_0 + b_2\tau_m \cos kt) / [a_0 + a_{12}\tau_m \sin(kt + \beta_1)]. \quad (40)$$

В этой формуле выбор знаков коэффициентов соответствует наименованию ветви: $(dx'_m/dt)_l = (dx'_m/dt)_r$.

Другой вариант построения ветвей выполняется следующим образом. Левая ветвь: $\tau \in (0, \tau_m]$, $\partial\tau/\partial x' > 0$, $x' \in (-\infty, x'_m]$, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_0 < 0$, $b_2 < 0$. Правая ветвь: $\tau \in [-\tau_m, 0)$, $\partial\tau/\partial x' > 0$, $x' \in [x'_m, \infty)$, $a_0 < 0$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_0 > 0$, $b_2 < 0$. Схема расположения ветвей аналогична той, что показана на рис. 3, б. Эти ветви примыкают слева и справа к линии $x'_m = x'_m(t)$, $t \geq 0$. Такая конфигурация ассоциируется с сильным разрывом, на котором функция $\tau(x', t)$ меняется скачком от $-\tau_m$ до τ_m . Скорость разрыва равна

$$\frac{dx'_m}{dt} = - \frac{(b_0)_{l,r} + (b_2)_{l,r} (\pm\tau_m) \cos kt}{(a_0)_{l,r} + (a_1)_{l,r} (\pm\tau_m) \sin kt + (a_2)_{l,r} (\pm\tau_m) \cos kt}, \quad (41)$$

$$(dx'_m/dt)_l = (dx'_m/dt)_r.$$

Для вариантов (40) и (41) линии динамического гистерезиса на плоскости (ζ, Z) имеют вид, аналогичный (36):

$$Z = \pm \left[\frac{a_1^2}{a_2^2} F(\zeta) \right]^{1/2}; \quad Z = 1 + \frac{a_0}{b_0} M.$$

Функция $F(\zeta)$ определяется формулой (37).

Заключение. Волновое уравнение (1) с источником (7) имеет точное частное решение (4), (5). Основные свойства решения детерминированы выбором знаков коэффициентов Q_1 , Q_3 и характером зависимости коэффициента a_3 от частоты возбуждающих колебаний источника (см. (21), (26)–(30)). Рассмотрены колебания высокой и низкой частоты. Изучены свойства τ_i -изолиний: кинк-пульсации; знакопеременность скорости изолиний; дозвуковой и сверхзвуковой режимы движения; трансзвуковой переход. Представлены три группы задач, связанных с физической интерпретацией решения: задача с неизвестной подвижной границей (31); колебания двух монотонных ветвей, периодически сближающихся и удаляющихся друг от друга; конфигурация волнового типа – слабый либо сильный разрыв, движущийся вдоль координатной оси.

Литература

1. Додд, Р. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
2. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 318 с.
3. Жоу, Д. Расширенная необратимая термодинамика / Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. – Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 528 с.
4. Аэро, Э.Л. Динамические задачи для уравнения синус-Гордона с переменными коэффициентами. Точные решения / Э.Л. Аэро // Прикладная математика и механика. – 2002. – Т. 66, Вып. 1. – С. 102–108.
5. Nonautonomous mixed nKdV–sinh–Gordon hierarchy / J.F. Gomes, G.R. de Melo, L.H. Ymai, A.H. Zimerman // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2010. – Vol. 43, no. 39. – P. 395203–395212.
6. Аэро, Э.Л. Решения уравнений синус-Гордон с переменной амплитудой / Э.Л. Аэро, А.Н. Булыгин, Ю.В. Павлов // Теоретическая и математическая физика. – 2015. – Т. 184, № 1. – С. 79–91.
7. Якушевич, Л.В. О движении кинка ДНК под действием постоянного торсионного момента / Л.В. Якушевич, В.Н. Балашова, Ф.К. Закирьянов // Матем. биология и биоинформ. – 2016. – Т. 11, Вып. 1. – С. 81–90.
8. Попов, С.П. Неавтономные солитонные решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза-синус-Гордона / С.П. Попов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2016. – Т. 56, № 11. – С. 1960–1969.
9. Шабловский, О.Н. Динамика неустойчивых решений волнового уравнения с источниками / О.Н. Шабловский // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 51–61.

Поступила в редакцию 20 сентября 2021 г.

Сведения об авторе

Шабловский Олег Никифорович – доктор физико-математических наук, профессор, Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь, e-mail: shablovsky-on@yandex.by

Bulletin of the South Ural State University
Series “Mathematics. Mechanics. Physics”
2021, vol. 13, no. 4, pp. 44–56

DOI: 10.14529/mmph210406

**WAVE EQUATION WITH CUBIC NONLINEARITY AND EXCITATION
OF OSCILLATIONS IN THE “MEDIUM–SOURCE” SYSTEM**

O.N. Shablovskii

Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Republic of Belarus
E-mail: shablovsky-on@yandex.by

A new accurate solution of the wave equation with a source depending on the required function–time has been obtained. The source function has a polynomial (third degree) nonlinearity, as well as two complementary additive members, which include the second and third degrees of the required function and an explicit sine dependence on time. The constructed relations describe namely the process of excitation of oscillations in the “medium – nonlinear rheonomic source” system and therefore do not contain, as a special case, the solution of the wave equation with common cubic nonlinearity. Physical interpretation of the results of work is explained by the properties of the effect of the periodic external force on the medium. The solution has been obtained on the plane the “required function–time” and gives analytical expressions of the partial spatial and time derivatives of the required function. This allows to study the rheonomic properties of isolines of the required function: their velocity and the conditions at which this velocity is alternating. An important influence on the isolines behavior is exerted by

the slope of the source function in a small neighborhood of the zero value of the required function. Specifically: its sign determines the mode of (subsonic or supersonic) isoline movement, and its module serves as the scale when calculating the non-dimensional frequency of the exciting oscillations. The intervals of low and high frequencies are considered in this work. At every instant, the gradient properties of the required function are characterized by the monotone profile, located in the semi-infinite domain on the plane of the “coordinate – required function”. The conditions are indicated, at which time-periodic kink-pulsations occur: at separate moments, the source monotone profile transforms into a kink, which corresponds to two equilibrium states of the system. The rheonomic properties of the monotone profiles curvature have been studied: the appearance of points of inflection and rectification points. Two monotone profiles have been considered: the left and the right branches, located in the semi-infinite domains, respectively, to the left and right of the origin of coordinates. These branches move in oscillation, occasionally approaching each other and moving apart. At the moments when the branches adjoin the origin of coordinates, they form an immobile discontinuity, which is either weak or strong depending on whether the branch slopes are respectively either of different sign or of the same sign. It has been revealed that in the course of such oscillation process, a transonic transition is possible in the high frequency interval: the isoline velocity changes from the subsonic value to the supersonic one. A wave type formation has been constructed: the left and the right branches, forming either weak or strong discontinuity, move in time-periodic oscillation along the coordinate axis.

Keywords: wave equation; cubic nonlinearity of the source; transonic transition; moving boundary; weak and strong discontinuity.

References

1. Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Morris H.C. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*. London, Academic Press. Inc., 1984, 630 p.
2. Tabor M. *Chaos and Integrability In Nonlinear Dynamics*. New York etc.: Wiley, Cop., 1989, 364 p.
3. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon G. *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer, 2001, 463 p. DOI: 10.1007/978-3-642-56565-6
4. Aero E.L. Dynamical Problems for the Sine-Gordon Equation with Variable Coefficients. Exact solutions. *J. Appl. Math. Mech.*, 2002, Vol. 66, no 1, pp. 99–105. DOI: 10.1016/S0021-8928(02)00013-8
5. Gomes J.F., de Melo G.R., Ymai L.H., Zimmerman A.H. Nonautonomous mixed nKdV–sinh–Gordon hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2010, Vol. 43, no. 39, pp. 395203–395212. DOI: 10.1088/1751-8113/43/39/395203
6. Aero E.L., Bulygin A.N., Pavlov Yu. V. Solutions of the Sine-Gordon Equation with Variable Amplitude. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2015, Vol. 184, no. 1, pp. 961–972. DOI: 10.1007/s11232-015-0309-8
7. Yakushevich L.V., Balashova V.N., Zakiryanov F.K. On the DNA Kink Motion Under the Action of Constant Torque. *Math. Biol. Bioinf.*, 2016, Vol. 11, Iss. 1, pp. 81–90. DOI: 10.17537/2016.11.81
8. Popov S.P. Nonautonomous Soliton Solutions of the Modified Korteweg–De Vries–Sine-Gordon Equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2016, Vol. 56, Iss. 11, pp. 1929–1937. DOI: 10.1134/S0965542516110105
9. Shablovskiy O.N. Dynamics of Unstable Solutions for the Wave Equation with Sources. *Bulletin of the South Ural State University, series “Mathematics. Mechanics. Physics”*, 2020, Vol. 12, no. 4, pp. 51–61. DOI: 10.14529/mmph200406

Received September 20, 2021

Information about the author

Shablovskii Oleg Nikiforovich, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Gomel, Republic of Belarus, e-mail: shablovsky-on@yandex.by