УДК 533.9.01

ОТРАЖЕНИЕ ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ ОТ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Р. С. ВАРДАНЯН, С. И. МЕДВЕДИЦКОВ
Учреждение образования «Бобруйский филиал Белорусского государственного экономического университета»

Введение

Теория переноса излучения в оптически однородных средах достаточно хорошо разработана и является одним из важных разделов математической физики и теоретической астрофизики [1], [2].

Реальные астрофизические объекты, где рассматривается диффузия излучения, являются оптически неоднородными. Это скорее правило, чем исключение. Вследствие флуктуаций концентраций атомов, ионов, свободных электронов, температуры, оптические параметры среды, такие как коэффициент поглощения, альбедо рассеяния и другие, являются случайными функциями (полями), т. е. среда является случайно неоднородной (стохастической). Более или менее систематическое исследование процесса диффузии излучения в стохастических средах началось в конце прошлого века (например, [3]–[6]). Сложность задач переноса в стохастических средах вынуждает применить совершенно разные методы и математические модели случайного поля: принцип инвариантности [4], вероятностный метод [5], метод диаграммной техники Фейнмана [6]–[8].

Сравнение результатов, полученных разными методами, дает возможность более точно оценить влияние флуктуаций на процесс диффузии излучения. Во всех перечисленных работах рассматриваются стационарные задачи переноса.

В данной работе получено замкнутое уравнение относительно условной вероятности отражения кванта от нестационарной стохастической среды с учетом времени нахождения атома в возбужденном состоянии и времени нахождения кванта в пути. Предполагается, что вероятность выживания кванта (альбедо) является случайным полем.

Отметим, что рассмотренная задача, помимо астрофизических применений, может быть востребованной в области радиационной защиты населения. Такая задача, насколько известно авторам, рассматривается впервые.

Закон переизлучения кванта

Предположим, что среда состоит из двухуровневых атомов, свободных электронов и ионов. Будем рассматривать диффузию монохроматического излучения. В линейном приближении возбужденный атом может перейти в основное состояние либо спонтанно (излучив фотон), либо вследствие электронных ударов второго рода, не излучив при этом фотон.

Вероятность dp_0 перехода возбужденного атома в основное состояние за время dt не зависит от t, и задается выражением: $dp_0 = \beta dt$, $(\beta = A_{21} + a_{21})$, а вероятность dp_1 радиативного перехода за время dt будет $dp_1 = \gamma dt$, $\gamma = A_{21}$, где A_{21} – эйнштейновский коэффициент спонтанных переходов, a_{21} – коэффициент деактивации атома вследствие электронных ударов. Переизлучение кванта возбужденным атомом является пуассоновским процессом (например, [9]), следовательно, вероятность $P(t)$ того, что возбужденный в момент времени $t = 0$ атом не совершит никаких переходов в интервале времени (0, t), т. е. «доживет» до момента времени t, будет:

$$P(t) = e^{-\beta t}. \tag{1}$$

Из (1) следует, что вероятность $dp(t)$ радиативного перехода в интервале времени (t; $t + dt$) будет:

$$dp(t) = \gamma e^{-\beta t} dt; \ \int_0^\infty dp = \frac{A_{21}}{A_{21} + a_{21}} = \lambda, \tag{2}$$

где λ – альбедо рассеяния.

Коэффициент деактивации a_{21} обычно представляется в виде (например, [2]): $a_{21} = n_e C_{21}(T)$, где n_e – концентрация свободных электронов, T – температура электронной подсистемы.

Если n_e или T флуктуируют, то $\beta = A_{21} + n_e C_{21}(T)$ также будет случайной величиной в каждой точке среды. Для дальнейшего изложения удобно считать, что β зависит от некоторого параметра u, который является случайным полем $u = U(\vec{r})$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки. Например, за u можно взять флуктуационную часть электронной концентрации $u \equiv \tilde{n}_e = n_e - \langle n_e \rangle$, где $\langle n_e \rangle$ – среднее значение n_e.

Будем предполагать, что поле $U(\vec{r})$ является гаусс-марковским случайным полем. Пусть $g\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|; u; u'\right)$ плотность распределения условной вероятности u' в точке $\vec{r}'$, при условии что $U\left(\vec{r}\right) = u$.

В работах [4], [5] показано, что в трехмерных задачах и в одномерном приближении к трехмерным задачам, при выполнении условия марковости случайного поля U вдоль траектории кванта $g\left(\left|\vec{r} - \vec{r}'\right|; u; u'\right)$ порождает полугруппу оператор-функции $\hat{G}(r)$:

$$\left[\hat{G}(r) f\right](u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(r; u; u') f(u') du', \ r = \left|\vec{r} - \vec{r}'\right|, \ \hat{G}(0) = I, \tag{3}$$

где I – единичный интегральный оператор. Это следует из свойства функции g:

$$g(0; u; u') = \delta(u - u'), \tag{4}$$

где $\delta(u - u')$ – дельта функция Дирака.

Пусть $\hat{M}$ инфинитезимальный оператор полугруппы $\hat{G}$:

$$\hat{M} = \frac{d\hat{G}}{dr} / r = +0. \tag{5}$$

Известно (например: [5], [9]), что для гауссовского поля

$$\hat{M} = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial u^2}; \ \varepsilon = \sigma^2 / l, \tag{6}$$

где σ^2 – дисперсия u; l – радиус корреляции.

Уравнение относительно условной вероятности тражения кванта от среды

Перейдем от геометрической глубины точки x к оптической глубине

$$\tau = \alpha x,$$

где α – коэффициент поглощения света.

Пусть в момент времени $t = 0$ на границу одномерного слоя $[0; \tau_0]$ падает один квант. Пусть $P(\tau_0; t; u)dt$ – условная вероятность того, что после диффузии квант выйдет из среды со стороны границы $\tau = 0$ в интервале времени $(t;\ t + dt)$ при условии, что $U(0) = u$. Следовательно, $P(\tau_0; t; u)$ имеет смысл плотности распределения вероятностей.

Выделим из среды $[0; \tau_0]$ подслой $\Pi_1[0; \Delta\tau]$, а оставшуюся часть $[\Delta\tau; \tau_0]$ обозначим через Π_2. Отметим, что вероятность поглощения кванта в слое $\Delta\tau$ равна $\Delta\tau$, следовательно, вероятность того, что квант пройдет слой $\Delta\tau$, будет $(1-\Delta\tau)$.

При составлении уравнения относительно $P(\tau_0; t; u)$ применяется метод сложения слоев (например: [4], [8]), но с учетом временной зависимости вероятности отражения кванта от среды. Плотность вероятности $P(\tau_0; t; u)$ складывается из вероятностей следующих процессов:

1. Квант проходит подслой Π_1 с вероятностью $(1-\Delta\tau)$, отражается от Π_2, повторно проходит Π_1 и выходит из среды в интервале времени $(t;\ t + dt)$. В точке $\Delta\tau$ параметр u может принимать любое значение u' в интервале $(u'; u' + du')$ с вероятностью $g(\Delta\tau; u; u')du'$ (так как в точке $\tau = 0,\ U = u$). Далее, при прохождении подслоя $\Delta\tau$ дважды (туда и обратно) квант тратит время $\Delta t = \dfrac{2\Delta\tau}{\vartheta}$. Следовательно, вероятность dP_1 выхода кванта из среды, с учетом времени задержки в пути и с учетом, что квант отражается от Π_2 толщиной $\tau_0 - \Delta\tau$, будет:

$$dP_1 = (1-\Delta\tau)^2 g(\Delta\tau; u; u')P(\tau_0 - \Delta\tau; t - \frac{2\Delta\tau}{\vartheta}; u')du'.$$

Интегрируя по u', окончательно получим:

$$P_1(\tau_0; t; u) = (1-\Delta\tau)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(\Delta\tau; u; u')P(\tau_0 - \Delta\tau; t - \frac{2\Delta\tau}{\vartheta}; u')du', \tag{7}$$

где ϑ – скорость света в единицах оптической толщины.

2. Квант с вероятностью $\Delta\tau$ поглощается в подслое Π_1 в момент $t = 0$, по закону (2) переизлучается назад в интервале времени $(t;\ t + dt)$ и с вероятностью $1-\Delta\tau$ выходит из среды. С точностью до слагаемых порядка $\Delta\tau$ вероятность этого процесса с учетом (2), (4) будет:

$$P_2 = \Delta\tau \frac{\gamma}{2} e^{-\beta t};\ \beta = \beta(u). \tag{8}$$

3. Квант поглощается в Π_1 в момент времени $t = 0$, переизлучается вперед в интервале времени $(t';\ t' + dt')$, где $t' \in (0; t)$, отражается от Π_2 в интервале времени $(t; t + dt)$ и выходит из среды. С точностью до членов порядка $\Delta\tau$ вероятность этого процесса:

$$P_3 = \Delta\tau \frac{\gamma}{2} \int_0^t P(\tau_0; t - t'; u) e^{-\beta t'} dt'. \quad (9)$$

4. Квант проходит подслой Π_1, отражается от Π_2 в интервале времени (t'; $t' + dt'$), поглощается в Π_1, переизлучается в интервале времени (t; $t + dt$) и выходит из среды. Вероятность этого процесса:

$$P_4 = \Delta\tau \frac{\gamma}{2} \int_0^t P(\tau_0; t'; u) e^{-\beta(t-t')} dt'. \quad (10)$$

5. Квант проходит Π_1, отражается от Π_2 в интервале времени (t''; $t'' + dt''$), поглощается в Π_1, переизлучается назад к Π_2 в интервале времени (t'; $t' + dt'$), повторно отражается от Π_2 в интервале времени (t; $t + dt$) и выходит из среды. Вероятность этого процесса:

$$P_5 = \Delta\tau \frac{\gamma}{2} \int_0^t dt'' P(\tau_0; t''; u) \int_{t''}^t e^{-\beta(t'-t'')} P(\tau_0; t - t'; u) dt'. \quad (11)$$

Отметим, что во всех слагаемых мы должны сохранить члены порядка $\Delta\tau$, так как в дальнейшем следует совершить предельный переход $\Delta\tau \to 0$. Поэтому члены типа $\Delta\tau P(\tau_0 - \Delta\tau; t - \frac{\Delta\tau}{\vartheta}; u)$ были заменены выражением $\Delta\tau P(\tau_0; t; u)$. По той же причине выражения типа $\Delta\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\tau; u; u') f(u') du'$ были заменены на $\Delta\tau f(u)$, так как

$$\Delta\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(u') g(\Delta\tau; u; u') du' = \Delta\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(u') g(0; u; u') du' =$$

$$= \Delta\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(u') \delta(u - u') du' = \Delta\tau f(u).$$

Сложив выражения P_i (7)–(11) и совершив предельный переход $\Delta\tau \to 0$, с учетом формул (3)–(5) получим следующее уравнение относительно $P(\tau_0; t; u)$:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau_0} - \hat{M} P + \frac{2}{\vartheta} \frac{\partial P}{\partial t} + 2P = F[P; u; t], \quad (12)$$

а для гауссовского поля, с учетом (6):

$$\frac{\partial P}{\partial \tau_0} - \varepsilon \frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + \frac{2}{\vartheta} \frac{\partial P}{\partial t} + 2P = F[P; u; t], \quad (13)$$

где

$$F = \frac{\gamma}{2} e^{-\beta(u)t} \gamma \int_0^t e^{-\beta(u)(t-t')} P(\tau_0; t'; u) dt' +$$

$$+ \frac{\gamma}{2} \int_0^t dt' \int_0^{t-t'} e^{-\beta(u)t} + \gamma \int_0^t e^{-\beta(u)(t-t')} P(\tau_0; t'; u) dt''. \quad (14)$$

К уравнениям (12), (13) следует присоединить граничные условия:

$$P(0; t; u) = P(\tau_0; 0; u) = 0. \tag{15}$$

В случае полубесконечной среды $(\tau_0 = \infty)$ вместо уравнения (13) получим уравнение относительно $P(t; u)$:

$$\frac{2}{\vartheta}\frac{\partial P}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2 P}{\partial u^2} + 2P = F[P; u; t]; \tag{16}$$

$$P(0; u) = 0.$$

Итак, удается получить замкнутое уравнение относительно условной вероятности отражения от стохастической среды.

Пусть $\varphi(u)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины $u = U(0)$.

Тогда безусловная плотность вероятности отражения кванта от среды в момент времени t будет:

$$P(\tau_0 t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) P(\tau_0; t; u)\, du. \tag{17}$$

Как и следовало ожидать, относительно неизвестной функции $P(t; u)$ получается довольно сложное интегро-дифференциальное уравнение параболического типа. Если считать, что стохастическая среда мало отличается от однородной, т. е. либо малая дисперсия σ^2 поля, либо большой радиус l корреляции поля, т. е. считать, что $\varepsilon = \dfrac{\sigma^2}{l}$ малый параметр, то решение (6) можно искать в виде разложения в степенной ряд по степеням ε: $P(t;\ u) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k \varepsilon^k$. Относительно нулевого приближения $P_0(t; u)$ получается уравнение:

$$\frac{2}{\vartheta}\frac{\partial P_0(t; u)}{\partial t} + 2P_0 = F[P_0; u; t]. \tag{18}$$

Относительно остальных приближений P_i также получаются уравнения такого типа. Так как правые части полученных уравнений являются свертками, то такие уравнения эффективно можно решить преобразованием Лапласа. Предполагается результаты этих вычислений изложить в отдельной статье.

Чтобы выяснить, хотя бы качественно, как влияют флуктуации альбедо на отражательную способность среды, рассмотрим следующую частную задачу. Будем считать, что вероятность λ выживания кванта (2) является гауссовским полем, т. е. $\lambda = u$, далее не будем учитывать время нахождения атома в возбужденном состоянии и будем считать, что скорость света $\vartheta = \infty$. Тогда вместо уравнения (16) для полубесконечной среды получим:

$$-\varepsilon\frac{\partial^2 P(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{\lambda}{2} - (2-\lambda)P(\lambda) + \frac{\lambda}{2}P^2(\lambda). \tag{19}$$

Ищем решение (19) в виде разложения по степеням ε:

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k P_k(\lambda). \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), относительно $P_0(\lambda)$ вместо (18), получим квадратное уравнение:

$$\frac{\lambda}{2}P_0^2-(2-\lambda)P_0+\frac{\lambda}{2}=0. \tag{21}$$

Решение этого уравнения:

$$P_0=\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}}\equiv\frac{1-\alpha}{1+\alpha},\ \ \alpha=\sqrt{1-\lambda}. \tag{22}$$

Это известное в теории переноса излучения выражение коэффициента отражения от полубесконечной однородной среды с $\lambda=\text{const}$. Для следующего приближения $P_1(\lambda)$ получим выражение:

$$P_1(\lambda)=-\frac{1}{\alpha}\frac{d^2P_0}{d\lambda^2}. \tag{23}$$

Пропуская промежуточные выкладки, приведем окончательное выражение для P_1:

$$P_1=\frac{1+2\alpha}{2\alpha^4(1+\alpha)^3}. \tag{24}$$

Следовательно, в первом приближении:

$$P(\alpha)\approx P_0+\varepsilon P_1=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\varepsilon\frac{1+2\alpha}{2\alpha^4(1+\alpha)^3},\ \ \alpha=\sqrt{1-\lambda}. \tag{25}$$

Рассмотрим численный пример. Пусть $\lambda=0{,}96$, $\alpha=0{,}2$, $\varepsilon=0{,}0004$. Это реалистичные данные. Тогда коэффициент отражения увеличивается на 15 %. Оказывается, что даже симметрические флуктуации λ приводят к заметному увеличению коэффициента отражения. Более строгое доказательство этого утверждения можно найти в статье [8].

Заключение

Таким образом, можно сформулировать следующее правило учета флуктуаций параметра $\beta=\beta(u)$ при составлении уравнения относительно условной вероятности отражения $P(\tau_0;t;u)$ методом сложения слоев (или с помощью принципа инвариантности): следует в соответствующих уравнениях для однородной среды оператор $\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\frac{2}{\partial}\frac{\partial}{\partial t}$ заменить оператором $\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\frac{2}{\vartheta}\frac{\partial}{\partial t}-\hat{M}$, или $\frac{\partial}{\partial\tau_0}+\frac{2}{\vartheta}\frac{\partial}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial u^2}$. Это общее правило. Следует отметить, что в аналогичных стационарных задачах (например: [4], [5], [8]) эта замена, т. е. учет флуктуации альбедо, приводит к существенному увеличению коэффициента отражения.

Литература

1. Соболев, В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет / В. В. Соболев. – М. : Гостехиздат, 1956. – 332 с.
2. Михалас, Д. Звездные атмосферы / Д. Михалас. – М. : Мир, 1982.

3. Енгибарян, Н. Б. Звезды, туманности, галактики / Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян. – Ереван : Изд-во АН Арм. ССР, 1969.
4. Варданян, Р. С. О задачах переноса в стохастических средах / Р. С. Варданян, Н. Б. Енгибарян // Принцип инвариантности и его приложения // Тр. симпозиума. – Ереван : Изд-во АН Арм. ССР, 1981. – С. 203–209.
5. Варданян, Р. С. Применение вероятностного метода к задачам переноса в стохастических средах / Р. С. Варданян, Н. Б. Енгибарян // Астрофизика. – 1989. – Т. 31, вып. 1. – С. 162–176.
6. Vardanian, R. S. Radiation Transferin in Stochastic Media / R. S. Vardanian // Astrophysics and Space Sciense. – 1988. – Vol. 141. – P. 375–387.
7. Варданян, Р. С. Корреляционные характеристики поля излучения в стохастической среде / Р. С. Варданян // Вес. Нац. акад. навук. Беларусі, сер. фiз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 90–94.
8. Варданян, Р. С. Характеристики поля излучения в полубесконечной стохастической среде / Р. С. Варданян // Вес. Нац. акад. навук. Беларусі, сер. фiз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 55–61.
9. Вентцель, А. Д. Курс теории случайных процессов / А. Д. Вентцель. – М. : Наука, 1975. – 512 с.

Получено 24.05.2013 г.