Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Физика и электротехника»

В. В. Соленков

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ
ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов учреждений высшего
образования по специальностям «Электроснабжение»,
«Электроэнергетические системы и сети»*

Под редакцией
кандидата технических наук,
доцента *А. В. Козлова*

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2022

УДК 621.3.011.7(075.8)
ББК 31.211я73
С60

Рецензенты: доц. каф. электротехники БГАТУ
канд. техн. наук, доц. *А. В. Крутов*;
зав. каф. «Автоматизация производственных процессов
и электротехники» канд. техн. наук, доц. *Д. С. Карпович*;
доц. каф. «Электротехника и электроника»
канд. техн. наук, доц. *С. В. Сизиков*

Соленков, В. В.

С60 Основы электротехники. Линейные электрические цепи : учеб. пособие / В. В. Соленков ; под ред. А. В. Козлова ; М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2022. – 270 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-501-5.

Подготовлено в соответствии с программой дисциплины «Теоретические основы электротехники». Изложены основные вопросы теории линейных электрических цепей курса теоретических основ электротехники. Кроме задач, схемы и параметры которых выбраны произвольно с целью подчеркнуть тот или иной метод расчета, приведены задачи, возникающие при исследовании процессов в реальных электротехнических устройствах. Некоторые задачи содержат методические указания.

Для студентов технических специальностей вузов.

УДК 621.3.011.7(075.8)
ББК 31.211я73

ISBN 978-985-535-501-5

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В условиях усиления практической ориентированности образования актуальной задачей для качественной подготовки инженеров-электриков является наличие учебно-методического обеспечения, связывающего основы электротехники с прикладной областью энергетики. Навыки в составлении уравнений электрической цепи, выборе того или иного метода решения, проверке решения необходимы инженеру-электрику и должны развиваться с самого начала изучения дисциплины «Теоретические основы электротехники».

При остром дефиците в области расчета и анализа линейных электрических цепей книга очень своевременна и безусловно, полезна. В учебном пособии рассмотрены вопросы теории линейных электрических цепей. Настоящая книга является своего рода «мостом», помогающим студентам переходить от изучения общетехнических дисциплин к дисциплинам специальности.

Каждая из пяти глав состоит из введения, в котором приведены краткие сведения из теории, и трех групп задач: с разобранными решениями, типовых и повышенной сложности, отмеченных символом«*».

Значительную часть составляют задачи, разработанные автором данной книги. Некоторые задачи взяты из сборников задач и упражнений под редакцией П. А. Ионкина [8] и П. А. Бутырина [11] (Московский энергетический университет).

Глава 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С ИСТОЧНИКАМИ ПОСТОЯННЫХ ЭДС И ТОКОВ

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

К простейшим двухполюсным пассивным элементам схемы линейной электрической цепи относятся *резистивный*, *индуктивный* и *емкостной элементы*.

Резистивный элемент – это элемент, в котором напряжение u_R и ток i_R связаны соотношением (закон Ома):

$$u_R = Ri_R, \quad \text{или} \quad i_R = Gu_R, \tag{1}$$

где R – сопротивление; G – проводимость.

Мощность преобразования электромагнитной энергии в тепловую в резистивном элементе (закон Джоуля–Ленца):

$$p = Ri_R^2. \tag{2}$$

Индуктивный элемент – это элемент, в котором напряжение и ток связаны законом электромагнитной индукции:

$$u_L = \frac{Ldi_L}{dt}, \tag{3}$$

где L – индуктивность; t – время.

Энергия, запасаемая в магнитном поле индуктивного элемента, равна:

$$W_L = \frac{Li_L^2}{2}. \tag{4}$$

Емкостный элемент – это элемент, в котором напряжение и ток связаны соотношением

$$i_C = \frac{Cdu_C}{dt}, \tag{5}$$

где C – емкость.

Энергия, запасаемая в электрическом поле емкостного элемента, равна:

$$W_C = \frac{Cu_C^2}{2}. \qquad (6)$$

В установившемся режиме цепи постоянного тока, ток I и напряжение U постоянны (не изменяются во времени). Из (3) и (5) следует, что в таком режиме отсутствуют напряжение на индуктивности и ток в емкости: $u_{L\text{у}} = 0$ и $i_{C\text{у}} = 0$, т. е. идеальная индуктивность представляет собой «закоротку», а идеальная емкость – бесконечно большое сопротивление.

Источник энергии (активный элемент) линейной электрической цепи постоянного тока можно представить любой из двух схем замещения: последовательной, состоящей из идеального источника ЭДС E и внутреннего сопротивления R_0 (рис. 1, *а*), и параллельной, состоящей из идеального источника тока J и внутренней проводимости G_0 (рис. 1, *б*).

Рис. 1

У идеального источника ЭДС $R_0 = 0$ и он развивает мощность

$$P = EI. \qquad (7)$$

В свою очередь, у идеального источника тока $G_0 = 0$ и он развивает мощность

$$P = UJ. \qquad (8)$$

Наконец, для последовательной схемы

$$U = E - R_0 I, \qquad (9)$$

а для параллельной схемы

$$I = J - G_0 U, \qquad (10)$$

причем у одного и того же источника энергии

$$E = R_0 J \quad \text{и} \quad G_0 = \frac{1}{R_0}. \tag{11}$$

Законы Кирхгофа. Перед написанием законов Кирхгофа необходимо задаться условными положительными направлениями токов в каждой ветви.

Первый закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в любом узле электрической цепи, равна нулю, т. е.

$$\sum_k I_k = 0, \tag{12}$$

где токи, направленные от узла, принимаются положительными, а направленные к узлу – отрицательными (или наоборот).

Второй закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре электрической цепи равна алгебраической сумме ЭДС, входящих в этот контур, т. е.

$$\sum_k U_k = \sum_k R_k I_k = \sum_n E_n. \tag{13}$$

Направление обхода контура выбирают произвольно, например, по ходу часовой стрелки. При этом соблюдается следующее правило знаков: ЭДС и падения напряжения, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, в суммах (13) должны быть положительными [4].

Эквивалентные преобразования отдельных участков схем не должны приводить к изменению токов или напряжений на участках, не подвергшихся преобразованию.

Эквивалентное сопротивление участка схемы, состоящего из n последовательно соединенных сопротивлений, равно сумме этих сопротивлений, т. е.

$$R_{\text{эк}} = \sum_{k=1}^{n} R_k. \tag{14}$$

При этом *сопротивления соединены последовательно*, *если по ним протекает один и тот же ток*.

Эквивалентное сопротивление участка схемы, состоящего из n параллельно соединенных сопротивлений, определяется по формуле

$$\frac{1}{R_{эк}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k} \quad \text{или} \quad G_{эк} = \sum_{k=1}^{n} G_k \,. \tag{15}$$

При этом *сопротивления соединены параллельно*, *если все они присоединены к одной паре узлов*.

При параллельном соединении n ветвей ток в каждой из них определяется через ток в неразветвленной части параллельного участка в виде

$$I_k = I \frac{G_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k}. \tag{16}$$

Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду сопротивлений (рис. 2, *а* и *б*) и звезды в эквивалентный треугольник производится по формулам (17) и (18):

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \; R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}; \; R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}. \tag{17}$$

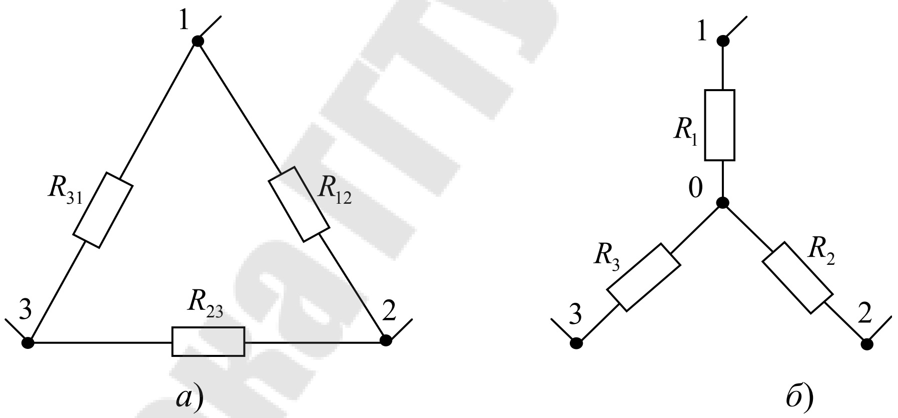


Рис. 2

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1};$$

$$R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}. \tag{18}$$

Как известно [2], [11], в теории электрических цепей решаются задачи двух типов. К первому типу относятся *задачи анализа*, в которых известны схема и элементы цепи, а требуется определить токи, напряжения и мощности тех или иных участков. Ко второму типу относятся *задачи синтеза* (обратные задачи), в которых, например, заданы токи и напряжения, а требуется определить схему цепи и выбрать ее элементы.

В практической электротехнике чаще встречаются задачи анализа, изучению методов расчета которых посвящен данный практикум.

Расчет токов и напряжений в простых электрических цепях с одним источником энергии целесообразно выполнять с *помощью эквивалентных преобразований.* Суть метода состоит в том, что вначале пассивная часть цепи, представляющая последовательное, параллельное или смешанное соединения элементов (сопротивлений), преобразуется к одному эквивалентному элементу с сопротивлением $R_{\text{экв}}$ относительно зажимов (выводов) источника с напряжением U. Далее по закону Ома определяется ток источника

$$I = \frac{U}{R_{\text{экв}}}. \tag{19}$$

Наконец, выполняется расчет токов и напряжений в остальных ветвях цепи по закону Ома и законам Кирхгофа.

В случае расчета цепи *методом уравнений Кирхгофа* (МУК) рекомендуется следующая последовательность действий: сначала произвольно выбирают условные положительные направления токов во всех ветвях цепи; затем составляют уравнения для узлов по *первому закону Кирхгофа*, и, наконец, составляют уравнения для независимых контуров по *второму закону Кирхгофа*.

Если электрическая цепь содержит, например, m ветвей и n узлов, то на основании первого и второго законов Кирхгофа можно составить соответственно $(n-1)$ и $[m-(n-1)]$ взаимно независимых уравнений, сумма которых, равная в итоге m, необходима и достаточна для определения m токов (во всех ветвях цепи).

При наличии в цепи источника тока его ток J, как и прежде, учитывают в уравнениях для узлов. А при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа ветвь с источником тока J включать в независимые контуры не рекомендуется.

Если значения некоторых токов в результате расчета получаются со знаком «минус», то действительные направления их будут противоположны выбранным.

Существенный недостаток метода уравнений Кирхгофа – рост количества уравнений с ростом числа ветвей цепи. Число уравнений, подлежащих решению, можно сократить, если воспользоваться методом узловых потенциалов.

Метод узловых потенциалов (МУП) является одним из основных расчетных методов. Его суть заключается в том, что вначале, используя первый закон Кирхгофа и закон Ома, определяют потенциалы узлов цепи, а затем – токи в ветвях цепи. Число решаемых уравнений, таким образом, сокращается до величины $(n-1)$, где n – число узлов.

Рекомендуется следующий порядок расчета электрической цепи методом узловых потенциалов:

1. Задают (произвольно) условные положительные направления токов в ветвях цепи.
2. Определяют число узлов цепи и нумеруют их.
3. Один из узлов принимают за базовый, полагая потенциал его равным нулю.
4. Для остальных узлов составляют уравнения по первому закону Кирхгофа. При этом желательно токи, вытекающие из узлов, записывать со знаком «+», а токи, втекающие в узлы, – со знаком «–».
5. Используя закон Ома, выражают токи через потенциалы узлов и параметры элементов ветвей. Подставляют эти выражения в уравнения п. 4. После несложных математических преобразований получают систему уравнений относительно неизвестных потенциалов узлов цепи.
6. Решают систему уравнений п. 5, определяют потенциалы узлов цепи и далее по закону Ома – токи во всех ветвях цепи.

Третьим важным методом расчета является *метод контурных токов* (МКТ), в основе которого лежат уравнения, записанные по второму закону Кирхгофа.

В расчет вводятся контурные токи, замыкающиеся по независимым контурам. Для них составляются уравнения по второму закону Кирхгофа. Число решаемых уравнений по сравнению с МУК сокращается до числа независимых контуров. Действительные токи в ветвях определяются как алгебраическая сумма контурных токов. При этом первый закон Кирхгофа удовлетворяется автоматически.

Рекомендуется следующий порядок расчета электрической цепи методом контурных токов:

1. Определяют независимые контуры рассматриваемой цепи.

2. Выбирают направления контурных (фиктивных) токов и нумеруют их. Если в цепи есть источник тока, необходимо, считая его ток за контурный, наметить произвольный путь, по которому он будет замыкаться.

3. Составляют уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов и решают их, определяя значения этих токов. При этом надо учесть падения напряжения на источниках тока.

4. Выбирают направления действительных токов в ветвях цепи и определяют их через контурные токи. В смежных ветвях, принадлежащих нескольким независимым контурам, действительные токи равны алгебраической сумме контурных токов, а в ветвях, не являющихся смежными, – равны контурным токам.

Иногда при расчете сложных электрических цепей, содержащих небольшое количество источников электрической энергии, выгодно использовать *метод наложения* (МН), в основе которого лежит принцип наложения.

Принцип наложения относится к линейным системам независимо от их физической природы и применительно к электрическим цепям формулируется следующим образом: «Ток в любой ветви электрической цепи (схемы) равен алгебраической сумме токов, создаваемых в этой ветви каждым источником электрической энергии в отдельности».

Метод наложения заключается в том, что электрическая цепь, содержащая несколько источников энергии, рассчитывается при действии каждого из них в отдельности. При этом остальные источники исключаются, а их внутренние сопротивления сохраняются. Определенные таким образом частичные токи впоследствии алгебраически суммируются, т. е. учитывается направление каждого из них относительно положительного направления действительного тока в рассматриваемой ветви.

Рекомендуется следующий порядок расчета электрической цепи методом наложения:

1. Выбирают произвольно условные положительные направления действительных токов в ветвях цепи.

2. Представляют исследуемую электрическую цепь в виде нескольких частичных схем, каждая из которых содержит лишь один источник энергии. При этом остальные источники исключают, а их внутренние сопротивления сохраняют.

3. Выбирают условные положительные направления частичных токов в каждой из частичных схем и рассчитывают их. При этом ра-

циональным методом расчета чаще всего является метод эквивалентных преобразований.

4. Рассчитывают действительные токи во всех ветвях путем алгебраического суммирования соответствующих частичных токов.

Иногда при исследовании процессов в сложных электрических цепях возникает задача определения тока, напряжения и мощности только одной ветви. В этом и других подобных случаях выделяют эту ветвь, присоединенную к остальной цепи в двух точках. Часть электрической цепи произвольной конфигурации, рассматриваемая относительно выделенной ветви с двумя зажимами (или полюсами), называют двухполюсником. Этот двухполюсник называют активным, поскольку он содержит источники электрической энергии.

Активный двухполюсник, представляющий собой сколь угодно сложную цепь с источниками энергии, согласно теореме об активном двухполюснике (*теореме Гельмгольца–Тевенена*) может быть заменен эквивалентным генератором. Электродвижущая сила эквивалентного генератора $E_{эг}$ численно равна напряжению холостого хода на зажимах выделенной ветви, а внутреннее сопротивление $R_{вн}$ – входному сопротивлению пассивной цепи относительно тех же зажимов.

Метод расчета тока в выделенной ветви, основанный на замене активного двухполюсника эквивалентным генератором, принято называть *методом эквивалентного генератора* (МЭГ).

Рекомендуется следующая последовательность расчета тока в одной из ветвей сложной цепи этим методом:

1. Размыкают ветвь с неизвестным током; тем самым обеспечивают режим холостого хода относительно выделенной ветви.

2. Рассчитывают напряжение холостого хода $U_{хх}$ на зажимах разомкнутой ветви.

3. Определяют входное сопротивление $R_{вх}$ всей схемы относительно тех же зажимов; при этом источники ЭДС исключают, сохраняя их внутреннее сопротивление, а ветви с источниками тока размыкают.

4. Рассчитывают искомый ток по формуле

$$I = \frac{E_{эг}}{R_{вн} + R_{н}} = \frac{U_{хх}}{R_{вх} + R_{н}}, \qquad (20)$$

где $R_{н}$ – сопротивление выделенной ветви.

Баланс мощностей. Для любой замкнутой электрической схемы сумма мощностей $P_{и}$, развиваемых источниками электрической энергии, равна сумме мощностей $P_{\text{пр}}$, расходуемых в приемниках энергии:

$$\sum P_{\text{и}} = \sum P_{\text{пр}} \quad \text{или} \quad \sum(E_m I_m + U_n J_n) = \sum R_k I_k^2 . \qquad (1.21)$$

Здесь $\sum E_m I_m$ – алгебраическая сумма, в которой положительны те слагаемые, для которых направления ЭДС E_m и тока I_m совпадают (в противном случае слагаемое отрицательно); $\sum U_n I_n$ – алгебраическая сумма, в которой положительны те слагаемые, для которых напряжение на источнике тока U_n и ток источника J_n противоположны (в противном случае слагаемое отрицательно); $\sum R_k I_k^2$ – арифметическая сумма, в которой учитываются как сопротивления приемников, так и внутренние сопротивления источников энергии.

Задачи с решениями

1.1. Эквивалентные преобразования в электрических цепях. Законы Ома и Кирхгофа

Задача 1.1. В цепи (рис. 1.1) определить эквивалентные сопротивления относительно зажимов a и b, c и d, d и f, если $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $R_4 = 30$ Ом, $R_5 = 6$ Ом.

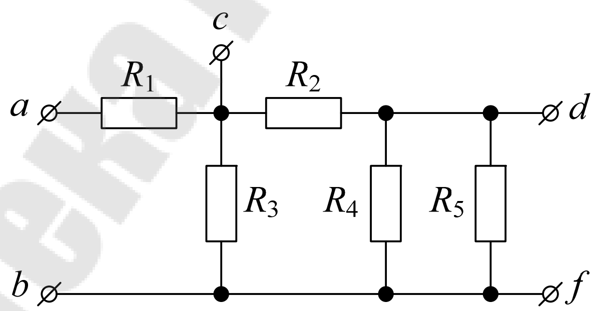


Рис. 1.1

Решение. При расчете R_{ab} предварительно определим эквивалентное сопротивление соединенных параллельно сопротивлений R_4 и R_5:

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_4 + R_5} = \frac{30 \cdot 6}{30 + 6} = 5\,\text{Ом}.$$

Так как R_{45} соединено последовательно с R_2, их общее сопротивление

$$R_{245} = R_2 + R_{45} = 5 + 5 = 10 \text{ Ом}.$$

Наконец, сопротивление R_{ab} равно сумме R_1 и эквивалента сопротивлений R_{245} и R_3, соединенных между собой параллельно, т. е.

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_{245} R_3}{R_{245} + R_3} = 6 + \frac{10 \cdot 15}{10 + 15} = 12 \text{ Ом}.$$

При расчете R_{cd} сопротивление R_{45}, как и в предыдущем случае, равно 5 Ом. Последовательно с R_{45} соединено сопротивление R_3, т. е.

$$R_{345} = R_3 + R_{45} = 15 + 5 = 20 \text{ Ом}.$$

В свою очередь, эквивалентное сопротивление R_{345} по отношению к зажимам c и d соединено параллельно с сопротивлением R_2.

Следовательно,

$$R_{cd} = \frac{R_2 R_{345}}{R_2 + R_{345}} = \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 4 \text{ Ом}.$$

Наконец, по отношению к зажимам d и f цепь состоит из трех параллельно соединенных сопротивлений R_4, R_5 и $R_{23} = R_2 + R_3$. Эквивалентное сопротивление R_{df} может быть определено из формулы

$$\frac{1}{R_{df}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2 + R_3} = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5 + 15} = \frac{1}{4},$$

откуда $R_{df} = 4$ Ом.

Задача 1.2. Определить эквивалентное сопротивление относительно зажимов a и b при разомкнутом и замкнутом ключе K (рис. 1.2), если $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = R_5 = 10$ Ом, $R_3 = R_4 = 15$ Ом.

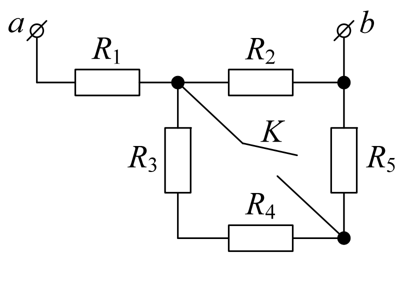


Рис. 1.2

Решение. При разомкнутом ключе K заданная цепь относительно зажимов a и b представляет собой последовательное соединение:

$$R_{ab} = R_1 + R_{cb},$$

в котором, в свою очередь,

$$R_{cb} = \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4 + R_5} \right)^{-1} = \frac{R_2 (R_3 + R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5}.$$

Таким образом, при разомкнутом ключе:

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_4 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 4 + \frac{10(15+15+10)}{10+15+15+10} = 12 \text{ Ом}.$$

При замкнутом ключе:

$$R_{ab} = R_1 + \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_5} = 4 + \frac{10 \cdot 10}{10+10} = 9 \text{ Ом}.$$

Задача 1.3. Аккумуляторная батарея, напряжение холостого хода которой равно 6,3 В, создает в цепи с сопротивлением $R_{\text{н}} = 2$ Ом ток, равный 3 А. Чему равно внутреннее сопротивление батареи?

Решение. Согласно закону Ома ток в цепи при подключении к батарее аккумуляторов сопротивления $R_{\text{н}} = 2$ Ом:

$$I = \frac{U_{\text{хх}}}{R_{\text{вн}} + R_{\text{н}}} = \frac{6{,}3}{R_{\text{вн}} + 2} = 3 \text{ А}.$$

Следовательно,

$$R_{\text{вн}} = \frac{U_{\text{хх}}}{I} - R_{\text{н}} = \frac{6{,}3}{3} - 2 = 0{,}1 \text{ Ом}.$$

Задача 1.4. Рассчитать токи в ветвях цепи, приведенной на рис. 1.3, если $E = 100$ В, $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом.

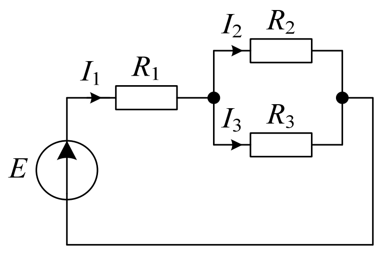


Рис. 1.3

Решение. Цепь на рис. 1.3 представляет собой смешанное соединение сопротивлений и может быть преобразована в более простую (одноконтурную) цепь следующим образом.

Вначале определяется эквивалентная проводимость параллельных ветвей

$$G_{23} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_2 R_3},$$

затем их общее сопротивление

$$R_{23} = \frac{1}{G_{23}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

и эквивалентное сопротивление всей цепи относительно зажимов источника

$$R_{ab} = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 8 + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 20 \text{ Ом}.$$

Суммарный ток при этом равен:

$$I_1 = \frac{U}{R_{ab}} = \frac{100}{20} = 5 \text{ А}.$$

Токи в параллельных ветвях, в свою очередь, могут быть найдены путем решения системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} I_2 + I_3 = I_1 = 5, \\ R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \end{array}\right\}$$

в виде:

$$I_2 = I_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 5 \frac{30}{20 + 30} = 3 \text{ А};$$

$$I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 5 \frac{20}{20 + 30} = 2 \text{ А}.$$

Последние формулы иногда называют *формулами разброса*, или *правилами плеч* [11].

Задача 1.5. Определить токи и напряжения на отдельных участках цепи (рис. 1.4), если напряжение на входе $U = 48$ В, а сопротивления участков $R_1 = R_2 = 0{,}5$ Ом, $R_3 = R_5 = 10$ Ом и $R_4 = R_6 = R_6 = 5$ Ом.

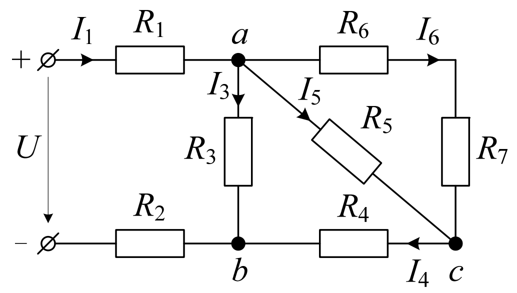


Рис. 1.4

Решение. Непосредственно определить токи в ветвях схемы не удается, так как неизвестно распределение напряжения на отдельных ее участках. Поэтому путем постепенного упрощения цепи найдем эквивалентное сопротивление относительно зажимов источника:

$$R_{ac} = \frac{(R_6 + R_7)R_5}{R_6 + R_7 + R_5} = \frac{(5+5)10}{5+5+10} = 5 \text{ Ом};$$

$$R_{ab} = \frac{(R_{ac} + R_4)R_3}{R_{ac} + R_4 + R_3} = \frac{(5+5)10}{5+5+10} = 5 \text{ Ом};$$

$$R_{\text{экв}} = R_{ab} + R_1 + R_2 = 5 + 0{,}5 + 0{,}5 = 6 \text{ Ом}.$$

Далее, по закону Ома:

$$I_1 = \frac{U}{R_{\text{экв}}} = \frac{48}{6} = 8 \text{ А}.$$

Напряжение между точками a и b:

$$U_{ab} = R_{ab} I_1 = 5 \cdot 8 = 40 \text{ В}$$

или

$$U_{ab} = U - (R_1 + R_2)I_1 = 48 - (0{,}5 + 0{,}5)8 = 40 \text{ В}.$$

Токи:

$$I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{40}{10} = 4 \text{ А}; \quad I_4 = I_1 - I_3 = 8 - 4 = 4 \text{ А}.$$

Токи I_5 и I_6, как токи в параллельных ветвях с одинаковыми сопротивлениями, равны:

$$I_5 = I_6 = \frac{I_4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ А}.$$

Напряжения:

$$U_{ac} = R_5 I_5 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ В}; \quad U_{cb} = R_4 I_4 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ В}.$$

Задача 1.6. В схеме (рис. 1.5) $E = 124$ В, $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = 80$ Ом, $R_3 = R_4 = R_6 = 40$ Ом, $R_5 = 10$ Ом, $R_7 = 24$ Ом, $R_8 = 16$ Ом. Определить все токи.

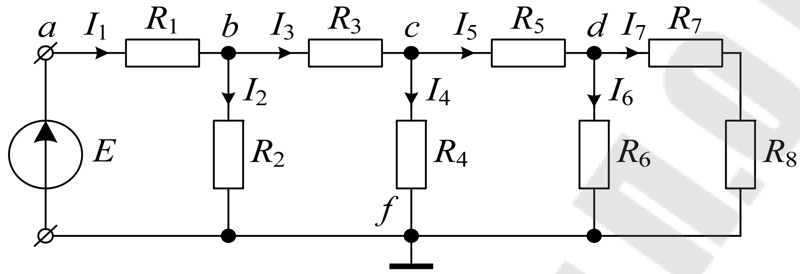


Рис. 1.5

Методическое указание. Рассмотренный в предыдущих задачах порядок преобразования схем и определения токов принципиально применим и для так называемой цепной схемы, приведенной на рис. 1.5.

Однако такой способ расчета цепных схем является достаточно трудоемким. Более целесообразно в подобном случае воспользоваться *методом пропорциональных величин* [4], [11] (используется для цепи с одним источником). При этом задают какое-нибудь значение тока в наиболее удаленной по отношению к источнику ветви. Далее, используя закон Ома и законы Кирхгофа, последовательно рассчитывают токи остальных ветвей. Затем определяют значение параметра источника $(E, U \text{ или } J)$ и сравнивают его с заданным. Коэффициент пропорциональности k определяется отношением заданного значения параметра к рассчитанному значению. Решение основано на выполнении *принципа линейности*: изменение параметра источника в k раз приводит к изменению всех токов в k раз.

Решение. За точку нулевого потенциала выберем точку f, т. е. будем считать, что потенциал точки $\varphi_f = 0$. Далее определим значение ЭДС E^*, при действии которой ток I_7 будет равен некоторому значению, например $I_7^* = 1$ А. Это можно сделать так:

$$\varphi_d = (R_7 + R_8) I_7^* = (24 + 16)1 = 40 \text{ В}; \qquad I_6^* = \frac{\varphi_d}{R_6} = \frac{40}{40} = 1 \text{ А};$$

$$I_5^* = I_6^* + I_7^* = 1 + 1 = 2 \text{ А}; \qquad \varphi_c = \varphi_d + R_5 I_5^* = 40 + 10 \cdot 2 = 60 \text{ В};$$

$$I_4^* = \frac{\varphi_c}{R_4} = \frac{60}{40} = 1{,}5 \text{ А}; \qquad I_3^* = I_4^* + I_5^* = 1{,}5 + 2 = 3{,}5 \text{ А};$$

$$\varphi_b = \varphi_c + R_3 I_3^* = 60 + 40 \cdot 3{,}5 = 200 \text{ В}; \qquad I_2^* = \frac{\varphi_b}{R_2} = \frac{200}{80} = 2{,}5 \text{ А};$$

$$I_1^* = I_2^* + I_3^* = 2{,}5 + 3{,}5 = 6 \text{ А}; \quad \varphi_a = \varphi_b + R_1 I_1^* = 200 + 8 \cdot 6 = 248 \text{ В} = E^*.$$

Исходное значение ЭДС источника $E = 124$ В. Коэффициент пропорциональности $k = \dfrac{E}{E^*} = \dfrac{124}{248} = 0{,}5$. Следовательно, реальные токи в ветвях цепи окажутся меньше расчетных в 2 раза, т. е.

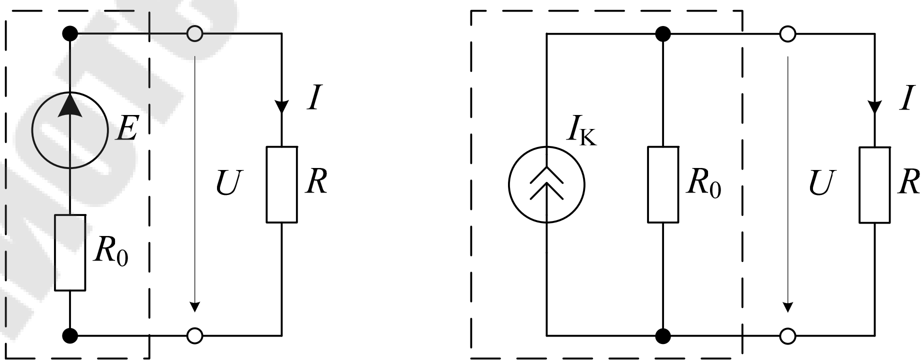
$$I_1 = kI_1^* = 0{,}5 \cdot 6 = 3 \text{ А}; \qquad I_2 = kI_2^* = 0{,}5 \cdot 2{,}5 = 1{,}25 \text{ А};$$

$$I_3 = kI_3^* = 0{,}5 \cdot 3{,}5 = 1{,}75 \text{ А}; \qquad I_4 = kI_4^* = 0{,}5 \cdot 1{,}5 = 0{,}75 \text{ А};$$

$$I_5 = kI_5^* = 0{,}5 \cdot 2 = 1 \text{ А}; \qquad I_6 = kI_6^* = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 \text{ А};$$

$$I_7 = kI_7^* = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 \text{ А}.$$

Задача 1.7. Напряжение холостого хода на зажимах реального источника энергии $U_{\text{хх}} = 20$ В; ток короткого замыкания $I_{\text{кз}} = 50$ А и сопротивление внешней цепи $R = 9{,}6$ Ом. Необходимо: 1) определить параметры двух схем замещения источника энергии: с идеальным источником ЭДС (рис. 1.6, *а*) и с идеальным источником тока (рис. 1.6, *б*); 2) для каждой из схем замещения рассчитать напряжение и ток в приемнике R, а также составить уравнение баланса мощностей.



а) *б*)

Рис. 1.6

Решение.

1. Величина ЭДС эквивалентного источника равна напряжению холостого хода, т. е.

$$E = U_{\text{хх}} = 20 \text{ В}.$$

Внутреннее сопротивление, включенное последовательно с источником ЭДС:

$$R_0 = \frac{E}{I_{\text{кз}}} = \frac{20}{50} = 0{,}4 \text{ Ом}.$$

В эквивалентной схеме замещения (рис. 1.6, *б*) ток источника J и проводимость $G_{\text{о}}$ с учетом (11) будут равны:

$$J = \frac{E}{R_0} = \frac{20}{0{,}4} = 50 \text{ А}, \quad G_0 = \frac{1}{R_0} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5 \text{ См}.$$

2. Ток и напряжение внешней цепи в соответствии:

– с последовательной схемой замещения:

$$I = \frac{E}{R_0 + R} = \frac{20}{0{,}4 + 9{,}6} = 2 \text{ А}; \quad U = RI = 9{,}6 \cdot 2 = 19{,}2 \text{ В};$$

– с параллельной схемой замещения:

$$U = J\frac{R_0 R}{R_0 + R} = 50\frac{0{,}4 \cdot 9{,}6}{0{,}4 + 9{,}6} = 19{,}2 \text{ В}; \quad I = \frac{U}{R} = \frac{19{,}2}{9{,}6} = 2 \text{ А}.$$

3. Уравнение баланса мощностей:

– в схеме замещения с источником ЭДС

$$EI = R_0 I^2 + UI \quad \Rightarrow \quad 40 \text{ Вт} = 1{,}6 + 38{,}4 \text{ Вт};$$

– в схеме замещения с источником тока

$$UJ = \frac{U^2}{R_0 + UI} \;\Rightarrow\; 960 \text{ Вт} = 921{,}6 + 38{,}4 \text{ Вт}.$$

Анализ п. 2 и 3 свидетельствует о том, что приведенные схемы замещения эквивалентны по отношению к режиму работы внешней цепи и не эквивалентны по потерям мощности в источниках.

Задача 1.8. В неразветвленной цепи (рис. 1.7) ЭДС $E_1 = 120$ В, $E_2 = 40$ В, сопротивления $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 8$ Ом. Определить напряжение между точками a и b.

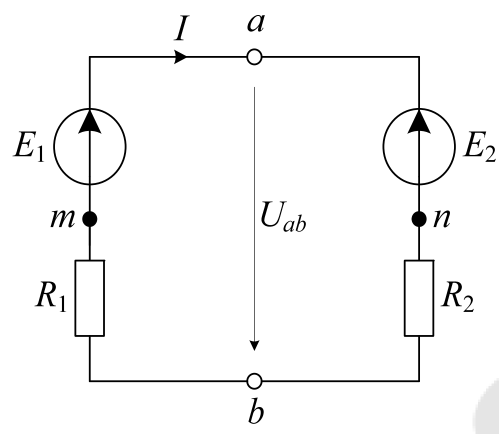


Рис. 1.7

Решение. Задавшись положительным направлением тока по часовой стрелке, его величину можно определить по закону Ома в виде:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = \frac{120 - 40}{12 + 8} = 4\,\text{А}.$$

Так как результат оказался положительным, то истинное направление тока совпадает с выбранным. Напряжение между точками a и b можно определить по обобщенному закону Ома применительно к участку *amb*:

$$I = \frac{(-U_{ab} + E_1)}{R_1} \text{ или } U_{ab} = E_1 - R_1 I_1 = 120 - 12 \cdot 4 = 72 \text{ В}.$$

Такой же результат можно получить, если применить ту же формулу к участку *anb*:

$$I = \frac{(U_{ab} - E_2)}{R_2} \text{или } U_{ab} = E_2 + R_2 I = 40 + 8 \cdot 4 = 72 \text{ В}$$

и, следовательно, $U_{ab} = 72\,\text{В}$.

Замечание. Если на участке цепи, содержащем ЭДС и сопротивление, ток и ЭДС совпадают по направлению, то напряжение на зажимах участка меньше ЭДС на величину падения напряжения на сопротивлении участка. Если же направление тока противоположно направлению ЭДС, то напряжение на зажимах участка больше ЭДС на величину падения напряжения на сопротивлении участка.

Задача 1.9. Питание приемника осуществляется от двух параллельно включенных генераторов (рис. 1.8). ЭДС и внутреннее сопротивление каждого генератора соответственно равны: $E_1 = 230$ В, $R_{01} = 5$ Ом, $E_2 = 200$ В, $R_{02} = 2{,}5$ Ом. Определить напряжение на зажимах генераторов и ток в каждом из них, если общий ток приемника $I = 18$ А. Рассчитать коэффициент полезного действия энергетической установки.

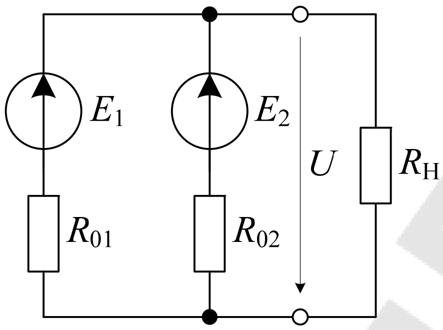


Рис. 1.8

Решение. Уравнения, составленные по законам Кирхгофа и описывающие режим работы энергетической установки, имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &I_1 + I_2 = I = 18; \\ &U = E_1 - R_{01}I_1 = 230 - 5I_1; \\ &U = E_2 - R_{02}I_2 = 200 - 2{,}5I_2. \end{aligned}\right\}$$

Решив систему уравнений, получим:

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2 + R_{02}I}{R_{01} + R_{02}} = \frac{230 - 200 + 2{,}5 \cdot 18}{5 + 2{,}5} = 10 \text{ А};$$

$$I_2 = I - I_1 = 18 - 10 = 8 \text{ А}; \quad U = E_1 - R_{01}I_1 = 230 - 5 \cdot 10 = 180 \text{ В}.$$

Мощность, развиваемая генераторами:

$$P = P_1 + P_2 = E_1I_1 + E_2I_2 = 230 \cdot 10 + 200 \cdot 8 = 3900 \text{ Вт}.$$

Мощность, потребляемая приемником:

$$P_{\text{пр}} = UI = 180 \cdot 18 = 3240 \text{ Вт}.$$

Коэффициент полезного действия установки

$$\eta = \frac{P_{\text{пр}}}{P}100\,\% = \frac{3240}{3900}100\,\% = 83\,\%.$$

Задача 1.10. Напряжение на входе цепи (рис. 1.9) U = 200 В, а потребляемая цепью мощность P = 400 Вт. Определить сопротивление $R_х$, если R_1 = 100 Ом, R_2 = 75 Ом, R_3 = R_3 = 50 Ом.

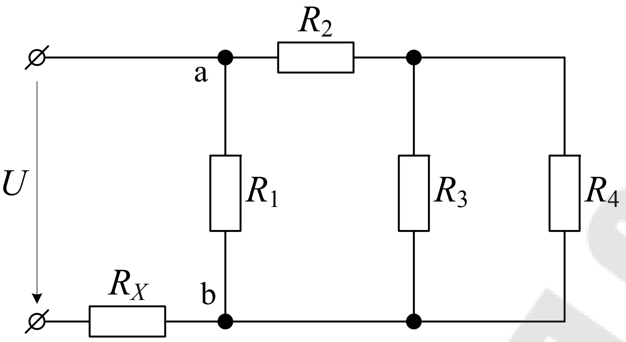


Рис. 1.9

Решение. Участок цепи относительно узлов a и b представляет собой параллельное соединение двух ветвей. Сопротивление одной из них $R_1 = 100$ Ом. Сопротивление второй ветви

$$R_{234} = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 75 + \frac{50 \cdot 50}{50 + 50} = 100 \text{ Ом.}$$

Следовательно, эквивалентное сопротивление участка

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_{234}}{R_1 + R_{234}} = \frac{100 \cdot 100}{100 + 100} = 50 \text{ Ом.}$$

Ток, протекающий в сопротивлениях $R_х$ и R_{ab}, соединенных последовательно, равен:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{400}{200} = 2 \text{ А.}$$

Мощность, потребляемая эквивалентным сопротивлением R_{ab}:

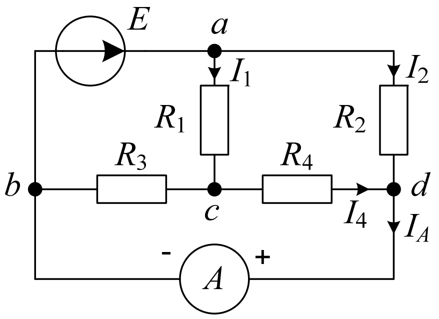
$$P_{ab} = R_{ab} I^2 = 50 \cdot 2^2 = 200 \text{ Вт.}$$

Следовательно, остальные 200 Вт выделяются в резисторе $R_х$, сопротивление которого

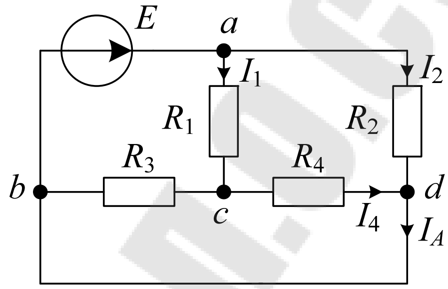
$$R_х = \frac{200}{I^2} = \frac{200}{2^2} = 50 \text{ Ом.}$$

Задача 1.11. Найти показание магнитоэлектрического амперметра в цепи (рис. 1.10, *а*), где $E = 120$ В, $R_1 = R_3 = 20$ Ом, $R_2 = R_4 = 30$ Ом.

Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением амперметра можно пренебречь.



а)



б)

Рис. 1.10

Решение. Поскольку сопротивление амперметра пренебрежимо мало, потенциалы точек b и d (рис. 1.10, *б*) одинаковы. Следовательно, по отношению к зажимам источника ЭДС a и b пассивную часть цепи можно рассматривать как параллельное соединение двух ветвей.

Сопротивление одной из них $R_2 = 30$ Ом.

Вторая ветвь представляет собой смешанное соединение сопротивлений R_1, R_3 и R_4. Эквивалентное сопротивление этой ветви

$$R_{ab} = R_{134} = R_1 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 20 + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 32 \text{ Ом}.$$

Наносим стрелки условных положительных направлений токов I_1, I_2, I_4 и I_A, которые, очевидно, совпадают с их действительными направлениями.

По закону Ома:

$$I_1 = \frac{E}{R_{ab}} = \frac{120}{32} = 3{,}75 \text{ А}; \qquad I_2 = \frac{E}{R_2} = \frac{120}{30} = 4 \text{ А}.$$

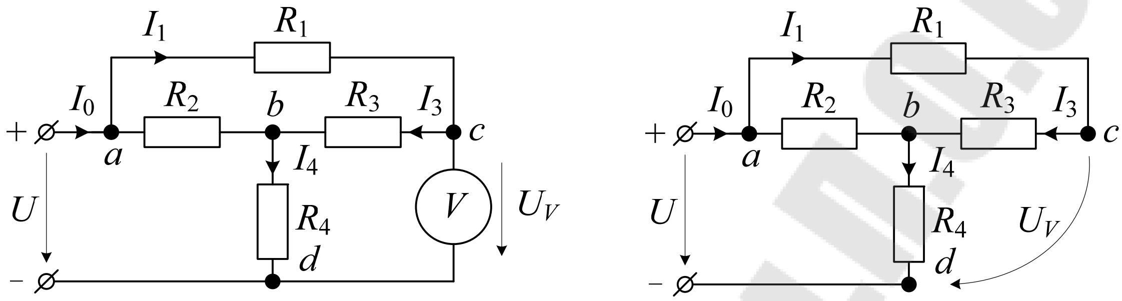
По формуле разброса:

$$I_4 = I_1 \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 3{,}75 \frac{20}{20 + 30} = 1{,}5 \text{ А}.$$

Наконец, по первому закону Кирхгофа:

$$I_A = I_2 + I_4 = 4 + 1{,}5 = 5{,}5 \text{ А}.$$

Задача 1.12. В цепи (рис. 1.11, *а*) $U = 64$ В, $R_1 = R_2 = R_4 = 10$ Ом, $R_3 = 5$ Ом. Определить показание магнитоэлектрического вольтметра, считая его сопротивление равным бесконечности.



а) *б*)

Рис. 1.11

Решение. Так как сопротивление вольтметра $R_V \approx \infty$, связь между точками c и d цепи отсутствует, т. е. потенциалы этих точек различны.

Для определения $U_V = U_{cd}$ размыкаем ветвь с вольтметром и рассчитаем токи I_3 и I_4 (рис. 1.11, *б*), положительные направления которых совпадают с направлениями реальных токов в сопротивлениях R_3 и R_4.

По отношению к зажимам источника напряжения цепь, приведенная на рис. 1.11, *б*, представляет собой смешанное соединение сопротивлений, в котором

$$R_{ad} = R_4 + R_{ab} = R_4 + \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_2 + R_1 + R_3} = 10 + \frac{10(10+5)}{10+10+5} = 16 \text{ Ом}.$$

Ток I_4, равный току источника, определим по закону Ома:

$$I_4 = \frac{U}{R_{ad}} = \frac{64}{16} = 4 \text{ А}.$$

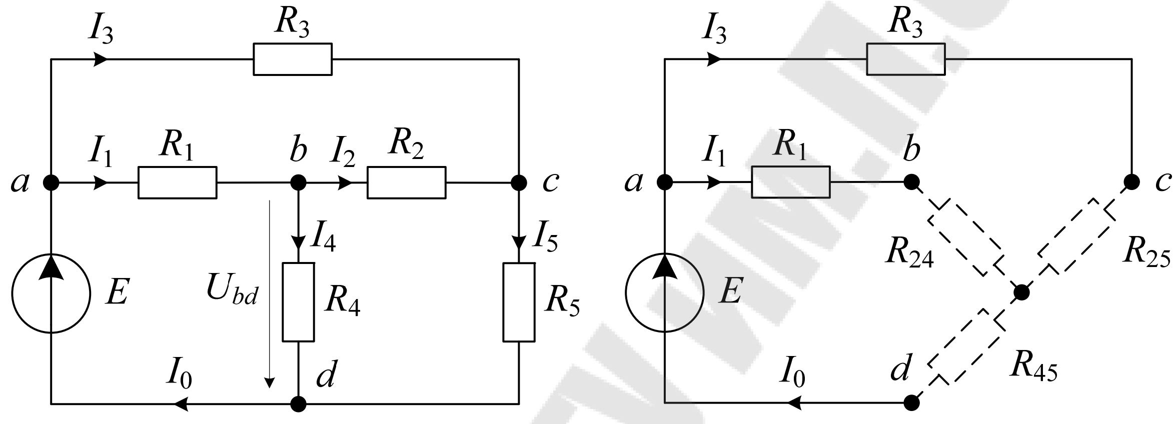
Ток I_3 в одной из параллельных ветвей рассчитаем по формуле разброса, т. е.

$$I_3 = I_4 \frac{R_2}{R_2 + R_1 + R_3} = 4\frac{10}{10+10+5} = 1{,}6 \text{ А}.$$

Наконец, согласно второму закону Кирхгофа:

$$U_V = U_{cd} = R_3 I_3 + R_4 I_4 = 5 \cdot 1{,}6 + 10 \cdot 4 = 48 \text{ В}.$$

Задача 1.13. В цепи (рис. 1.12, *а*) ЭДС $E = 46$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 6{,}5$ Ом, $R_4 = 6$ Ом, $R_5 = 9$ Ом. Определить токи в ветвях цепи. Составить баланс мощностей.



а) *б*)

Рис. 1.12

Решение. Для решения задачи возможно использовать метод эквивалентного генератора либо преобразовать треугольник сопротивлений R_2, R_4 и R_5 в эквивалентную звезду сопротивлений R_{24}, R_{25} и R_{45}:

$$R_{24} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{3 \cdot 6}{3+6+9} = 1 \text{ Ом}; \; R_{25} = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{3 \cdot 9}{18} = 1{,}5 \text{ Ом};$$

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{6 \cdot 9}{18} = 3 \text{ Ом}.$$

Эквивалентная схема, полученная после преобразования, представляет собой смешанное соединение сопротивлений (рис. 1.12, *б*), эквивалентное сопротивление которого

$$R_{\text{экв}} = \frac{(R_1 + R_{24})(R_3 + R_{25})}{R_1 + R_{24} + R_3 + R_{25}} + R_{45} = \frac{(1+1)(6{,}5+1{,}5)}{1+1+6{,}5+1{,}5} + 3 = 4{,}6 \text{ Ом}.$$

Ток в неразветвленной части цепи I_0 :

$$I_0 = \frac{E}{R_{\text{экв}}} = \frac{46}{4{,}6} = 10 \text{ А}.$$

Токи в параллельных ветвях могут быть определены по формулам разброса:

$$I_1 = I_0 \frac{R_3 + R_{25}}{R_3 + R_{25} + R_1 + R_{24}} = 10 \frac{6{,}5 + 1{,}5}{6{,}5 + 1{,}5 + 1 + 1} = 8 \text{ А};$$

$$I_3 = I_0 \frac{R_1 + R_{24}}{R_1 + R_{24} + R_3 + R_{25}} = 10 \frac{1+1}{10} = 2 \text{ А}.$$

Для определения тока в сопротивлении R_4 предварительно найдем напряжение между точками b и d по второму закону Кирхгофа:

$$U_{bd} = E - U_{ab} = E - R_1 I_1 = 46 - 1 \cdot 10 = 36 \text{ В}.$$

Тогда ток I_4 по закону Ома будет равен:

$$I_4 = \frac{U_{bd}}{R_4} = \frac{36}{6} = 6 \text{ А}.$$

Остальные токи I_2 и I_5 определим по первому закону Кирхгофа из узлов b и c:

$$I_2 = I_1 - I_4 = 8 - 6 = 2 \text{ А}; \quad I_5 = I_2 + I_3 = 2 + 2 = 4 \text{ А}.$$

Правильность решения задачи можно проверить путем составления баланса мощностей:

– мощность источника электрической энергии

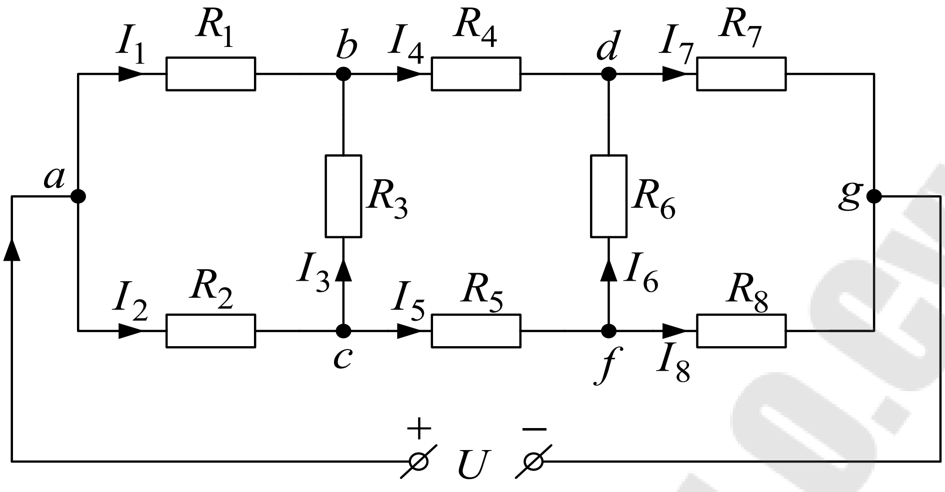
$$P_E = EI_0 = 46 \cdot 10 = 460 \text{ Вт};$$

– суммарная мощность пассивных элементов цепи

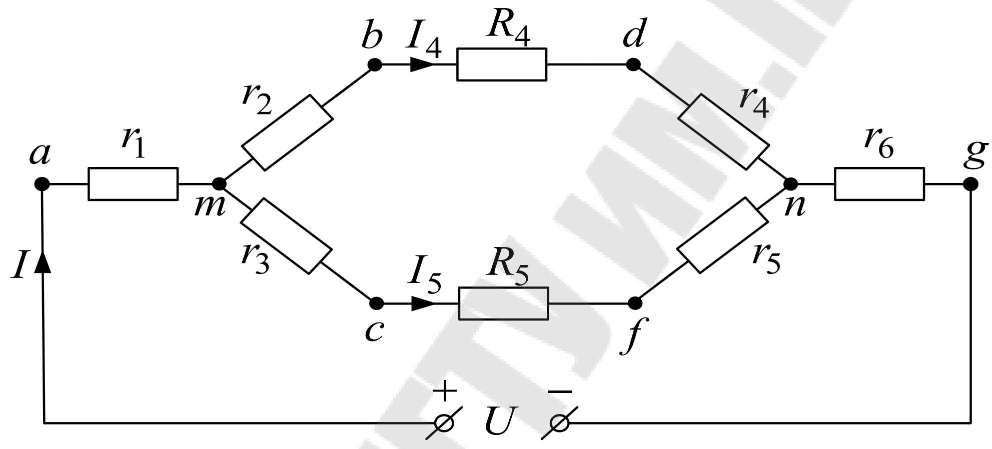
$$P_{\text{пр}} = \sum_k R_k I_k^2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 I_5^2 =$$

$$= 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 2^2 + 6{,}5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 6^2 + 9 \cdot 4^2 = 460 \text{ Вт}.$$

Задача 1.14. Определить входное сопротивление электрической цепи (рис. 1.13, *а*) и все токи в ней, если $U = 114$ В, $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = R_3 = 10$ Ом, $R_4 = 26$ Ом, $R_5 = 11$ Ом, $R_6 = 10$ Ом, $R_7 = 40$ Ом, $R_8 = 50$ Ом.



а)



б)

Рис. 1.13

Решение. Заменим эквивалентными звездами треугольники сопротивлений с вершинами в узлах *abc* и *dfg* (рис. 1.13, *а*). Подсчитаем сопротивления r_1, r_2, r_3 лучей звезды, эквивалентной треугольнику *abc* сопротивлений R_1, R_2, R_3:

$$r_1 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 10}{30 + 10 + 10} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_2 = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{30 \cdot 10}{30 + 10 + 10} = 6 \text{ Ом};$$

$$r_3 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 10}{30 + 10 + 10} = 2 \text{ Ом}.$$

Определим сопротивления r_4, r_5, r_6 лучей звезды, эквивалентной треугольнику *dfg* сопротивлений R_6, R_7, R_8:

$$r_4 = \frac{R_6 R_7}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{10 \cdot 40}{10 + 40 + 50} = 4 \text{ Ом};$$

$$r_5 = \frac{R_6 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{10 \cdot 50}{10 + 40 + 50} = 5 \text{ Ом};$$

$$r_6 = \frac{R_7 R_8}{R_6 + R_7 + R_8} = \frac{40 \cdot 50}{10 + 40 + 50} = 20 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи (рис. 1.13, *б*):

$$R = r_1 + \frac{R' R''}{R' + R''} + r_6 = 6 + \frac{36 \cdot 18}{36 + 18} + 20 = 38 \text{ Ом},$$

где

$$R' = r_2 + R_4 + r_4 = 36 \text{ Ом}; \; R'' = r_3 + R_5 + r_5 = 18 \text{ Ом}.$$

После преобразования в схеме сохранились неизменными значения токов I, I_4 и I_5 тех участков схемы, которые не подвергались преобразованию. Ток в неразветвленной части схемы:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{114}{38} = 3 \text{ А}.$$

Токи в параллельных ветвях:

$$I_4 = I \frac{R''}{R' + R''} = 3 \frac{18}{36 + 18} = 1 \text{ А}; \quad I_5 = I \frac{R'}{R' + R''} = I - I_4 = 2 \text{ А}.$$

Теперь найдем токи в ветвях, подвергшихся преобразованию. Для этого, воспользовавшись законом Ома и вторым законом Кирхгофа, по схеме рис. 1.13, *б* определим напряжения между точками *a* и *b*, *a* и *c*, *c* и *b*, *d* и *g*, *f* и *g*, *f* и *d*:

$$U_{ab} = r_1 I + r_2 I_4 = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 24 \text{ В};$$

$$U_{ac} = r_1 I + r_3 I_5 = 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 22 \text{ В};$$

$$U_{cb} = U_{ab} - U_{ac} = 24 - 22 = 2 \text{ В};$$

$$U_{dg} = r_4 I_4 + r_6 I = 4 \cdot 1 + 20 \cdot 3 = 64 \text{ В};$$

$$U_{fg} = r_5 I_5 + r_6 I = 5 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = 70 \text{ В};$$

$$U_{fd} = U_{fg} - U_{dg} = 70 - 64 = 6 \text{ В}.$$

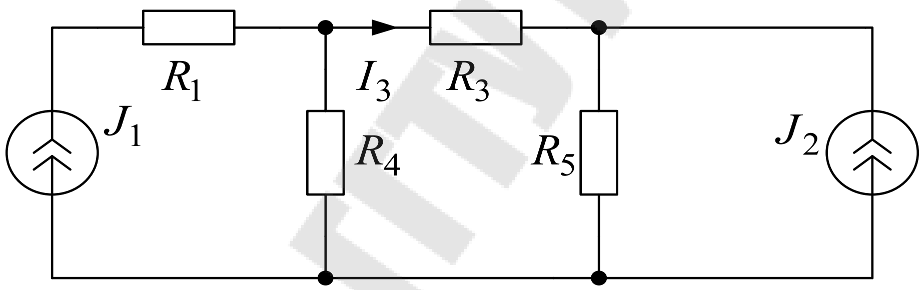
Искомые токи по закону Ома будут равны:

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1} = \frac{24}{30} = 0{,}8 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{U_{ac}}{R_2} = \frac{22}{10} = 2{,}2 \text{ А};$$

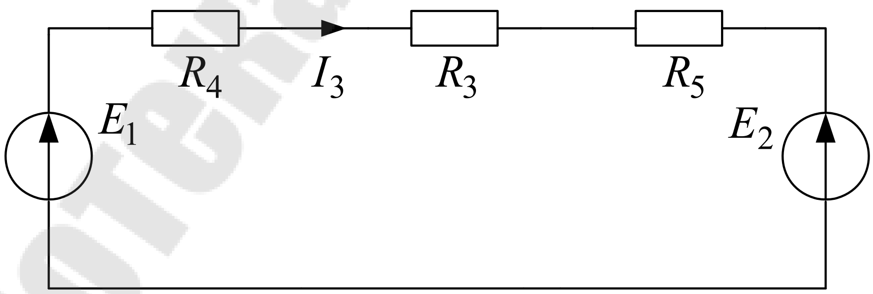
$$I_3 = \frac{U_{cb}}{R_3} = \frac{2}{10} = 0{,}2 \text{ А}; \quad I_6 = \frac{U_{fd}}{R_6} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ А};$$

$$I_7 = \frac{U_{dg}}{R_7} = \frac{64}{40} = 1{,}6 \text{ А}; \quad I_8 = \frac{U_{fg}}{R_8} = \frac{70}{50} = 1{,}4 \text{ А}.$$

Задача 1.15. Определить ток и мощность потерь в резисторе с сопротивлением R_3 = 3 Ом (рис. 1.14, *а*), если R_1 = 10 Ом, R_4 = 5 Ом, R_5 = 2 Ом, J_1 = 20 А, J_2 = 20 А.



а)



б)

Рис. 1.14

Решение. Преобразуем источники тока J_1 и J_2 в эквивалентные источники ЭДС (рис. 1.14, *б*).

Значения ЭДС эквивалентных источников:

$$E_1 = R_4 J_1 = 5 \cdot 20 = 100 \text{ В}; \quad E_2 = R_5 J_2 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ В}.$$

Ток и мощность потерь в исследуемом резисторе:

$$I_3 = \frac{E_1 - E_2}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{100 - 40}{3 + 5 + 2} = 6 \text{ А}; \quad P_3 = R_3 I_3^2 = 3 \cdot 6^2 = 108 \text{ Вт}.$$

1.2. Расчет электрических цепей на основе законов Кирхгофа

Задача 1.16. В цепи (рис. 1.15) $E_1 = 30$ В, $E_2 = 10$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 8$ Ом (внутренними сопротивлениями источников ЭДС пренебречь). Определить токи в ветвях цепи с помощью непосредственного использования законов Кирхгофа. Составить баланс мощностей. Определить режим работы каждого источника.

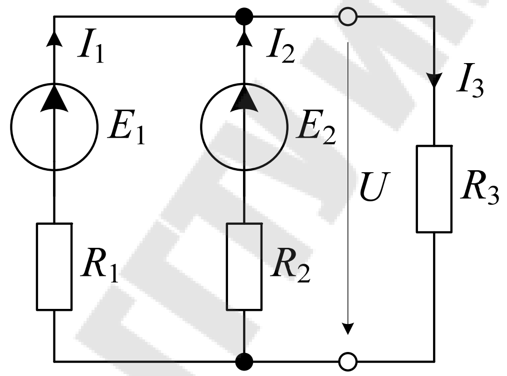


Рис. 1.15

Решение. Произвольно обозначим условные положительные направления токов в ветвях цепи. Общее число уравнений, составляемых по законам Кирхгофа, должно быть равно числу неизвестных токов, и, следовательно, числу ветвей цепи m.

Если в схеме имеется n узлов, то по первому закону Кирхгофа необходимо составлять $n-1$ уравнений. Остальные $m-(n-1)$ уравнений записывают по второму закону Кирхгофа.

Система уравнений для заданной цепи примет вид:

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1 - E_2; \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 = E_2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0; \\ 10 I_1 - 2 I_2 = 30 - 10 = 20; \\ 2 I_2 + 8 I_3 = 10. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений с помощью определителей по формулам Крамера, получим:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-320}{-116} \approx 2{,}76 \text{ А}; \; I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{140}{-116} \approx -1{,}21 \text{ А}; \; I_3 = \frac{-180}{-116} = 1{,}55 \text{ А}.$$

Составим баланс мощностей:

– суммарная мощность источников энергии

$$P_{\text{ист}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 = 30 \cdot 2{,}76 + 10(-1{,}21) = 110{,}4 - 12{,}1 \approx 98{,}3 \text{ Вт}.$$

– суммарная мощность приемников

$$P_{\text{пр}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 10 \cdot 2{,}76^2 + 2(-1{,}21)^2 + 8 \cdot 1{,}55^2 \approx 98{,}3 \text{ Вт}.$$

Анализ рассчитанных значений токов и баланс мощностей свидетельствуют о том, что источник ЭДС E_1 работает как источник, а источник ЭДС E_2 – как потребитель электрической энергии.

Задача 1.17. В цепи (рис. 1.16) $E_1 = 25$ В, $E_2 = 10$ В, $J = 1{,}5$ А, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 8$ Ом. Определить токи в ветвях, составив уравнения по законам Кирхгофа. Проверить правильность расчета с помощью баланса мощностей.

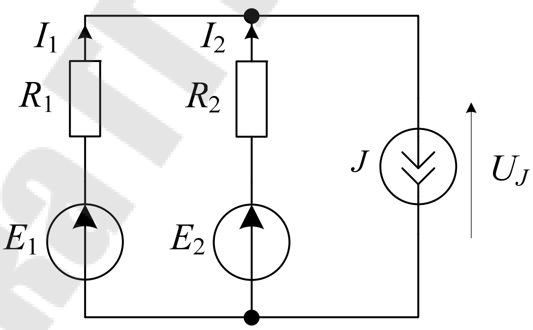


Рис. 1.16

Решение. Выбрав положительные направления токов в ветвях с ЭДС E_1 и E_2, составим уравнение по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 = J.$$

По второму закону Кирхгофа уравнение следует составлять для контура, в который не входит ветвь с источником тока J, так как падение напряжения на его зажимах пока неизвестно:

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1 - E_2.$$

После подстановки исходных данных система примет вид:

$$\left.\begin{aligned} I_1 + \ \ I_2 &= \ 1{,}5, \\ 5I_1 - 8I_2 &= 30, \end{aligned}\right\}$$

откуда определяются значения токов: $I_1 \approx 2{,}08$ А и $I_2 \approx -0{,}58$ А.

Падение напряжения на источнике тока, условное положительное направление которого указано на рис. 1.16, будет равно:

$$U_J = -E_2 + R_2 I_2 = -10 + 8(-0{,}58) = -14{,}64 \text{ В}.$$

Баланс мощностей:

– суммарная мощность источников энергии

$$P_{\text{ист}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 + U_J J = 25 \cdot 2{,}08 + 10(-0{,}58) + (-14{,}64)1{,}5 =$$

$$= 52 + (-5{,}8) + (-22) = 24{,}2 \text{ Вт};$$

– суммарная мощность потребителей

$$P_{\text{пр}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = 5 \cdot 2{,}08^2 + 8(-0{,}58)^2 \approx 24{,}3 \text{ Вт}.$$

Из расчета баланса мощностей следует, что источник ЭДС E_1 работает как источник, а источники ЭДС E_2 и тока J – как приемники.

Задача 1.18. В цепи (рис. 1.17) $E_1 = 120$ В, $E_4 = 6$ В, $E_5 = 80$ В, $R_1 = R_3 = R_4 = 2$ Ом, $R_2 = R_5 = 6$ Ом, $R_6 = 3$ Ом. Амперметр показывает 8 А. Определить токи в других ветвях, пользуясь законами Кирхгофа и Ома.

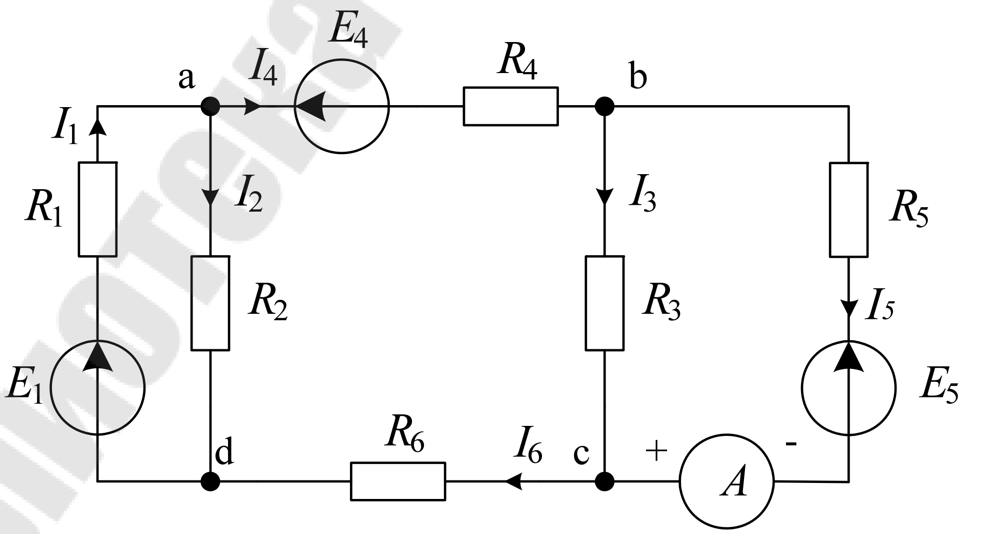


Рис. 1.17

Решение. Условие задачи позволяет получить ответ без составления системы уравнений.

Последовательно используя закон Ома и оба закона Кирхгофа, получим:

$$U_5 = R_5 I_A = 6 \cdot 8 = 48 \text{ В}.$$

С учетом выбранного положительного направления тока I_5:

$$R_5 I_5 + R_3 I_3 = E_5,$$

откуда

$$I_3 = \frac{E_5 - R_5 I_5}{R_3} = \frac{80 - 6 \cdot 8}{2} = 16 \text{ А}.$$

Далее на основании первого закона Кирхгофа для узла b:

$$I_4 = I_3 - I_A = 16 - 8 = 8 \text{ А}.$$

Снова, используя второй закон Кирхгофа для контура $abcda$ и учитывая, что $I_6 = I_4$, получим:

$$I_2 = \frac{(R_4 + R_6) I_4 + R_3 I_3 + E_4}{R_2} = \frac{(2+3)8 + 2 \cdot 16 + 6}{6} = \frac{78}{6} = 13 \text{ А}.$$

Наконец, на основании обобщенного закона Ома:

$$I_1 = \frac{E_1 - R_2 I_2}{R_1} = \frac{120 - 6 \cdot 13}{2} = 21 \text{ А}.$$

Задача 1.19. Найти токи в схеме (рис. 1.18) и составить баланс мощностей, если $E_1 = 15$ В, $E_2 = 70$ В, $E_3 = 5$ В, $r_1 = r_2 = 1$ Ом, $r_3 = 2$ Ом, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 8$ Ом, $R_4 = 2{,}5$ Ом, $R_5 = 15$ Ом.

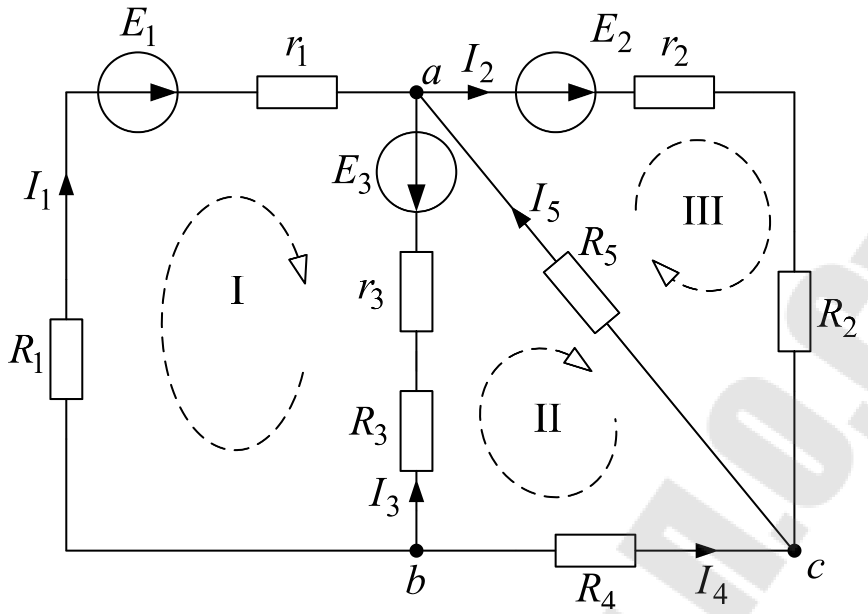


Рис. 1.18

Решение. Выберем и обозначим стрелками условные положительные направления токов и направления обхода трех независимых контуров I, II и III. Составим систему уравнений по законам Кирхгофа:

– для узла *a*: $-I_1 + I_2 - I_3 - I_5 = 0;$ (1.1)

– для узла *b*: $-I_1 + I_3 + I_4 = 0;$ (1.2)

– для контура I: $(R_1 + r_1)I_1 - (R_3 + r_3)I_3 = E_1 + E_3;$ (1.3)

– для контура II: $(R_3 + r_3)I_3 - R_4 I_4 - R_5 I_5 = -E_3;$ (1.4)

– для контура III: $(R_2 + r_2)I_2 + R_5 I_5 = E_2.$ (1.5)

После подстановки числовых значений уравнения (1.3)–(1.5) примут следующий вид:

$$6I_1 - 10I_3 = 20; \quad (1.3а)$$

$$10I_3 - 2{,}5I_4 - 15I_5 = -5; \quad (1.4а)$$

$$5I_2 + 15I_5 = 70. \quad (1.5а)$$

Решая систему уравнений (1.1), (1.2), (1.3а)–(1.5а), получим:

$$I_1 = 5 \text{ А}; \quad I_2 = 8 \text{ А}; \quad I_3 = 1 \text{ А}; \quad I_4 = -6 \text{ А}; \quad I_5 = 2 \text{ А}.$$

Баланс мощностей для рассматриваемой схемы:

$$E_1 I_1 + E_2 I_2 - E_3 I_3 = I_1^2 (R_1 + r_1) + I_2^2 (R_2 + r_2) + I_3^2 (R_3 + r_3) + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5,$$

или

$$15 \cdot 5 + 70 \cdot 8 - 5 \cdot 1 = 5^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 2{,}5 + 2^2 \cdot 15.$$

Имеем тождество: 630 Вт = 630 Вт.

Замечание. Рассмотренный в задачах 1.16, 1.17 и 1.19 порядок определения токов, основанный на непосредственном применении законов Кирхгофа, имеет существенный недостаток – рост числа уравнений с ростом числа ветвей цепи.

Все другие методы расчета и преобразования электрических цепей, рассмотренные далее, имеют перед собой основную задачу: уменьшить число решаемых уравнений и кратчайшим путем получить нужный результат. Однако и в основе этих методов лежат законы Ома и Кирхгофа, имеющие фундаментальное значение.

1.3. Метод контурных токов

Задача 1.20. Рассчитать токи в цепи (рис. 1.19), если E_1 = 100 В, E_2 = 30 В, E_3 = 10 В, E_4 = 6 В, R_1 = 10 Ом, R_2 = 10 Ом, R_4 = 6 Ом, R_5 = 5 Ом, R_6 = 15 Ом, r_4 = 1 Ом.

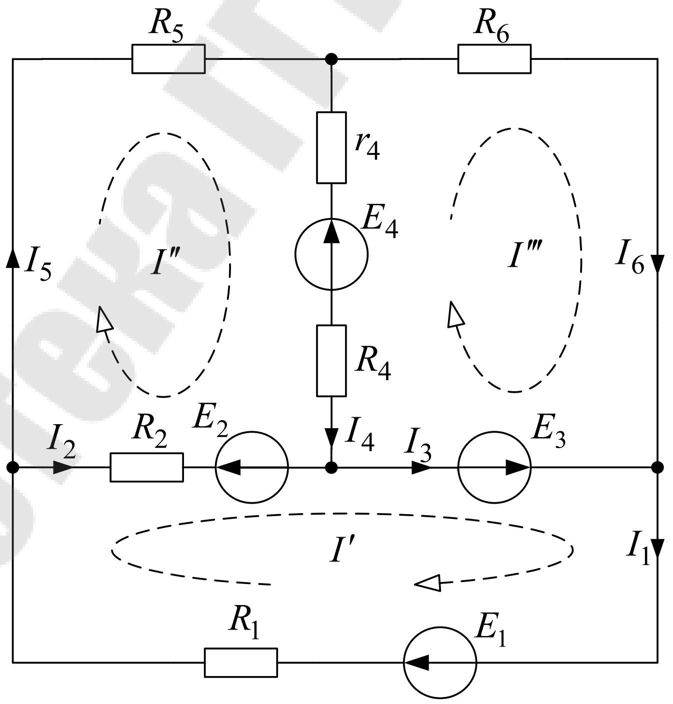


Рис. 1.19

Решение. Выберем направления контурных токов I', I'', I''', как показано на рис. 1.19.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)I' - R_2 I'' = E_1 - E_2 + E_3; \\ -R_2 I' + (R_2 + R_5 + R_4 + r_4)I'' - (R_4 + r_4)I''' = E_2 - E_4; \\ -(R_4 + r_4)I'' + (R_6 + R_4 + r_4)I''' = E_4 - E_3. \end{cases}$$

После подстановки числовых значений имеем:

$$20I' - 10I'' = 80;$$

$$-10I' + 21I'' - 7I''' = 24;$$

$$-7I'' + 22I''' = 16.$$

Решив эту систему уравнений, найдем контурные токи:

$$I' = 5 \text{ А}; \quad I'' = 4 \text{ А}; \quad I''' = 2 \text{ А}.$$

Ток I_1 имеет направление контурного тока I' и равен:

$$I_1 = I' = 5 \text{ А}.$$

Ток I_5 имеет направление контурного тока I'' и равен:

$$I_5 = I'' = 4 \text{ А}.$$

Ток I_2 создается наложением контурных токов I' и I'', имея направление большего контурного тока I':

$$I_2 = I' - I'' = 5 - 4 = 1 \text{ А}.$$

Ток I_4 создается наложением контурных токов I'' и I''', имея направление контурного тока I'':

$$I_4 = I'' - I''' = 4 - 2 = 2 \text{ А}.$$

Ток I_3 создается наложением контурных токов I' и I''', имея направление тока I':

$$I_3 = I' - I''' = 5 - 2 = 3 \text{ А}, \; I_6 = I''' = 2\text{А}.$$

Задача 1.21. Цепь (рис. 1.20) содержит источник ЭДС E = 60 В, источник тока J = 50 А и резисторы, сопротивления которых $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 16$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 8$ Ом.

Методом контурных токов рассчитать реальные токи в ветвях цепи. Составить баланс мощностей.

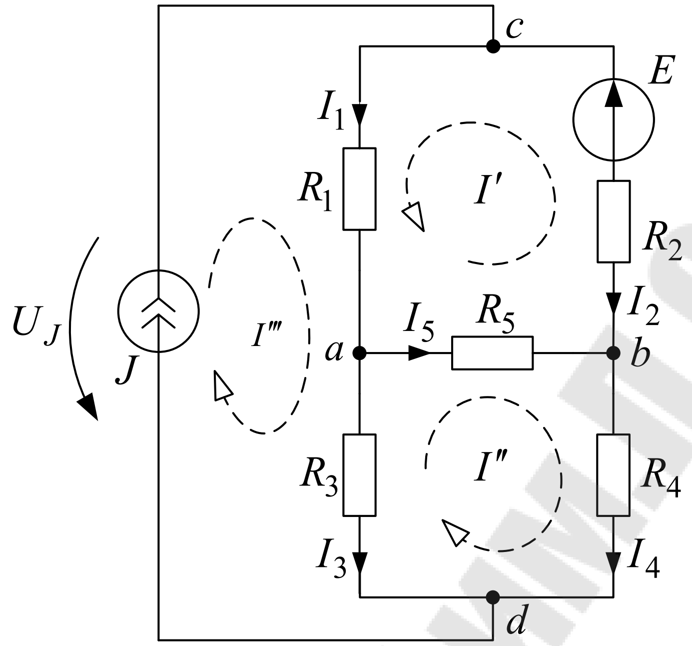


Рис. 1.20

Решение. Выберем направления контурных токов I', I'' и $I''' = J$, как показано на рис. 1.20. Составим систему уравнений для первого и второго контуров:

$$\begin{cases}(R_1 + R_2 + R_5)I' + R_5 I'' + R_1 J = E; \\ R_5 I' + (R_3 + R_4 + R_5)I'' - R_3 J = 0.\end{cases}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$17I' + 8I'' = -190; \qquad 8I' + 26I'' = 800.$$

Решая эти уравнения, найдем контурные токи:

$$I' = -30 \text{ A}; \quad I'' = 40 \text{ A}$$

и искомые реальные токи:

$$I_1 = I' + J = -30 + 50 = 20 \text{ A}; \quad I_2 = -I' = 30 \text{ A};$$

$$I_3 = -I'' + J = -40 + 50 = 10 \text{ A}; \quad I_4 = I'' = 40 \text{ A};$$

$$I_5 = I' + I'' = -30 + 40 = 10 \text{ A}.$$

Составим баланс мощностей:

$$P_{\text{ист}} = -EI_2 + U_J J; \quad P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5.$$

$$U_J = U_{cd} = R_1 I_1 + R_3 I_3 = 5 \cdot 20 + 16 \cdot 10 = 260 \text{ В}.$$

В итоге имеем тождество:

$$P_{\text{ист}} = -60 \cdot 30 + 260 \cdot 50 = 11200 \text{ Вт};$$

$$P_{\text{пр}} = 20^2 \cdot 5 + 30^2 \cdot 4 + 10^2 \cdot 16 + 40^2 \cdot 2 + 10^2 \cdot 8 = 11200 \text{ Вт}.$$

1.4. Метод узловых потенциалов

Задача 1.22. В цепи (рис. 1.21) рассчитать все токи методом узловых потенциалов, если $E_1 = 4$ В, $E_3 = 2$ В, $E_5 = 12$ В, $J_3 = 2$ А, $R_1' = R_1'' = 4$ Ом, $R_2 = R_3 = 2$ Ом, $R_4 = 8$ Ом, $R_5 = 1$ Ом.

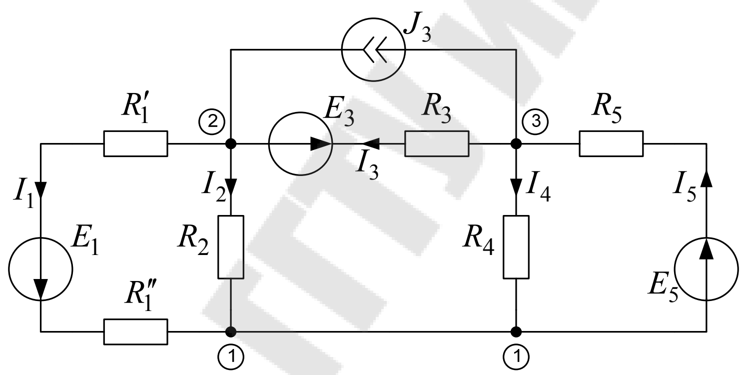


Рис. 1.21

Решение. Выберем положительные направления токов, как показано на рис. 1.21. Примем $\varphi_1 = 0$ и запишем уравнения для узлов 2 и 3:

$$\begin{cases} \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} = J_3 - \dfrac{E_1}{R_1' + R_1''} - \dfrac{E_3}{R_3}; \\ \varphi_3 G_{33} - \varphi_2 G_{23} = -J_3 + \dfrac{E_3}{R_3} + \dfrac{E_5}{R_5}, \end{cases}$$

где

$$G_{22} = \frac{1}{R_1' + R_1''} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1{,}125 \text{ См};$$

$$G_{23} = \frac{1}{R_3} = 0{,}5 \text{ См}; \quad G_{33} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + 1 = 1{,}625 \text{ См}.$$

Подставив численные значения, получим систему уравнений:

$$1{,}125\varphi_2 - 0{,}5\varphi_3 = 2 - 0{,}5 - 1;$$

$$-0{,}5\varphi_2 + 1{,}625\varphi_3 = -2 + 1 + 12,$$

решение которой позволяет определить потенциалы узлов 2 и 3:

$$\varphi_2 = 4 \text{ В}; \quad \varphi_3 = 8 \text{ В}.$$

Токи в ветвях определим по обобщенному закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{R_1' + R_1''} = \frac{4+4}{4+4} = 1 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 - E_3}{R_3} = \frac{8-4-2}{2} = 1 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} = \frac{8}{8} = 1 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 + E_5}{R_5} = \frac{0-8+12}{1} = 4 \text{ А}.$$

Задача 1.23. В цепи (рис. 1.22) $E_1 = 85$ В, $E_2 = 84$ В, $E_3 = 5$ В, $E_4 = 12$ В, $R_1 = 8$ Ом, $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 10$ Ом, $R_6 = 4$ Ом. Рассчитать токи в ветвях цепи методом узловых потенциалов.

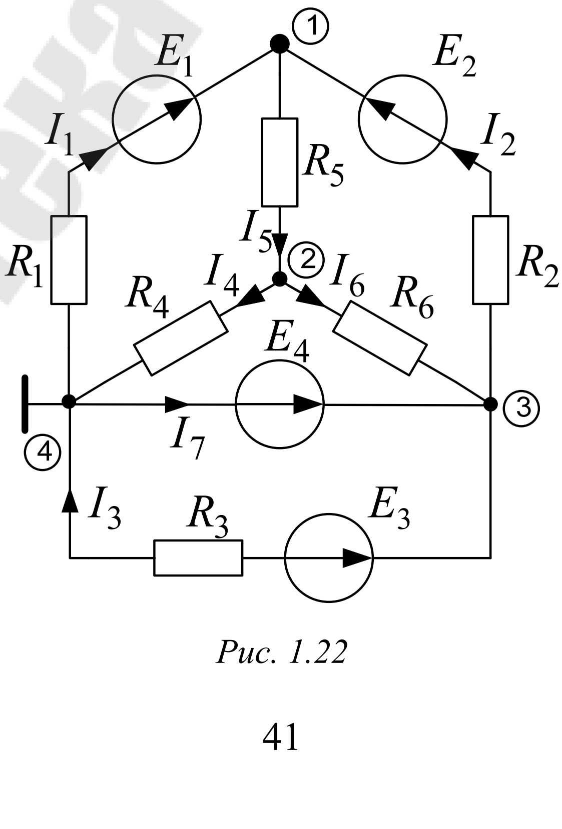


Рис. 1.22

Решение. Примем потенциал узла 4 равным нулю $(\varphi_4 = 0)$. Тогда потенциал узла 3 будет равен $\varphi_3 = E_4 = 12$ В, а система уравнений для определения потенциалов узлов 1 и 2 будет иметь вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \varphi_3 G_{13} = \dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2}; \\ -\varphi_1 G_{21} + \varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0{,}325 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = 0{,}45 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ См}; \quad G_{13} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{10} = 0{,}1 \text{ См};$$

$$G_{23} = \frac{1}{R_6} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ См}.$$

Подставляя эти значения, а также значения E_1, E_2, R_1 и R_2 в уравнения (1), получим:

$$\begin{cases} 0{,}325\varphi_1 - 0{,}1\varphi_2 - 0{,}1\varphi_3 = \dfrac{85}{85} + \dfrac{84}{10}; \\ -0{,}1\varphi_1 + 0{,}45\varphi_2 - 0{,}25\varphi_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$\varphi_1 = 69 \text{ В}; \quad \varphi_2 = 22 \text{ В}.$$

Используя обобщенный закон Ома, находим:

$$I_1 = \frac{\varphi_4 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = \frac{-69 + 85}{8} = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_2}{R_2} = \frac{12 - 69 + 84}{10} = 2{,}7 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 - E_3}{R_3} = \frac{12-5}{10} = 0{,}7 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_2 - \varphi_4}{R_4} = \frac{22}{10} = 2{,}2 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_5} = \frac{69-22}{10} = 4{,}7 \text{ А}; \qquad I_6 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_6} = \frac{22-12}{4} = 2{,}5 \text{ А}.$$

Ток I_7 не определяется по закону Ома. Он может быть вычислен с помощью первого закона Кирхгофа:

$$I_7 = I_3 + I_4 - I_1 = 0{,}7 + 2{,}2 - 2 = 0{,}9 \text{ А}.$$

Задача 1.24. Рассчитать все токи в схеме (рис. 1.23), если $E_1 = 160$ В, $E_2 = 100$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 150$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, $R_4 = 40$ Ом.

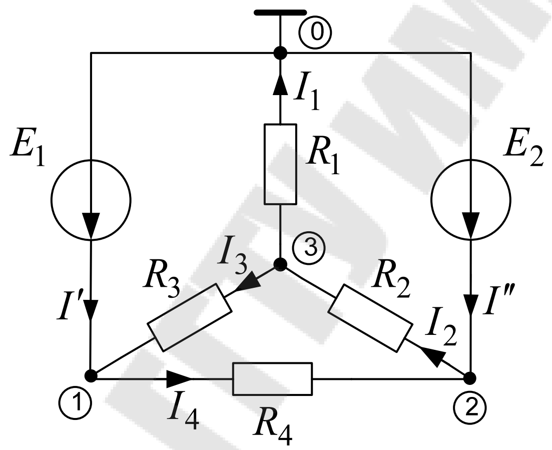


Рис. 1.23

Решение. В схеме две ветви с идеальными источниками ЭДС, имеющие общий узел. Заземлив его, можно сразу определить потенциалы узлов 1 и 2, ограничивающих эти ветви:

$$\varphi_0 = 0; \quad \varphi_1 = E_1 = 160 \text{ В}; \quad \varphi_2 = E_2 = 100 \text{ В}.$$

Неизвестным остается потенциал узла 3, для которого составляем уравнение

$$\varphi_3 G_{33} - \varphi_1 G_{31} - \varphi_2 G_{32} = 0, \qquad (1)$$

где

$$G_{33} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{100} + \frac{1}{150} + \frac{1}{100} = 0{,}0267 \text{ См};$$

$$G_{31} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ См}; \quad G_{32} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{150} = 0{,}0067 \text{ См}.$$

Решая уравнение (1), получим $\varphi_3 = 85$ В.

Токи $I_1 \div I_4$ находим по закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_3}{R_1} = \frac{85}{100} = 0{,}85 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{R_2} = \frac{100-85}{150} = 0{,}1 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_3} = \frac{85-160}{100} = -0{,}75 \text{ А}; \; I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_4} = \frac{160-100}{40} = 1{,}5 \text{ А}.$$

Токи в ветвях с идеальными источниками ЭДС находим по первому закону Кирхгофа:

$$I' = I_4 - I_3 = 1{,}5 - (-0{,}75) = 2{,}25 \text{ А};$$

$$I'' = I_2 - I_4 = 0{,}1 - 1{,}5 = -1{,}4 \text{ А}.$$

Полученные при расчете отрицательные значения токов I_3 и I_5 указывают на то, что истинные направления этих токов противоположны выбранным на рис. 1.23.

Задача 1.25. Методом узловых потенциалов рассчитать токи в цепи (рис. 1.24а), если E = 100 В, $E_2 = 10$ В, $E_5 = 40$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 10$ Ом.

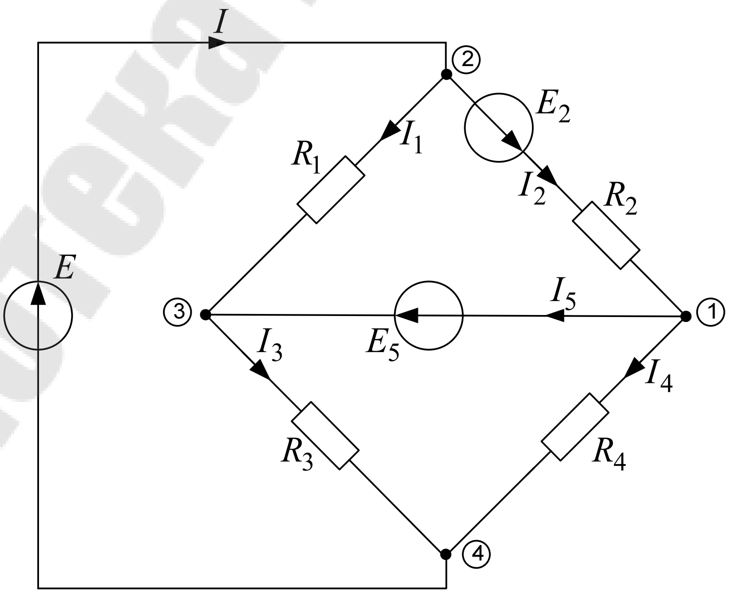


Рис. 1.24а

Решение. При составлении уравнений по методу узловых потенциалов для любого из узлов цепи в них войдут слагаемые, имеющие бесконечно большую проводимость.

Это затруднение можно обойти. Введение во все ветви, примыкающие к какому-либо узлу, одинаковых ЭДС, направленных к узлу (или от него), не влияет на распределение токов в схеме, так как в уравнениях, составленных по второму закону Кирхгофа для любого контура, эти ЭДС взаимно компенсируются.

Воспользовавшись этим, введем во все ветви, примыкающие, например, к узлу 1, ЭДС E', равные E_5 (рис. 1.24б).

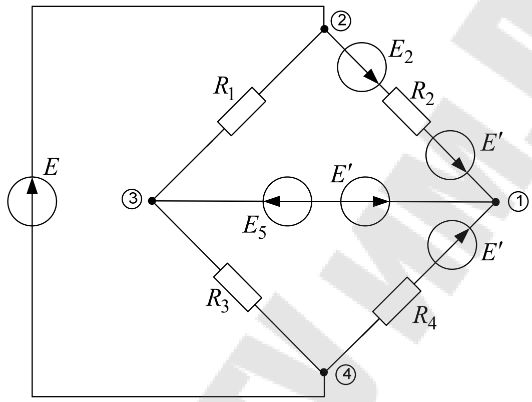


Рис. 1.24б

Тогда окажется, что в ветви 1–3 действуют две одинаковые и встречно направленные ЭДС. Их сумма равна нулю. Потенциалы точек 1 и 3 будут одинаковы и их можно объединить (рис. 1.24в).

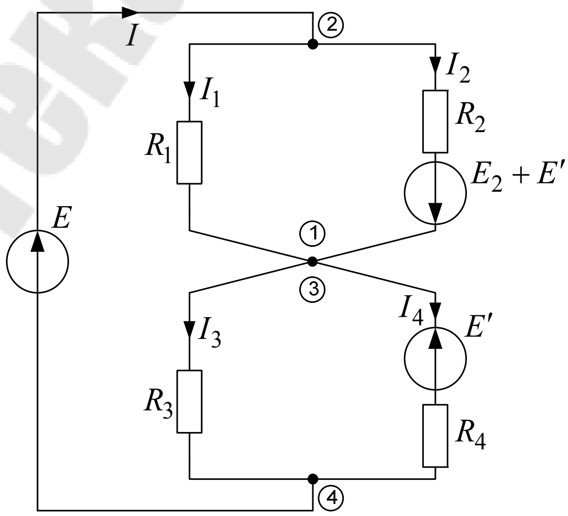


Рис. 1.24в

Полученная эквивалентная схема имеет три узла и одну ветвь, содержащую идеальный источник ЭДС E. Очевидно, для решения задачи методом узловых потенциалов необходимо составить всего одно уравнение.

Предварительно примем $\varphi_4 = 0$ В. Тогда $\varphi_2 = E = 100$ В, а уравнение для узла 1 примет следующий вид:

$$\varphi_1 G_{11} - \varphi_2 G_{12} - \varphi_4 G_{14} = (E_2 + E')\frac{1}{R_2} + E'\frac{1}{R_4}, \quad (1)$$

где

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0{,}233 \text{ См};$$

$$G_{12} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = 0{,}083 \text{ См};$$

$$G_{14} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = 0{,}15 \text{ См}.$$

После подстановки числовых значений уравнение для потенциала φ_1 примет вид:

$$0{,}233\varphi_1 - 0{,}083\varphi_2 - 0{,}15\varphi_4 = (10 + 40)\frac{1}{30} + 40\frac{1}{10}.$$

Решая это уравнение, получим: $\varphi_1 = 60$ В.

Токи в ветвях исходной схемы найдем по обобщенному закону Ома:

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{R_1} = \frac{100 - 60}{20} = 2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_2 + E'}{R_2} = \frac{100 - 60 + 10 + 40}{30} = 3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4}{R_3} = \frac{60 - 0}{20} = 3 \text{ А}; \quad I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_4 - E'}{R_4} = \frac{60 - 0 - 40}{10} = 2 \text{ А}.$$

Токи I и I_5 определим по первому закону Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 = 2 + 3 = 5 \text{ А}; \quad I_5 = I_2 - I_4 = 3 - 2 = 1 \text{ А}.$$

Задача 1.26. Методом узловых потенциалов рассчитать токи в цепи (рис. 1.25), если $E_1 = 10$ В, $E_2 = 20$ В, $E_3 = 30$ В, $J = 1$ А, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом, $R_4 = 40$ Ом, $R_5 = 50$ Ом.

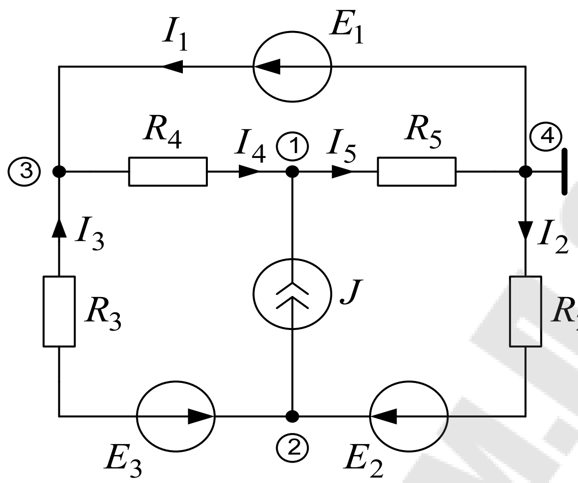


Рис. 1.25

Решение. Примем $\varphi_4 = 0$. Тогда $\varphi_3 = E_1 = 10$ В. Составим уравнения для неизвестных потенциалов φ_1 и φ_2:

$$\varphi_1 G_{11} - \varphi_3 G_{13} = J;$$

$$\varphi_2 G_{22} - \varphi_3 G_{23} = \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} - J,$$

где

$$G_{11} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{40} + \frac{1}{50} = 0{,}045 \text{ См}; \quad G_{13} = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{40} = 0{,}025 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = 0{,}083 \text{ См}; \quad G_{23} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{30} = 0{,}033 \text{ См}.$$

В обоих уравнениях для узловых потенциалов отсутствует слагаемое $-\varphi_2 G_{12}$, так как $G_{12} = 0$. После подстановки числовых значений уравнения примут вид:

$$\begin{cases} 0{,}045\varphi_1 - 0{,}025\varphi_3 = 1; \\ 0{,}083\varphi_2 - 0{,}033\varphi_3 = 1. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим: $\varphi_1 = 27{,}78$ В, $\varphi_2 = 16$ В.

Далее токи $I_2 – I_6$ определяем по обобщенному закону Ома:

$$I_2 = \frac{\varphi_4 - \varphi_2 + E_2}{R_2} = \frac{-16 + 20}{20} = 0{,}2 \text{ А};$$

$$\mathrm{I}_3 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 - E_3}{R_3} = \frac{16 - 10 - 30}{30} = -0{,}8 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{R_4} = \frac{10 - 27{,}78}{40} = -0{,}445 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{\varphi_1 - \varphi_4}{R_5} = \frac{27{,}78}{50} = 0{,}555 \text{ А},$$

а ток I_1 – по первому закону Кирхгофа:

$$I_1 = I_4 - I_3 = -0{,}445 + 0{,}8 = 0{,}355 \text{ А}.$$

1.5. Метод наложения

Задача 1.27. Определить токи во всех ветвях цепи (рис. 1.26, *а*), если E = 25 В, J = 12,5 А, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_н = 5$ Ом.

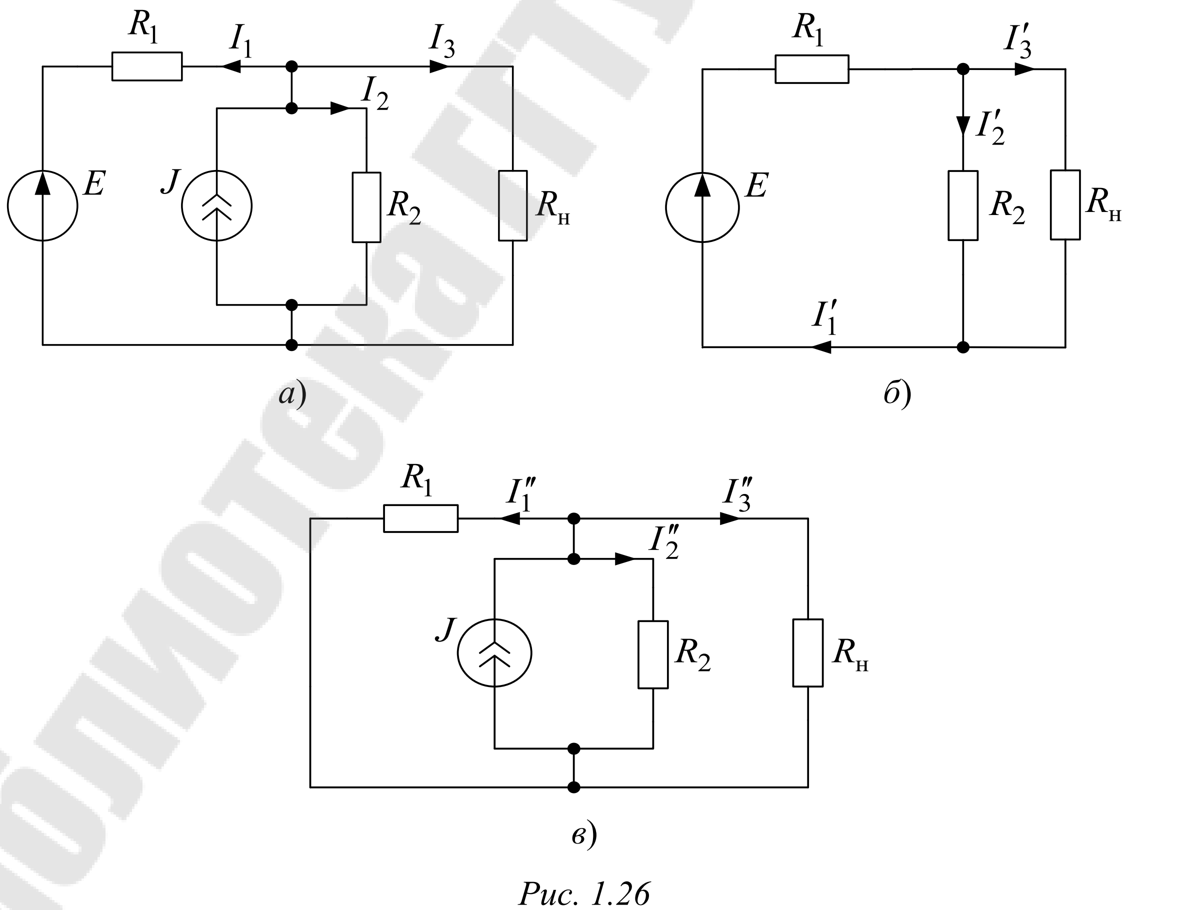


Рис. 1.26

Решение. При расчете схемы методом наложения рассматриваем отдельно действие источника ЭДС E и источника тока J. Эквивалентные схемы для определения частичных токов приведены на рисунках 1.26, *б*, *в*.

В схеме (рис. 1.26, *б*): $I_1' = \dfrac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 R_\text{н}}{R_2 + R_\text{н}}} = \dfrac{25}{100 + \dfrac{20 \cdot 5}{20+5}} = 5$ A;

$$I_2' = I_1' \frac{R_\text{н}}{R_2 + R_\text{н}} = 5\frac{5}{20+5} = 1\ \text{A}; \quad I_3' = I_1' \frac{R_2}{R_2 + R_\text{н}} = 5\frac{20}{20+5} = 4\ \text{A}.$$

В схеме (рис. 1.26, *в*): $I_1'' = J \dfrac{\dfrac{R_2 R_\text{н}}{R_2 + R_\text{н}}}{R_1 + \dfrac{R_2 R_\text{н}}{R_2 + R_\text{н}}} = 12{,}5 \dfrac{\dfrac{20 \cdot 5}{20+5}}{1 + \dfrac{20 \cdot 5}{20+5}} = 10$ A;

$$I_2'' = J \frac{\dfrac{R_1 R_\text{н}}{R_1 + R_\text{н}}}{R_2 + \dfrac{R_1 R_\text{н}}{R_1 + R_\text{н}}} = 12{,}5 \frac{\dfrac{1 \cdot 5}{1+5}}{20 + \dfrac{1 \cdot 5}{1+5}} = 0{,}5\ \text{A};$$

$$I_3'' = J - I_1'' - I_2'' = 12{,}5 - 10 - 0{,}5 = 2\ \text{A}.$$

В итоге имеем:

$$I_1 = I_1'' - I_1' = 10 - 5 = 5\ \text{A}; \qquad I_2 = I_2'' + I_2' = 0{,}5 + 1 = 1{,}5\ \text{A};$$

$$I_3 = I_3'' + I_3' = 2 + 4 = 6\ \text{A}.$$

Задача 1.28. Методом наложения рассчитать ток I_1 в цепи (рис. 1.27, *а*), если $E_1 = 16$ В, $E_2 = 14{,}3$ В, $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 2$ Ом; $R_4 = 8$ Ом.

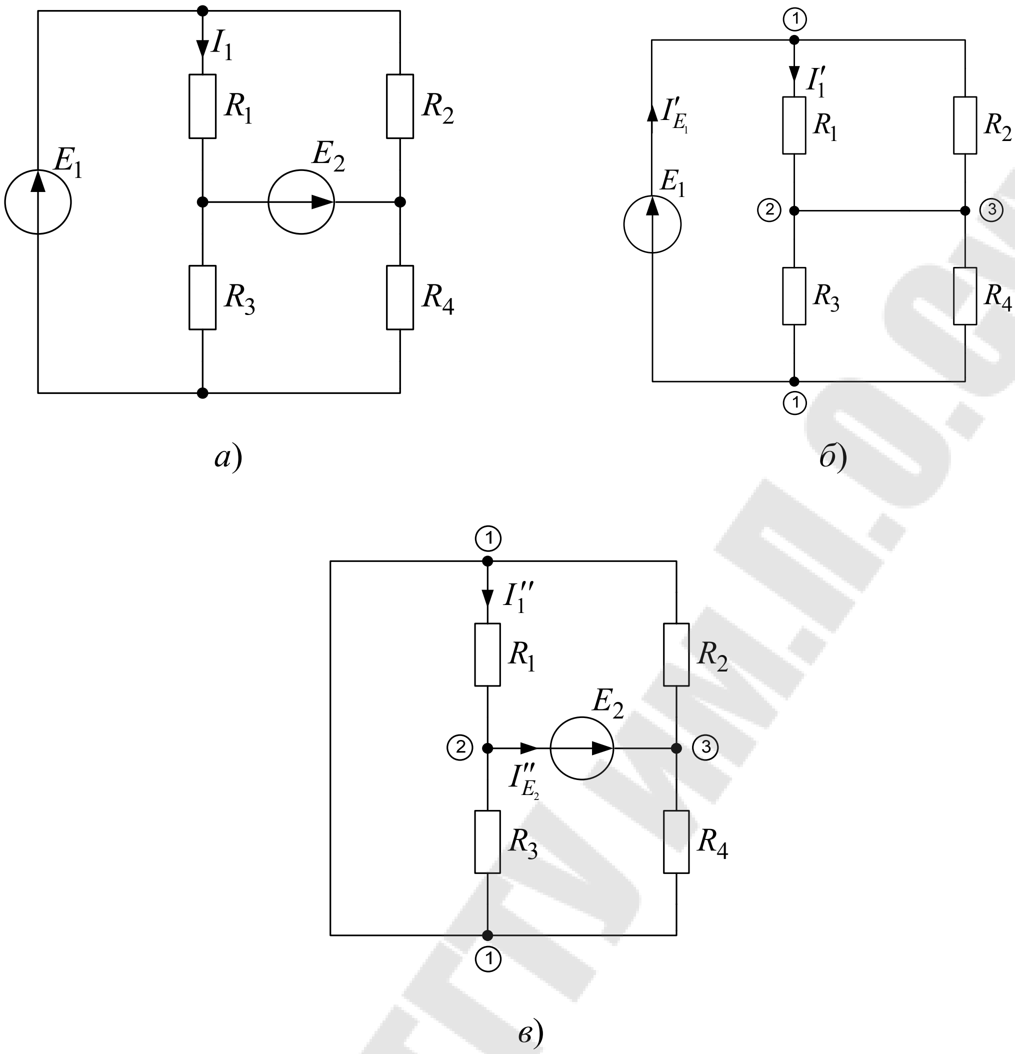


Рис. 1.27

Решение. С помощью расчетных схем (рис. 1.27, *б*, *в*) определяем в следующей последовательности:

Частичный ток I_1' от источника ЭДС E_1 (рис. 1.27, *б*) определим в следующей последовательности:

$$I_{E_1}' = \frac{E_1}{\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}} = \frac{16}{\dfrac{4 \cdot 6}{4+6} + \dfrac{2 \cdot 8}{2+8}} = 4 \text{ А};$$

$$I_1' = I_{E_1}' \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 4 \frac{6}{4+6} = 2{,}4 \text{ А}.$$

Частичный ток I_1'' от источника ЭДС E_2 определяется аналогично по схеме, приведенной на рис. 1.27, *в*:

$$I''_{E_2} = \frac{E_2}{\dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \dfrac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}} = \frac{14{,}3}{\dfrac{4 \cdot 2}{4+2} + \dfrac{6 \cdot 8}{6+8}} = 3 \text{ А};$$

$$I''_1 = I''_{E_2} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 3 \frac{2}{4+2} = 1 \text{ А}.$$

Действительный ток I_1 определяем алгебраическим суммированием частичных токов I'_1 и I''_1:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 2{,}4 + 1 = 3{,}4 \text{ А}.$$

1.6. Метод эквивалентного генератора

Задача 1.29. Найти ток в ветви с сопротивлением R_5 (рис. 1.28, *а*), если $E_1 = E_2 = 20$ В, $R_1 = R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 10$ Ом, $R_3 = R_2 = 40$ Ом.

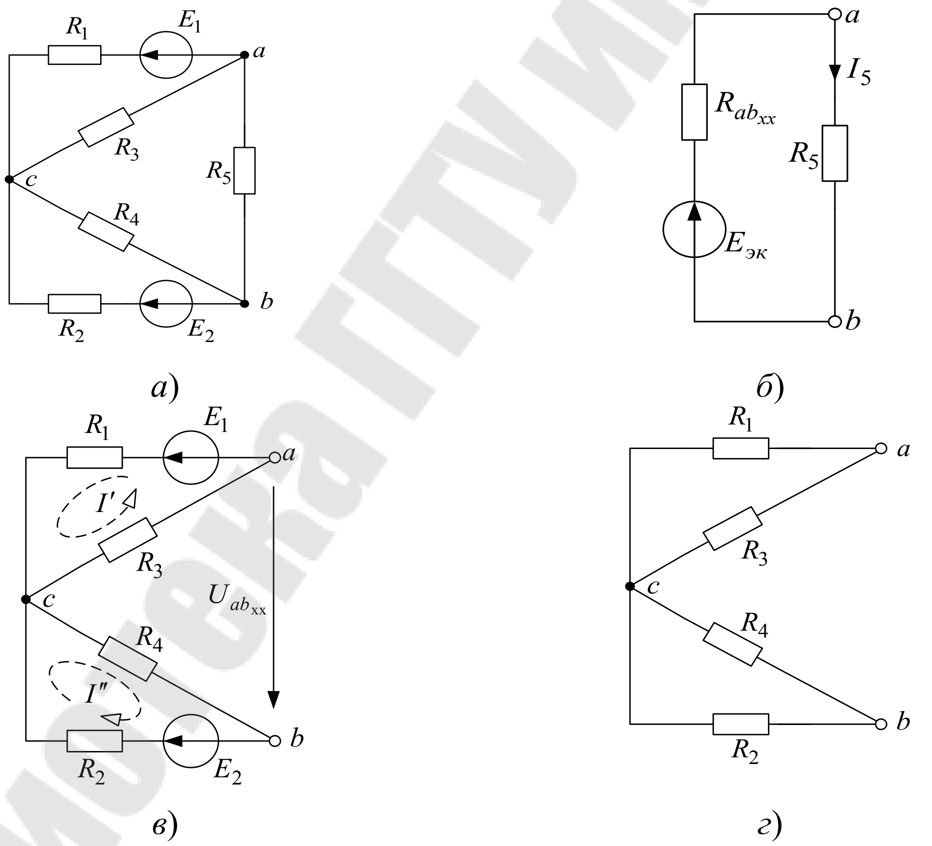


Рис. 1.28

Решение. Будем рассматривать сопротивление R_5 как нагрузку остальной части схемы, которую заменим эквивалентным генератором (рис. 1.28, *б*).

Для определения параметров эквивалентного генератора в заданной схеме отключим ветвь с R_5 (рис. 1.28, *в*) и найдем напряжение холостого хода $U_{ab_{\text{хх}}}$ между точками *a* и *b*, а также сопротивление холостого хода $R_{ab_{\text{хх}}}$ между узлами *a* и *b* при закороченных ЭДС E_1 и E_2 (рис. 1.28, *г*).

ЭДС эквивалентного генератора $E_{\text{эг}}$ и его внутреннее сопротивление $R_{\text{эг}}$ соответственно равны:

$$E_{\text{эг}} = U_{ab_{\text{хх}}} = -I'R_3 + I''R_4 = -\frac{E_1}{R_1+R_3}R_3 + \frac{E_2}{R_2+R_4}R_4 =$$

$$= -\frac{20}{40+10}10 + \frac{20}{40+160}160 = 12 \text{ В};$$

$$R_{\text{эг}} = R_{ab_{\text{хх}}} = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2R_4}{R_2+R_4} = \frac{40\cdot10}{40+10} + \frac{40\cdot160}{40+160} = 40 \text{ Ом}.$$

Искомый ток:

$$I_5 = \frac{U_{ab_{\text{хх}}}}{R_{ab_{\text{хх}}} + R_5} = \frac{12}{40+20} = 0{,}2 \text{ А}.$$

Задача 1.30. В цепи (рис. 1.29, *а*) $E_1 = 225$ В, $E_4 = 180$ В, $R_1 = 45$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $R_4 = 36$ Ом, $R_5 = 18$ Ом, $R_6 = 3$ Ом, $R_7 = 5$ Ом. Рассчитать ток I_6.

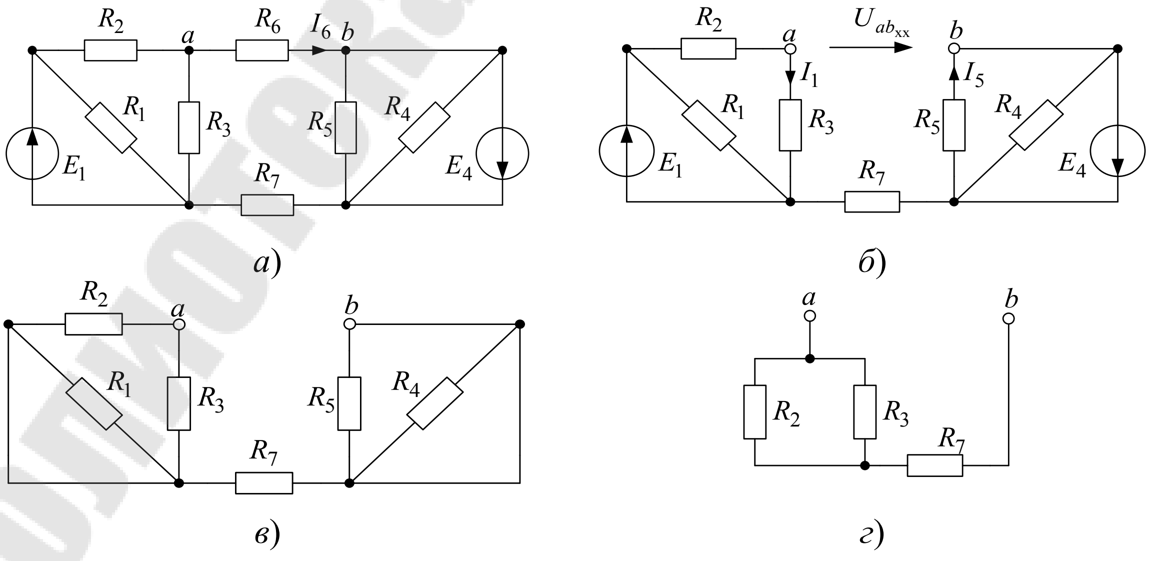


Рис. 1.29

Решение. Размыкая ветвь с резистором R_6, получим схему, приведенную на рис. 1.29, *б*.

Напряжение холостого хода

$$U_{ab_{\text{хх}}} = R_3 I_1 + R_5 I_5 .$$

Неизвестные токи I_1 и I_5 в цепи (рис.1.29, *б*) определим по закону Ома:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_2 + R_3} = \frac{225}{30+15} = 5 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{E_4}{R_5} = \frac{180}{18} = 10 \text{ А}.$$

Напряжение $U_{ab_{\text{хх}}}$ при этом будет равно:

$$U_{ab_{\text{хх}}} = 15 \cdot 5 + 18 \cdot 10 = 255 \text{В}.$$

Для расчета внутреннего сопротивления эквивалентного генератора заменяем идеальные источники ЭДС в схеме рис. 1.29, *б* короткозамкнутыми участками (рис. 1.29, *в*).

В результате получится эквивалентная схема, приведенная на рис. 1. 29, *г*, согласно которой

$$R_{ab_{\text{вн}}} = R_7 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 5 + \frac{30 \cdot 15}{30+15} = 15 \text{ Ом}.$$

Тогда искомый ток будет равен:

$$I_6 = \frac{U_{ab_{\text{хх}}}}{R_{ab_{\text{вн}}} + R_6} = \frac{255}{15+3} = 14{,}2 \text{ А}.$$

Задача 1.31. В цепи (рис. 1.30, *а*) $J = 10$ А, $E = 40$ В, $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_4 = 2$ Ом, $R_5 = 20$ Ом, $R_6 = 4$ Ом. Определить величину сопротивления R_3, при которой в нем выделится максимальная мощность. Рассчитать величину этой мощности.

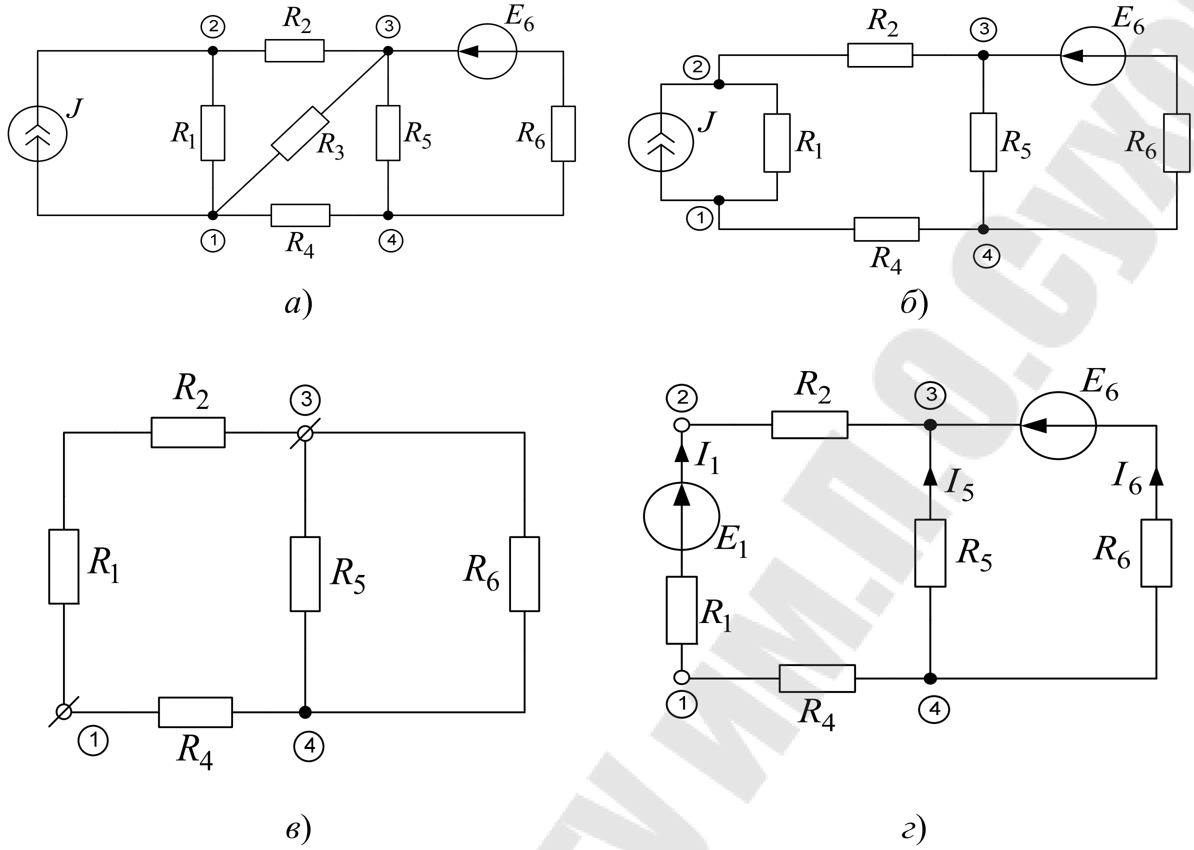


Рис. 1.30

Решение. Будем рассматривать сопротивление R_3 как нагрузку остальной части схемы – эквивалентного генератора, схема которого приведена на рис. 1.30, *б*.

Для расчета $R_{13\text{хх}}$ в схеме (рис. 1.30, *б*) необходимо убрать источник тока J, а источник ЭДС заменить короткозамкнутым участком. В результате такого преобразования получится схема, приведенная на рис. 1.30, *в*, по которой определим $R_{13\text{хх}}$:

$$R_{13\text{хх}} = \frac{\left(\dfrac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} + R_4\right)(R_1 + R_2)}{\dfrac{R_5 R_6}{R_5 + R_6} + R_4 + R_1 + R_2} = \frac{\left(\dfrac{20 \cdot 4}{20 + 4} + 2\right)(5 + 3)}{\dfrac{20 \cdot 4}{20 + 4} + 2 + 5 + 3} = 3{,}2 \text{ Ом}.$$

Для расчета максимальной мощности, выделяющейся в сопротивлении R_3, преобразуем схему рис. 1.30, *б* к виду, приведенному на рис. 1.30, *г*, где $E_1 = JR_1 = 10 \cdot 5 = 50$ В.

Напряжение U_{34} определим, используя метод узловых потенциалов:

$$U_{34} = \frac{\frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_4} + \frac{E_6}{R_6}}{\frac{1}{R_1 + R_2 + R_4} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6}} = \frac{\frac{50}{5+3+2} + \frac{40}{4}}{\frac{1}{5+3+2} + \frac{1}{20} + \frac{1}{4}} = 37{,}5 \text{ В}.$$

Тогда

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{34}}{R_1 + R_2 + R_4} = \frac{50 - 37{,}5}{5+3+2} = 1{,}25 \text{ А};$$

$$U_{\text{xx}} = U_{31} = -I_1(R_1 + R_2) + E_1 = -1{,}25(5+3) + 50 = 40 \text{ В}.$$

В итоге

$$P_{3\max} = \frac{U_{\text{xx}}^2}{4R_{13\text{xx}}} = \frac{40^2}{4 \cdot 3{,}2} = 125 \text{ Вт}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.32. Определить входное сопротивление цепи (рис. 1.31), если $R_1 = 7$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 5$ Ом, $R_5 = 2$ Ом, $R_6 = 8$ Ом, $R_7 = 6$ Ом.

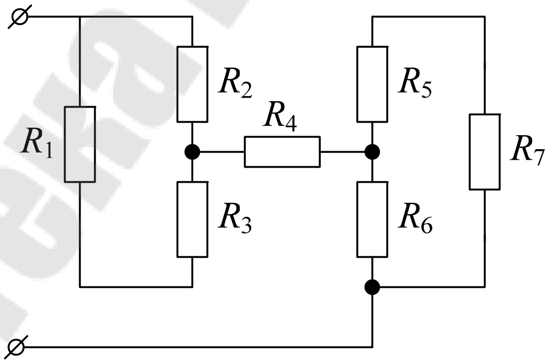


Рис. 1.31

Задача 1.33. В цепи (рис. 1.32) $R_1 = 160$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 120$ Ом, $R_4 =$ 40 Ом. Определить эквивалентное сопротивление относительно входных зажимов 1 и 1′ при холостом ходе (точки 2 и 2′ разомкнуты) и при коротком замыкании (точки 2 и 2′ замкнуты).

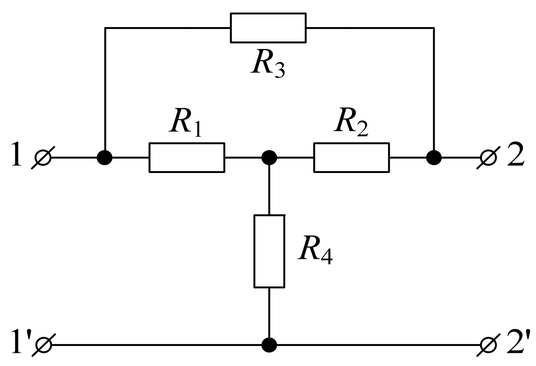


Рис. 1.32

Задача 1.34. В цепи (рис. 1.33) $U = 240$ В. В каких пределах реостат с сопротивлением 80 Ом может регулировать напряжение на приемнике с сопротивлением 40 Ом: а) при замкнутом ключе К; б) при разомкнутом ключе?

Задача 1.35. Определить напряжение на приемнике, включенном по схеме (рис. 1.33), если ключ K замкнут, а ползунок реостата находится в среднем положении.

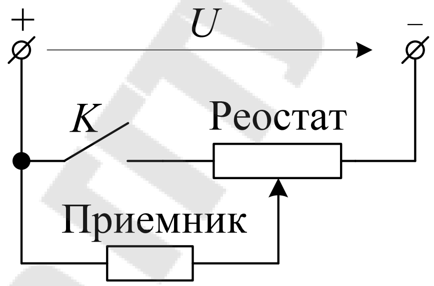


Рис. 1.33

Задача 1.36. Цепь (рис. 1.34) потребляет мощность $P = 31{,}25$ кВт при напряжении $U = 625$ В. Известны сопротивления резисторов: $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом.

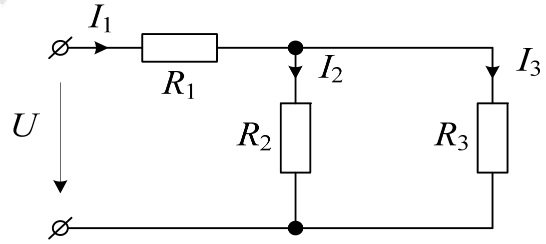


Рис. 1.34

Необходимо:

а) найти токи в ветвях *2* и *3* и мощность в каждой из этих ветвей;

б) определить, как изменится мощность P, если напряжение U увеличится на 20 % при тех же резисторах.

Задача 1.37. В цепи (рис. 1.34) $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 40$ Ом. Найти мощность, потребляемую цепью, если известно, что в резисторе R_1 выделяется мощность, равная 100 Вт.

Задача 1.38*. В цепи (рис. 1.35) $E_1 = 24$ В, $E_2 = 4$ В, $E_3 = 2$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 2$ Ом. Определить: 1) потенциал точки a; 2) как изменится потенциал точки a, если соединить ее с землей через резистор с сопротивлением 2 Ом. Для последнего случая построить потенциальную диаграмму.

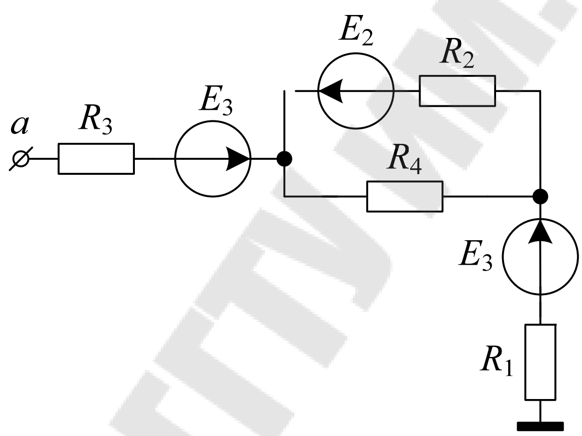


Рис. 1.35

Задача 1.39. В цепи (рис. 1.36) определить ЭДС E и ток I, если $J = 3$ А, а сопротивления всех резисторов одинаковы и равны 1 Ом.

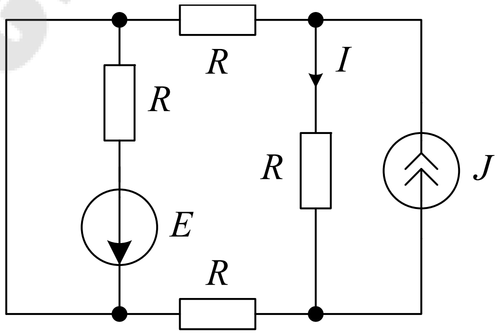


Рис. 1.36

Задача 1.40. Две лампы накаливания с одинаковым номинальным напряжением ($U_{ном} = 100$ В), но разной номинальной мощностью ($P_{1ном} = 150$ Вт и $P_{2ном} = 100$ Вт), включены последовательно в сеть с напряжением $U = 110$ В. Определить фактическую мощность, потребляемую каждой лампой.

Задача 1.41. При последовательном соединении двух реостатов R_1 и R_2 мощность, расходуемая во втором реостате, оказалась в пять раз больше мощности, расходуемой в первом реостате. Каково будет соотношение мощностей, расходуемых в реостатах, при их параллельном включении?

Задача 1.42. К источнику энергии с известной ВАХ (рис. 1.37) подключен приемник. Определить сопротивление приемника, если известно, что КПД передачи энергии от источника в приемник $\eta = 80\,\%$.

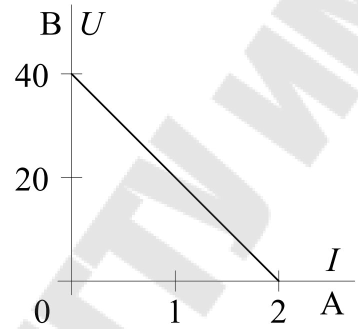


Рис. 1.37

Задача 1.43. К источнику энергии подключен приемник. Известна зависимость мощности, выделяющейся в приемнике, от тока в цепи, полученная при изменении сопротивления приемника (рис. 1.38). Рассчитать КПД передачи энергии от источника в приемник, если сопротивление приемника $R = 6$ Ом.

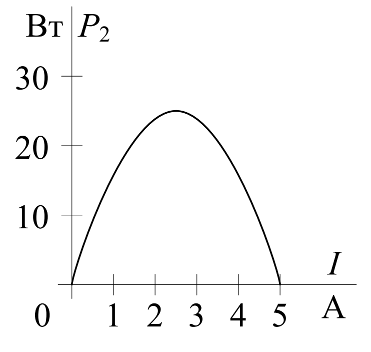


Рис. 1.38

Задача 1.44. В сеть с напряжением U = 36 В включают два резистора, вначале соединяя их последовательно, а затем – параллельно. Потребляемая резисторами мощность при последовательном соединении P = 48 Вт, а при параллельном соединении –P = 216 Вт. Определить сопротивления резисторов.

Задача 1.45. К батарее, составленной из одинаковых последовательно соединенных элементов, подключен приемник с сопротивлением $R_{\text{Н}}$ = 3 Ом. Параметры одного элемента: E = 1,5 В, $R_{\text{ВН}}$ = 3 Ом. Номинальная мощность приемника $P_{\text{ном}}$ = 3Вт. Определить количество элементов, обеспечивающих номинальный режим работы приемника.

Задача 1.46. Когда два гальванических элемента с ЭДС E_1 = 1 В и E_2 = 1,2 В соединили параллельно, напряжение батареи оказалось равным U = 1,08 В. Когда к батарее подключили реостат и установили ток нагрузки $I_{\text{н}}$ = 0,3 А, напряжение на зажимах батареи уменьшилось до 0,9 В. Определить внутренние сопротивления гальванических элементов.

Задача 1.47. Определить напряжение U_0, приложенное к цепи (рис. 1.39), если напряжение между точками a и b $U_{ab} = 25$ В, а сопротивления цепи $R_1 = R_4 = 20$ Ом, $R_2 = R_3 = 30$ Ом.

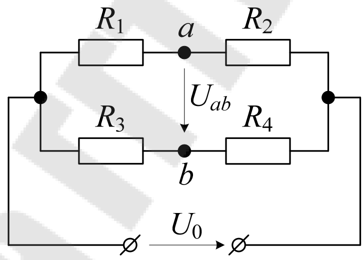


Рис. 1.39

Задача 1.48. В цепи (рис. 1.40) $R_1 = R_4 = 10$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $R_3 = 5$ Ом. Определить напряжение U, при котором ток в сопротивлении R_3 равен 2,4 А.

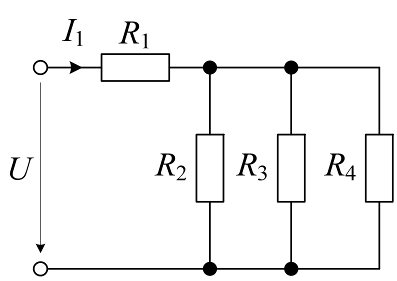


Рис. 1.40

Задача 1.49. Определить показание вольтметра в цепи (рис. 1.41), где $E_1 = 24$ В, $R_1 = 30$ Ом, $E_2 = 12$ В, $R_2 = 20$ Ом. Внутренним сопротивлением источников пренебречь. Сопротивление вольтметра считать весьма большим по сравнению с R_1 и R_2.

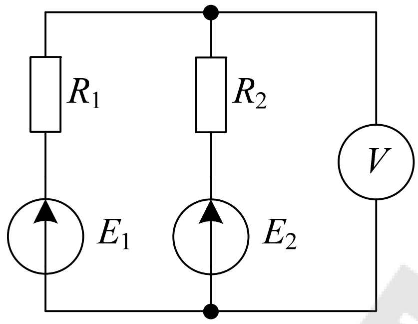


Рис. 1.41

Задача 1.50. Как изменится показание вольтметра в предыдущей задаче, если полярность одного из источников ЭДС изменить на обратную?

Задача 1.51*. В цепи (рис. 1.42) известны два режима потребления мощности всеми резисторами:

1) $P = 60$ Вт при $R_0 = R$;

2) $P = 80$ Вт при $R_0 = 0{,}5\,R$.

Определить P при $R_0 = 2R$.

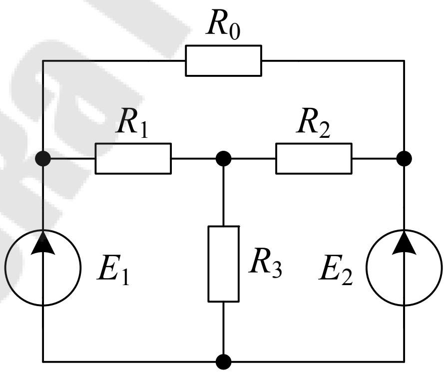


Рис. 1.42

Задача 1.52*. Когда в цепи (рис. 1.43) работал генератор с ЭДС E_1 (ЭДС E_2 была равна 0), мощность, расходуемая во всех сопротивлениях, оказалась равной 55 Вт. Когда же работал генератор с ЭДС E_2, а ЭДС генератора $E_1 = 0$, мощность, расходуемая в тех же сопротивлениях, равнялась 176 Вт. Определить мощность P, расходуемую в тех же сопротивлениях при одновременной работе обоих генераторов. Внутренним сопротивлением генераторов пренебречь. Считать, что $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$.

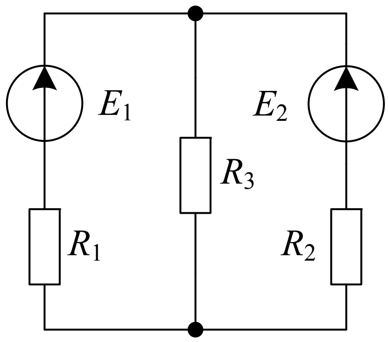


Рис. 1.43

Задача 1.53*. В цепи (рис. 1.44) $E = 4$ В, $J = 6$ А, $R_3 = 1$ Ом. Значения мощностей, выделяемых в резисторах, равны:

$$P_{R_3} = 16 \text{ Вт}, \quad P_{R_1} + P_{R_2} = 24 \text{ Вт}.$$

Определить сопротивления резисторов R_1 и R_2.

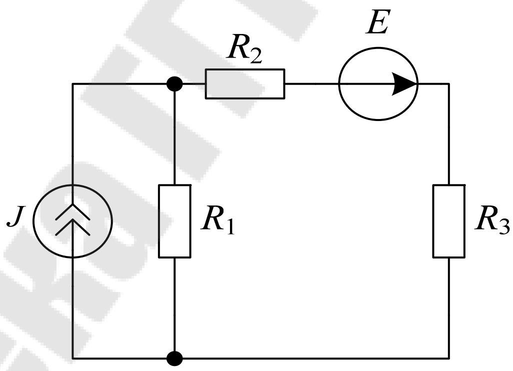


Рис.1.44

Задача 1.54*. В цепи (рис. 1.45) источник ЭДС E развивает мощность $P_E = 5$ Вт. Ток $I_2 = 2$ А. Сопротивления резисторов: $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = R_3 = 2$ Ом. Определить E, J и P_J.

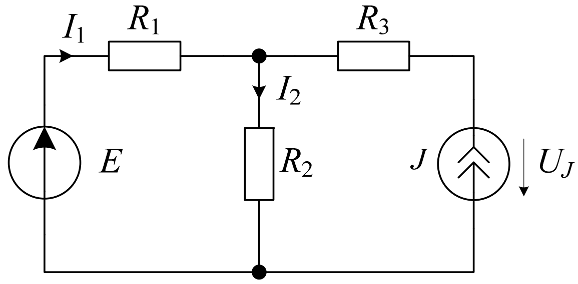


Рис. 1.45

Задача 1.55*. В цепи (рис. 1.46) действуют источники постоянного тока J и постоянной ЭДС $E = 4$ В. Сопротивления резисторов: $R_1 = R_2 = 6$ Ом, $R_4 = R_5 = 2$ Ом. В резисторе R_3 выделяется максимальная мощность $P_{3\max}$. Определить значения R_3 и $P_{3\max}$.

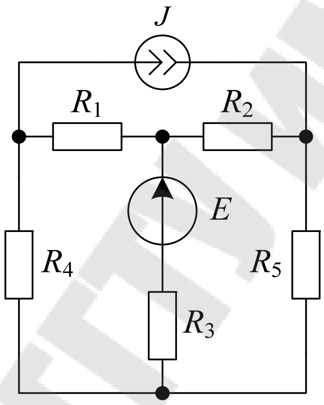


Рис. 1.46

Задача 1.56. В цепи (рис. 1.47) $E_2 = 8$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 2$ Ом. При замкнутом ключе K показание вольтметра $U_V = 24$ В. Определить показание прибора при разомкнутом ключе.

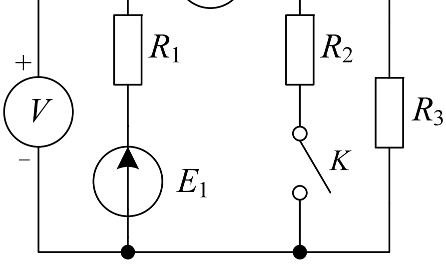


Рис. 1.47

Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ С СИНУСОИДАЛЬНЫМИ ТОКАМИ И НАПРЯЖЕНИЯМИ

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Синусоидальные токи, напряжения, ЭДС. При описании процессов в линейных электрических цепях все токи, напряжения и ЭДС которых изменяются по синусоидальному закону, т. е. имеют вид $i(t) = \; = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$, $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, $e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$, используются следующие понятия:

– $i = i(t), u = u(t), e = e(t)$ – мгновенные токи, напряжения и ЭДС;

– I_m, U_m, E_m – амплитуды (максимальные значения) величин $i(t)$, $u(t)$ и $e(t)$;

– $(\omega t + \psi_i), (\omega t + \psi_u), (\omega t + \psi_e)$ – аргументы синусоидальных функций (текущие фазы синусоидальных тока, напряжения и ЭДС);

– ψ_i, ψ_u и ψ_e – начальные значения аргументов (начальные фазы) тока, напряжения и ЭДС;

$\omega = 2\pi f$ – угловая частота, а f – циклическая частота тока, напряжения, ЭДС. За период колебаний этих величин $T = \dfrac{1}{f}$ их фазы увеличиваются на 2π, т. е. $\omega T = 2\pi$. При стандартной частоте $f = 50$ Гц период $T = 0{,}02$ с, угловая частота $\omega = 2\pi f = 100\pi = 314$ рад/с.

Наряду с амплитудами I_m, U_m и E_m часто используют их среднеквадратичные значения:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}},$$

которые также называют действующими значениями тока, напряжения и ЭДС.

Если две синусоидальные величины одной и той же частоты отличаются начальными фазами, то говорят, что они сдвинуты по фазе друг относительно друга. При этом под сдвигом фаз понимают разность их начальных фаз, т. е. сдвиг фаз между напряжением $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ и током $i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ равен $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

Очевидно угол φ определяет связь колебаний напряжения и тока, т. е. взаимное расположение их временных графиков.

Комплексные ток, напряжение, ЭДС. Синусоидальные ток, напряжение и ЭДС можно представить в виде:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m[I_m e^{j\psi_i} e^{j\omega t}],$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = I_m[U_m e^{j\psi_u} e^{j\omega t}],$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e) = I_m[E_m e^{j\psi_e} e^{j\omega t}],$$

где $I_m[...]$ – мнимая часть комплекса $[...]$.

Комплексные числа $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$, $\underline{U}_m e^{j\psi_u}$ и $\underline{E}_m e^{j\psi_e}$ называют комплексными амплитудами соответственно тока, напряжения и ЭДС, а комплексные числа $\underline{I} = \dfrac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}}, \underline{U} = \dfrac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}}$ и $\underline{E} = \dfrac{\underline{E}_m}{\sqrt{2}}$ – комплексами действующих значений тока, напряжения и ЭДС. Поскольку все токи, напряжения и ЭДС имеют одинаковую угловую частоту ω, то комплексы $\underline{I}_m$, $\underline{U}_m$ и $\underline{E}_m$ ($\underline{I}$, $\underline{U}$ и $\underline{E}$) однозначно описывают переменные i, u и e цепи.

Символический метод расчета цепей синусоидального тока. Введение вместо синусоидальных функций времени $i = i(t)$, $u = u(t)$ и $e = e(t)$ комплексов $\underline{I}_m$, $\underline{U}_m$ и $\underline{E}_m$ или $\underline{I}$, $\underline{U}$ и $\underline{E}$ позволяет алгебраизовать уравнения элементов цепи и схемные изображения последних представить в символическом (комплексном) виде.

Заметим, что падение напряжения на резистивном, емкостном и индуктивном элементах в комплексной области описываются алгебраическим уравнением

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}, \tag{1}$$

где $\underline{Z} = R$ для резистивного элемента, $\underline{Z} = -jX_C$ для емкостного элемента и $\underline{Z} = jX_L$ для индуктивного элемента. Величины $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ и $X_L = \omega L$ называют емкостным и индуктивным сопротивлением; они определяются отношением модулей комплексов (векторов) напряжения и тока соответственно на емкостном и индуктивном элементах. Уравнение (1) представляет собой запись закона Ома в комплексной форме для резистивного, емкостного и индуктивного элементов. Используя закон Ома, а также законы Кирхгофа в комплексной форме составляют комплексную схему замещения цепи. Цепь в этой области описывается чисто алгебраическими уравнениями. Решив эти уравнения, т. е., определив комплексные значения всех токов и напряжений цепи, переходят к мгновенным значениям (соответствующим синусоидальным функциям токов и напряжений).

Комплексные сопротивление и проводимость. Пассивный двухполюсник с комплексным напряжением $\underline{U}$ и током $\underline{I}$ можно охарактеризовать комплексным сопротивлением $\underline{Z}$ и комплексной проводимостью $\underline{Y}$:

$$\underline{Z} = \frac{U}{I}; \quad \underline{Y} = \underline{Z}^{-1} = \frac{I}{U}. \tag{2}$$

При этом действительную и мнимую части $\underline{Z}$ называют активным $R = \mathrm{Re}[\underline{Z}]$ и реактивным $X = I_m[\underline{Z}]$ сопротивлениями двухполюсника, а модуль $Z = |\underline{Z}|$ – его полным сопротивлением. Таким образом,

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = Ze^{j\varphi} = R + jX;\ Z = \frac{U}{I};\ Z^2 = R^2 + X^2;\ R = Z\cos\varphi;$$
$$X = Z\sin\varphi.$$

Комплексную проводимость представляют в виде:

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = Ye^{-j\varphi} = G - jB;\ Y = \frac{I}{U};\ Y^2 = G^2 + B^2;\ G = Y\cos\varphi;\ B = Y\sin\varphi,$$

где Y, G и B – соответственно полная, активная и реактивная проводимости двухполюсника.

Мощность в цепи синусоидального тока. Для двухполюсника с напряжением $u(t) = U_m\sin(\omega t + \psi_u)$ и током $i(t) = I_m\sin(\omega t + \psi_i)$ *мгновенной мощностью* называется произведение мгновенных значений напряжения и тока $p = p(t) = u(t)i(t)$, а полной мощностью – произведение действующих значений напряжения и тока $S = UI$.

Активная мощность двухполюсника равна среднему значению мгновенной мощности за период:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = UI\cos\varphi. \tag{3}$$

Реактивной мощностью называют величину $Q = UI \sin\varphi$.

Единицей мгновенной и активной мощностей является ватт [1 Вт]; единица полной мощности – 1 В · А, а реактивной мощности – 1 вар.

Показания приборов. В задачах данной главы не оговорен тип приборов: под показаниями амперметра и вольтметра понимаются действующие значения тока и напряжения I и U – модули комплексов действующих значений тока $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$ и напряжения $\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$. Под показанием ваттметра (рис. 1) понимается произведение $P = UI\cos\varphi$ при указанном положении «звездочек» на приборе. «Звездочки» (или «точки») определяют положительные направления токов и напряжений (от «звездочки» через прибор); изменение их положения меняет угол сдвига между напряжением и током $\varphi = \psi_u - \psi_i$ на 180°.

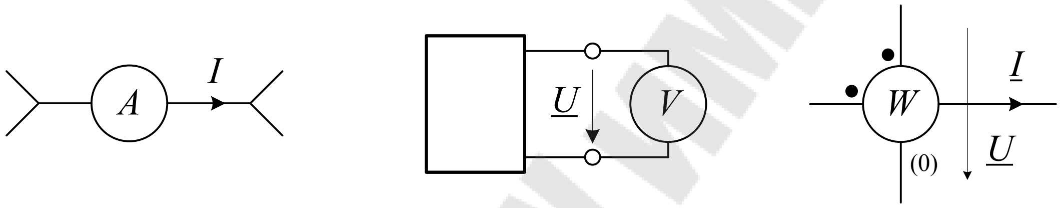


Рис. 1

Векторная диаграмма. Представление синусоидальных токов, напряжений и ЭДС комплексными числами позволяет изображать их на комплексной плоскости в виде векторов, отображая действия, производимые над этими числами в процессе расчета цепей, в виде построения соответствующих векторных диаграмм. В частности, для последовательного участка цепи с током $\underline{I}$ определение комплексного напряжения $\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$, где $\underline{U}_R = R\underline{I}$, $\underline{U}_L = jX_L\underline{I}$, $\underline{U}_C = -jX_C\underline{I}$ можно изобразить в виде векторной диаграммы (рис. 2).

Здесь $\underline{U} = (R + jX_L - jX_C)\underline{I} = [R + j(X_L - X_C)]\underline{I}$, $\underline{Z} = R + j(X_L - jX_C) =$ $= R + jX$, $\underline{U} = \underline{U}_R + J\underline{U}_X$ (рассмотрен случай, когда $X = X_L - X_C > 0$). Комплекс $\underline{U}_R$ называют также активной составляющей напряжения и обозначают $\underline{U}_{\text{а}}$, а $\underline{U}_X$ – реактивной составляющей напряжения и обозначают $\underline{U}_{\text{р}}$.

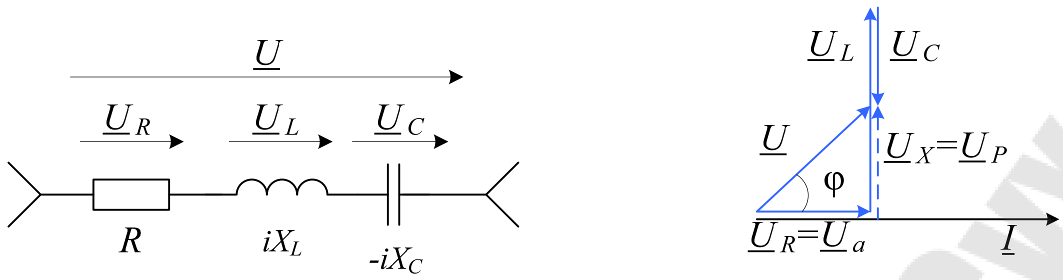


Рис. 2

Треугольники сопротивлений, проводимостей, мощностей, напряжений и токов. Полные сопротивления, проводимости, мощности двухполюсника и их составляющие удовлетворяют соотношениям

$$Z^2 = R^2 + X^2, \quad Y^2 = G^2 + B^2, \quad S^2 = P^2 + Q^2$$

и поэтому могут быть представлены в виде прямоугольных треугольников (рис. 3).

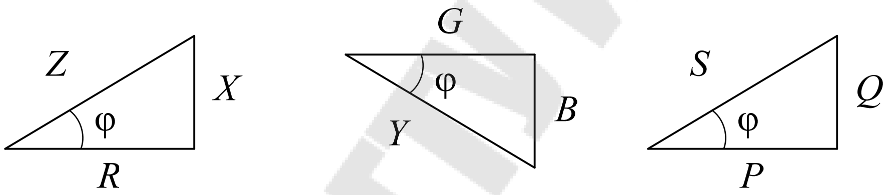


Рис. 3

Комплексные напряжение и ток двухполюсника можно представить в виде двух ортогональных составляющих $\underline{U} = U_{\text{а}} + jU_{\text{р}}$ и $\underline{I} = I_{\text{а}} + jI_{\text{р}}$. При этом фаза напряжения $U_{\text{а}}$ совпадает с фазой тока $\underline{I}$, а фаза напряжения $U_{\text{р}}$ отличается от фазы тока $\underline{I}$ на $\pm 90°$. Аналогично фаза тока $I_{\text{а}}$ совпадает с фазой напряжения $\underline{U}$, а фаза тока $\underline{I}_{\text{р}}$ отличается от фазы $\underline{U}$ на $\pm 90°$. Так как $U^2 = U_{\text{а}}^2 + U_{\text{р}}^2$ и $I^2 = I_{\text{а}}^2 + I_{\text{р}}^2$, то действующие значения напряжения и тока и их активные и реактивные составляющие также можно изобразить в виде треугольников (рис. 4).

Рис. 4

Резонанс. Реактивные сопротивления (или проводимости) отдельных участков цепи могут иметь как положительное, так и отрицательное значение. В некоторых случаях происходит взаимная компенсация этих величин, и тогда говорят, что в рассматриваемой цепи наступил режим резонанса.

Резонансные явления возникают при наличии в цепи катушек индуктивности и конденсаторов.

Резонансом называется такой режим пассивной цепи, содержащей реактивные элементы, при котором реактивная составляющая ее входного сопротивления (входной проводимости) равна нулю. Ток на входе цепи совпадает по фазе с приложенным к цепи напряжением.

При последовательном соединении индуктивной катушки с активным сопротивлением $R_к$ и индуктивностью L и конденсатора емкостью C в цепи возможен резонанс напряжений, при котором

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что режим резонанса может быть получен при изменении индуктивности L или емкости C, а также при изменении частоты ω напряжения или тока источника питания.

В последнем случае частоту

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (5)$$

называют *резонансной частотой* последовательного колебательного контура.

При параллельном соединении индуктивной катушки с параметрами $R_к, L$ и конденсатора емкостью C в цепи возможен резонанс токов при условии, что суммарная реактивная проводимость цепи $b = 0$, т. е.

$$b = b_L - b_C = \frac{\omega L}{R_к^2 + (\omega L)^2} - \omega C = 0. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что резонанс токов может быть достигнут путем изменения одной из величин: ω, L, C и $R_к$. Однако этот режим не всегда может быть получен, а именно когда значение изменяемой величины (при заданных трех остальных величинах) получается при решении последнего уравнения мнимым или комплексным. При изменении L и C могут быть получены и по два вещественных значения. В таком случае могут быть получены два резонансных режима.

Решая уравнение (6) относительно ω, найдем следующее значение для резонансной частоты:

$$\omega_0' = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{L}{C} - R_к^2}\,, \tag{7}$$

откуда следует, что для получения вещественного значения ω_0' должно выполняться условие

$$R_к < \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Электрические цепи с индуктивно связанными элементами. Если две индуктивные катушки, содержащие w_1 и w_2 витков, расположены на некотором достаточно близком расстоянии друг от друга, магнитное поле одной из них может распространяться на область расположения другой катушки. При наличии тока i_1 первая катушка возбуждает магнитный поток самоиндукции Φ_{11}, часть которого Φ_{12} оказывается сцепленной с витками второй катушки, образуя потокосцепление взаимной индукции:

$$\psi_{12} = w_2\Phi_{12}.$$

Аналогично при наличии тока i_2 во второй катушке возникает потокосцепление взаимоиндукции:

$$\psi_{21} = w_1\Phi_{21}.$$

Отношение потокосцепления взаимной индукции к току, его возбуждающему, носит название *взаимной индуктивности* катушек и обозначается буквой M.

Таким образом,

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_1} = \frac{w_2\Phi_{12}}{i_1}; \qquad M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_2} = \frac{w_1\Phi_{21}}{i_2}.$$

При этом $M_{12} = M_{21} = M$, что выражает свойство взаимности для индуктивно связанных цепей.

Величина взаимной индуктивности зависит от числа витков катушек, их формы и взаимного расположения, а также от магнитных характеристик среды. Как и индуктивность L, взаимная индуктивность M измеряется в генри (Гн).

Степень индуктивной связи двух катушек принято характеризовать коэффициентом магнитной связи k, равным отношению

$$k = \sqrt{\frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}}} = \sqrt{\frac{M^2 w_1 w_2}{L_1 L_2 w_1 w_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \qquad (8)$$

Так как потоки взаимной индукции Φ_{12} и Φ_{21} всегда меньше потоков самоиндукции Φ_{11} и Φ_{22}, величина коэффициента связи всегда меньше единицы:

$$k \le 1.$$

Итак, в цепях с индуктивно связанными катушками при анализе и в расчетах необходимо учитывать ЭДС взаимной индукции, наводимых катушками друг в друге за счет индуктивной связи между ними.

Расчет разветвленных цепей с индуктивно связанными катушками можно вести, составляя уравнения по первому и второму законам Кирхгофа или методом контурных токов.

Метод узловых потенциалов непосредственно непригоден, так как ток в любой ветви зависит не только от ЭДС находящегося в ней источника и от потенциалов тех узлов, к которым ветвь присоединена, но и от токов других ветвей, которые наводят ЭДС взаимной индукции. Поэтому не удается простым путем выразить токи ветвей через потенциалы узлов и ЭДС источников, как в цепях без индуктивно связанных катушек.

Метод эквивалентного генератора можно применять, если внешняя по отношению к двухполюснику часть цепи не имеет индуктивных связей с той частью цепи, которая входит в состав двухполюсника.

Разумеется, что нельзя пользоваться приведенными ранее формулами для преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду и обратно.

Чтобы обойти указанные выше ограничения в применении расчетных методов, в ряде случаев целесообразно исключить индуктивные связи, перейдя к эквивалентным схемам без индуктивных связей [2], [3].

При развязывании зажимы, относительно которых положительные направления токов катушек ориентированы таким образом, что магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции в катушках совпадают по направлению, называют одноименными и обозначают одинаковыми метками (точками, звездочками и т. п.). Два других зажима катушек составляют другую пару одноименных зажимов.

Таким образом, в *случае согласного включения* положительные направления токов в индуктивно связанных катушках должны быть одинаково ориентированы относительно одноименных зажимов.

Правило: «Если положительное направление тока в одной из катушек принято от зажима с точкой, то положительное направление напряжения взаимной индукции на зажимах другой катушки также следует принять от зажима с точкой. И наоборот».

Задачи с решениями

2.1. Расчет простых цепей синусоидального тока

Задача 2.1. По цепи с последовательным соединением резистора и конденсатора протекает ток $i(t) = I_m \sin\omega t$ = 1,41sin314t, А. Определить мгновенные значения приложенного к цепи напряжения $u(t)$, напряжений на емкости $u_C(t)$ и на активном сопротивлении $u_R(t)$, если $R = 100$ Ом и емкость $C = 31{,}8$ мкФ.

Решение. Мгновенное значение напряжения:

– на активном сопротивлении

$$u_R = Ri = RI_m \sin\omega t = 100 \cdot 1{,}41 \sin\omega t = 141 \sin\omega t \text{ В};$$

– на емкости

$$u_C = \frac{1}{C}\int i dt = \frac{1}{\omega C} I_m \cos\omega t + C_1 = -141\sin(314t - 90°) \text{ В},$$

где $\dfrac{1}{\omega C} = X_C = \dfrac{1}{314 \cdot 31{,}8 \cdot 10^{-6}} = 100$ Ом – емкостное сопротивление; C_1 – постоянная интегрирования.

Так как при синусоидальном токе и установившемся процессе в цепи напряжение на емкости так же, как и напряжение на всех остальных элементах не имеет постоянной составляющей, т. е. $C_1 = 0$.

Напряжение на входе цепи

$$u = u_R + u_C = RI_m \sin\omega t - X_C I_m \cos\omega t = ZI_m \sin(\omega t + \varphi),$$

где $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = 141$ Ом; $\quad \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{-X_C}{R} = -45°.$

Окончательно

$$u = 200\sin(\omega t - 45°)\ \text{В}.$$

Задача 2.2. В катушке, индуктивность которой $L = 30$ мГн и сопротивление $R = 9$ Ом, действующее значение тока $I = 2$ А. Чему равно действующее значение напряжения, приложенного к катушке, если частота напряжения $\omega = 500$ рад/с?

Решение. Реактивное и полное сопротивления катушки соответственно равны:

$$X = \omega L = 500 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 15\ \text{Ом};\quad Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{9^2 + 15^2} = 17{,}5\ \text{Ом}.$$

Следовательно, по закону Ома:

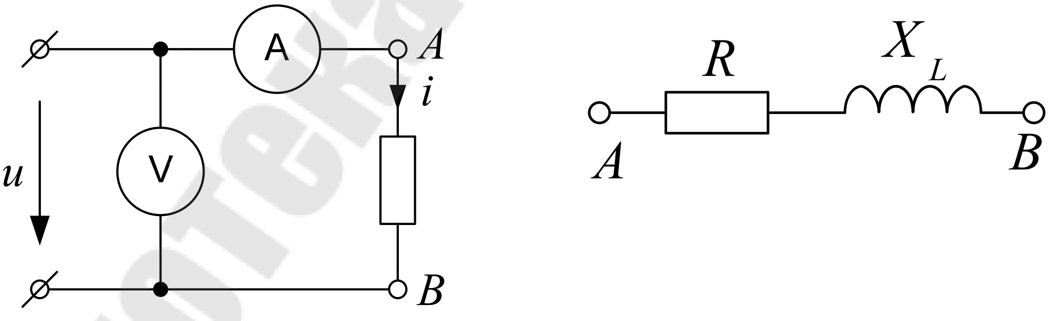
$$U = ZI = 17{,}5 \cdot 2 = 35\ \text{В}.$$

Задача 2.3. Мгновенные значения напряжения и тока на зажимах A и B пассивного двухполюсника (рис. 2.1, *а*) известны и равны:

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 30\sin(500t + 45°)\ \text{В};$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = 0{,}2\sin(500t - 30°)\ \text{А}.$$

Составить эквивалентную последовательную схему замещения пассивного двухполюсника; определить параметры ее элементов. Определить показания приборов (амперметра и вольтметра) электромагнитной системы.



а) *б*)

Рис. 2.1

Решение. Комплексные амплитуды напряжения и тока:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_i} = 30e^{j45°}\,\text{В};\quad \underline{I}_m = 0{,}2e^{-j30°}\,\text{А}.$$

Соответствующие комплексы действующих значений:

$$\underline{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 21{,}2 e^{j45^\circ}\ \text{В}; \qquad \underline{I} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{-j30^\circ} = 0{,}141 e^{-j30^\circ}\ \text{А}.$$

Комплексное сопротивление двухполюсника определим по закону Ома:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{30 e^{j45^\circ}}{0{,}2 e^{-j30^\circ}} = 150 e^{j75^\circ} = (39 + j145)\ \text{Ом}.$$

В общем случае

$$\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}\ \text{Ом}.$$

Отсюда активное сопротивление двухполюсника

$$R = \operatorname{Re} \underline{Z} = Z\cos\varphi = 39\ \text{Ом}.$$

Реактивное сопротивление двухполюсника

$$X = I_m \underline{Z} = Z\sin\varphi = 145\ \text{Ом}.$$

Поскольку $X > 0$, заданный двухполюсник является активно-индуктивным. Его схема замещения приведена на рис. 2.1, *б*.

Задача 2.4. К источнику с напряжением $u = 120\sin 1000t$ В подключена индуктивная катушка, мгновенное значение тока в которой выражается уравнением $i = 8\sin(1000t - 53^\circ)$ А. Определить активное и реактивное сопротивления катушки. Как изменится мгновенное значение тока в катушке, если частота питающего напряжения уменьшится вдвое?

Решение. Комплексные амплитуды напряжения и тока в катушке согласно условию равны:

$$\underline{U}_m = 120\ \text{В} \quad \text{и} \quad \underline{I}_m = 8e^{-j53^\circ}\ \text{А}.$$

Следовательно, комплексное сопротивление катушки

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{120}{8e^{-j53^\circ}} = 15e^{j53^\circ} = (9 + j12)\ \text{Ом}.$$

Таким образом, активное и реактивное сопротивления катушки на частоте $\omega = 1000\ \text{с}^{-1}$:

$$R_\text{к} = 9\ \text{Ом} \quad \text{и} \quad X_L = 12\ \text{Ом}.$$

При уменьшении частоты ω в 2 раза реактивное сопротивление $X_L = \omega L$ также уменьшится в 2 раза. Следовательно, комплексная амплитуда и мгновенное значение тока станут равны:

$$\underline{I}_m = \frac{120}{9 + j6} = \frac{120}{10{,}6e^{j33{,}7^\circ}} = 11{,}32e^{-j33{,}7^\circ}\ \text{А} \quad \text{и} \quad i = 11{,}32\sin(\omega t - 33{,}7^\circ)\ \text{А}.$$

Задача 2.5. Резистор с сопротивлением 100 Ом и конденсатор емкостью 2 мкФ соединены последовательно. Напряжение на зажимах конденсатора $u_C(t) = 10\sin 5000t$ В. Определить мгновенные значения тока, напряжения на резисторе, общего напряжения, подводимой мощности и потребляемой активной мощности.

Решение. Сопротивление идеального конденсатора

$$Z_C = X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(5000 \cdot 2 \cdot 10^{-6})} = 100\ \text{Ом}.$$

С учетом того, что ток в идеальной емкости опережает напряжение на угол $\varphi = 90^\circ$, мгновенное значение тока в цепи определим в виде:

$$i\,(t) = \frac{U_{Cm}}{Z_C}\sin(\omega t + 90^\circ) = \frac{10}{100}\sin(\omega t + 90^\circ) = 0{,}1\sin(5000t + 90^\circ)\ \text{А}.$$

Мгновенное значение напряжения на резисторе

$$u_R(t) = Ri(t) = 100 \cdot 0{,}1\sin(\omega t + 90^\circ) = 10\sin(5000t + 90^\circ)\ \text{В}.$$

Так как комплексное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = R - jX_C = 100 - j100 = 100\sqrt{2}e^{-j45^\circ}\ \text{Ом},$$

комплекс напряжения на входе цепи согласно закону Ома равен:

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} = 100\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \cdot 0{,}1e^{j90^\circ} = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ}\ \text{В}$$

и соответствующее мгновенное значение

$$u(t) = 10\sqrt{2}\sin(5000t + 45^\circ).$$

Подводимая к цепи мощность

$$S = UI = \frac{10 \cdot 0{,}1}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ \text{В} \cdot \text{А}.$$

Потребляемая активная мощность

$$P = RI^2 = 100\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0{,}5 \text{ Вт}.$$

Задача 2.6. По электрической цепи с последовательным соединением катушки с активным сопротивлением $R = 30$ Ом и индуктивностью $L = 16{,}5$ мГн и конденсатора емкостью $C = 10{,}6$ мкФ протекает ток, мгновенное значение которого $i(t) = 1{,}3\sin(1884t - 45^\circ)$ А. Определить: *а*) полное сопротивление цепи; *б*) действующие значения входного напряжения и тока; *в*) полную мощность, потребляемую цепью; *г*) мгновенные значения напряжения на катушке, конденсаторе и на входе цепи.

Решение. Действующее значение тока в цепи

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1{,}3}{\sqrt{2}} = 0{,}92 \text{ А}.$$

Сопротивления цепи:

– индуктивное

$$X_L = \omega L = 1884 \cdot 16{,}5 \cdot 10^{-3} = 31{,}1 \text{ Ом};$$

– емкостное

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(1884 \cdot 10{,}6 \cdot 10^{-6})} = 50 \text{ Ом};$$

– полное

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (31{,}1 - 50)^2} = 35{,}5 \text{ Ом}.$$

Действующее значение входного напряжения

$$U_{\text{вх}} = ZI = 35{,}5 \cdot 0{,}92 = 32{,}7 \text{ В}.$$

Полная потребляемая мощность

$$S = U_{\text{вх}} I = 32{,}7 \cdot 0{,}92 = 30{,}1 \text{ ВА}$$

Мгновенное значение входного напряжения

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \text{ В},$$

где $U_m = \sqrt{2}U_{\text{вх}} = \sqrt{2}\cdot 32{,}7 = 46{,}2$ В, а начальная фаза $\psi_u = \psi_i + \varphi$. Начальная фаза тока согласно условию равна $\psi_i = -45°$, а разность фаз φ между током и напряжением на входе цепи:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{X_L - X_C}{R} = \operatorname{arctg}\frac{31{,}1-50}{30} \approx -32°.$$

Следовательно, начальная фаза напряжения $\psi_u = -45° - 32° = -77°$, а мгновенное значение

$$u = 46{,}2\sin(1884t - 77°) \text{ В}.$$

Мгновенное значение напряжения:

– на индуктивной катушке

$$u_{\text{к}}(t) = u_R(t) + u_L(t) = I_m R\sin(\omega t + \psi_i) + I_m X_L \sin(\omega t + \psi_i + 90°) =$$

$$= 1{,}3\cdot 30\sin(\omega t - 45°) + 1{,}3\cdot 31{,}1\sin(\omega t + 45°) = 56{,}1\sin(1884t + 1°) \text{ В};$$

– на конденсаторе

$$u_C(t) = I_m X_C \sin(\omega t - 45° - 90°) = 1{,}3\cdot 50\sin(\omega t - 135°) =$$

$$= 65\sin(1884t - 135°) \text{ В}.$$

Задача 2.7. Для определения активного сопротивления R и индуктивности L катушки в цепь синусоидального тока с частотой $f = 50$ Гц были включены вольтметр, амперметр и ваттметр. Показания приборов соответственно равны: $U_V = 65$ В; $I_A = 5$ А; $P_W = 128$ Вт.

Определить активное сопротивление и индуктивность катушки.

Решение. Активное (омическое) сопротивление катушки

$$R = \frac{P_W}{I_A^2} = \frac{128}{5^2} = 5{,}12 \text{ Ом}.$$

Полное сопротивление катушки в цепи синусоидального тока

$$Z = \frac{U_V}{I_A} = \frac{65}{5} = 13 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление катушки определится из треугольника сопротивлений в случае активно-индуктивного приемника:

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{13^2 - 5{,}12^2} = 11{,}95 \text{ Ом}.$$

Индуктивность катушки при этом

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{11{,}95}{2\pi \cdot 50} = 38 \text{ мГн}.$$

Задача 2.8. Индуктивную катушку сначала подключили к источнику постоянного напряжения 100 В, а затем к источнику синусоидального напряжения 100 В с частотой 50 Г. В первом случае ток равен 5 А, а во втором – 4 А. Определить активное сопротивление и индуктивность катушки. Активное сопротивление катушки считать равным ее постоянному сопротивлению в цепи постоянного тока.

Решение. По данным измерений в цепи постоянного тока

$$R = \frac{U}{I} = \frac{100}{5} = 20 \text{ Ом}.$$

По данным измерений в цепи синусоидального тока

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{100}{4} = 25 \text{ Ом}.$$

В соответствии с треугольником сопротивлений

$$X_L = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15 \text{ Ом}$$

и индуктивность катушки

$$L = \frac{X_{L0}}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} = \frac{15}{2\pi \cdot 50} \approx 0{,}048 \text{ Гн} = 48 \text{ мГн}.$$

Задача 2.9. В сеть с напряжением $U = 220$ В включены последовательно две 220-вольтовые лампы мощностью соответственно $P_1 = 500$ Вт и $P_2 = 300$ Вт. Считая сопротивления ламп неизменными, определить напряжение и мощность каждой лампы.

Решение. Для определения напряжения на зажимах каждой лампы находим их сопротивления по номинальным данным:

$$R_1 = \frac{U_{\text{ном}}^2}{P_{1\,\text{ном}}} = \frac{220^2}{500} = 96{,}8 \text{ Ом}; \quad R_2 = \frac{U_{\text{ном}}^2}{P_{2\,\text{ном}}} = \frac{220^2}{300} = 161{,}3 \text{ Ом}.$$

Тогда ток цепи

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{220}{96{,}8 + 161{,}3} = 0{,}85 \text{ А},$$

а напряжения на зажимах ламп соответственно равны:

$$U_1 = R_1 I = 96{,}8 \cdot 0{,}85 = 82{,}5 \text{ В}; \quad U_2 = R_2 I = 161{,}3 \cdot 0{,}85 = 137{,}5 \text{ В}.$$

Расчет показывает, что последовательное соединение приемников разной мощности в данном случае нецелесообразно, так как один из них находится под пониженным, а второй – под повышенным напряжением. Мощность каждого из них при этом отличается от номинальной:

$$P_1 = R_1 I^2 = 96{,}8 \cdot 0{,}852 = 70{,}3 \text{ Вт}; P_2 = R_2 I^2 = 161{,}3 \cdot 0{,}852 = 117{,}2 \text{ Вт}.$$

Задача 2.10. Лампа накаливания мощностью $P = 75$ Вт с номинальным напряжением $U_{\text{ном}} = 127$ В подключена последовательно с конденсатором к сети с напряжением $U = 220$ В и частотой $f = 50$ Гц.

Рассчитать емкость конденсатора C, при которой напряжение на лампе будет равно номинальному.

Решение. Используя номинальные данные лампы, определим ток в цепи:

$$I = \frac{P}{U_{\text{ном}}} = \frac{75}{127} = 0{,}59 \text{ А}.$$

Найдем падение напряжения на конденсаторе:

$$U_C = \sqrt{U^2 - U_{\text{ном}}^2} = \sqrt{220^2 - 127^2} = 179{,}6 \text{ В}.$$

Тогда сопротивление конденсатора

$$X_C = \frac{U_C}{I} = 304{,}4 \text{ Ом}.$$

Наконец, емкость конденсатора

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 304{,}4} = 10{,}46 \text{ мкФ}.$$

Задача 2.11. Мгновенное значение напряжения на входе цепи, состоящей из двух последовательно соединенных индуктивных катушек (рис. 2.2), – $u(t) = 120 \sin \omega t$ В. Параметры катушек: $R_1 = 50$ Ом, $L_1 = 4$ мГн, $R_2 = 10$ Ом, $L_2 = 20$ мГн; частота $f = 400$ Гц. Определить мгновенные значения напряжений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на катушках и показания приборов.

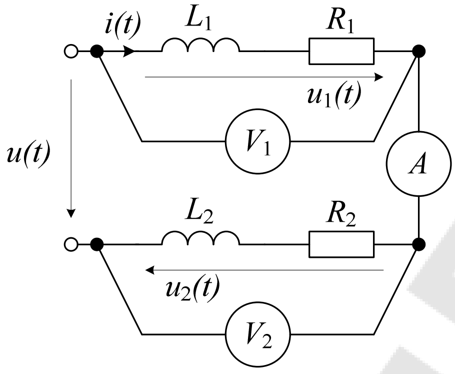


Рис. 2.2

Решение. Сопротивления индуктивных катушек:

$$X_{L1} = \omega L_1 = 2\pi f L_1 = 2\pi \cdot 400 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом};$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 2\pi f L_2 = 2\pi \cdot 400 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 50{,}3 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} = 50 + j10 = 51 e^{j11{,}3^\circ} \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 10 + j50{,}3 = 51{,}3 e^{j78{,}8^\circ} \text{Ом}.$$

Ток в катушках

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{120}{\sqrt{2}(50 + j10 + 10 + j50{,}3)} = \frac{120}{\sqrt{2} \cdot 85{,}1 e^{j45{,}1^\circ}} = 1 e^{-j45{,}1^\circ} \text{А}.$$

Комплексные амплитуды напряжений на катушках:

$$\underline{U}_{m1} = \sqrt{2} e^{-j45{,}1^\circ} \cdot 51 e^{j11{,}3^\circ} = 72{,}1 e^{-j33{,}8^\circ} \text{А};$$

$$\underline{U}_{m2} = \sqrt{2} e^{-J45{,}1^\circ} \cdot 51{,}3 e^{j78{,}8^\circ} = 72{,}5 e^{j33{,}7^\circ} \text{А}.$$

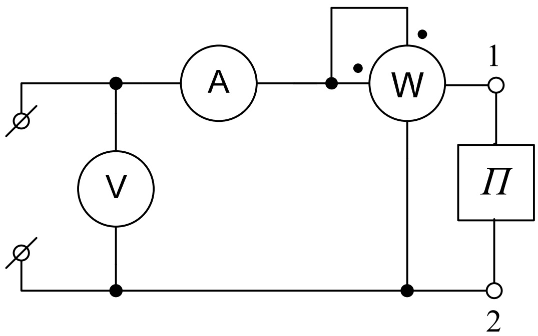
Мгновенные значения напряжений на катушках:

$$u_1(t) = 72{,}1 \sin(\omega t - 33{,}8^\circ) \text{ В}; \quad u_2(t) = 72{,}5 \sin(\omega t + 33{,}7^\circ) \text{ В}.$$

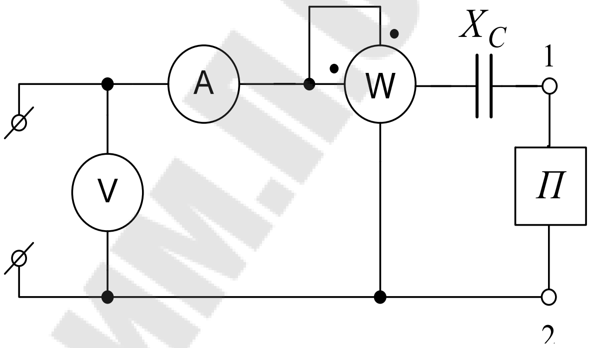
Показания приборов:

$$I_A = 1 \text{ А}; \quad U_{V1} \approx U_{V2} = 51 \text{ В}.$$

Задача 2.12. Для определения параметров эквивалентной схемы пассивного двухполюсника $П$ (рис. 2.3, *а*) измерены напряжение $U_1 = 26$ В, ток $I_1 = 4$ А и мощность $P_1 = 40$ Вт. Для определения характера реактивного сопротивления этого двухполюсника последовательно с ним включили конденсатор (рис. 2.3, *б*). В этом случае при том же приложенном напряжении приборы показали $I_2 = 5{,}53$ А, $P_2 = 76{,}5$ Вт. Частота переменного тока $f = 50$ Гц. Определить параметры эквивалентной схемы двухполюсника.



а)



б)

Рис. 2.3

Решение. Параметры эквивалентной схемы двухполюсника по данным первого опыта:

$$R_{эк} = \frac{P_1}{I_1^2} = \frac{40}{4^2} = 2{,}5 \text{ Ом}; \quad Z_{эк} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{26}{4} = 6{,}5 \text{ Ом};$$

$$X_{эк} = \sqrt{Z_{эк}^2 - R_{эк}^2} = \sqrt{6{,}5^2 - 2{,}5^2} = 6 \text{ Ом}.$$

Из данных второго эксперимента находим:

$$Z = \frac{U_1}{I_2} = \frac{26}{5{,}53} = 4{,}7 \text{ Ом};$$

$$X = \sqrt{Z^2 - R_{эк}^2} = \sqrt{4{,}7^2 - 2{,}5^2} = 4 \text{ Ом}.$$

Обработка данных второго эксперимента показывает, что емкостное сопротивление, соединенное последовательно с изучаемым двухполюсником, уменьшает общее реактивное сопротивление схемы:

$$X = \pm X_{эк} - X_C.$$

Это возможно лишь в том случае, если собственное реактивное сопротивление двухполюсника имеет индуктивный характер, т. е.

$$X_{\text{эк}} = +X_{\text{эк}}.$$

Соответственно, эквивалентная индуктивность двухполюсника равна:

$$L_{\text{эк}} = \frac{X_{\text{эк}}}{\omega} = \frac{6}{314} = 0{,}0191\ \text{Гн} = 19{,}1\ \text{мГн}.$$

Неизвестное значение дополнительно введенного емкостного сопротивления X_C можно определить следующим путем. В ходе решения установлено:

$$X_{\text{эк}} = +6\ \text{Ом};\quad X = +4\ \text{Ом}\quad \text{либо}\quad X = -4\ \text{Ом}.$$

Из данных второго эксперимента следует, что

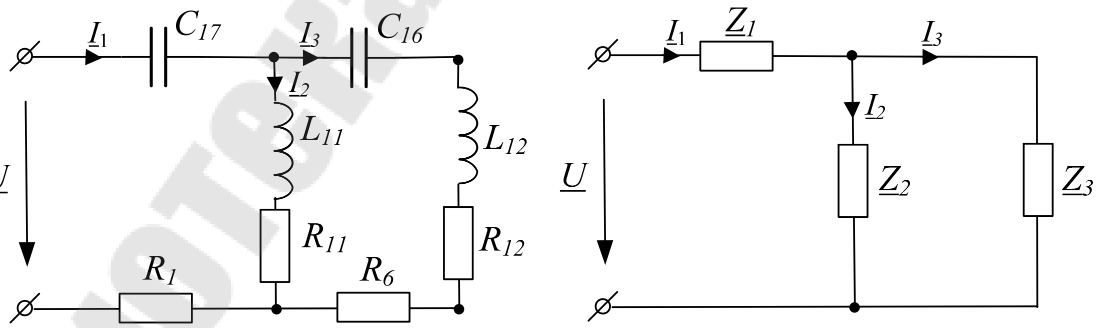
$$X = X_{\text{эк}} - X_C.$$

Отсюда получаем:

$$X_C = 2\ \text{Ом}\quad \text{либо}\quad X_C = 10\ \text{Ом}.$$

2.2. Символический метод расчета

Задача 2.13. В качестве иллюстрации применения символического метода рассмотрим пример расчета разветвленной электрической цепи синусоидального тока с одним источником энергии (рис. 2.4, *а*).



а) *б*)

Рис. 2.4

Исходные данные

Напряжение источника $U = 19$ В; частота $f = 500$ Гц.

Параметры пассивных элементов цепи: резисторов – $R_1 = 120$ Ом, $R_6 = 100$ Ом; индуктивных катушек – $R_{11} = 38{,}5$ Ом, $L_{11} = 31{,}2$ мГн и $R_{12} = 23$ Ом, $L_{12} = 33{,}2$ мГн; конденсаторов – $C_{16} = 1{,}55$ мкФ и $C_{17} = 2{,}25$ мкФ.

Необходимо:

1) рассчитать действующие значения токов в ветвях цепи;

2) составить баланс активных и реактивных мощностей;

3) рассчитать комплексные потенциалы узлов и промежуточных точек цепи;

4) построить векторную лучевую диаграмму токов и топографическую векторную диаграмму напряжений.

Решение. Для расчета подобных цепей удобно использовать *метод эквивалентных преобразований*, согласно которому участки заданной цепи с параллельным и последовательным соединениями элементов заменяют одним эквивалентным пассивным элементом, последовательно соединенным с источником напряжения.

Вначале следует определить угловую частоту напряжения источника ω:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 500 = 3142 \text{ с}^{-1},$$

затем – реактивные сопротивления индуктивных катушек и конденсаторов:

$$X_{11} = \omega L_{11} = 3142 \cdot 31{,}2 \cdot 10^{-3} = 98 \text{ Ом};$$

$$X_{12} = \omega L_{12} = 3142 \cdot 33{,}2 \cdot 10^{-3} = 104 \text{ Ом};$$

$$X_{16} = \frac{1}{\omega C_{16}} = \frac{1}{3142 \cdot 1{,}55 \cdot 10^{-6}} = 205 \text{ Ом};$$

$$X_{17} = \frac{1}{\omega C_{17}} = \frac{1}{3142 \cdot 2{,}25 \cdot 10^{-6}} = 141{,}5 \text{ Ом}.$$

Комплексные сопротивления ветвей цепи соответственно будут равны:

$$\underline{Z}_1 = R_1 - jX_{17} = 120 - j141{,}5 = 185{,}5e^{-j49{,}7^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{11} = R_{11} + jX_{11} = 38{,}5 + j98 = 105e^{68{,}6^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_3 = R_6 + \underline{Z}_{12} - jX_{16} = (R_6 + R_{12}) + j(X_{12} - X_{16}) =$$

$$= (100 + 23) + j(104 - 205) = 123 - j101 = 159e^{-j39{,}4^\circ} \text{ Ом}.$$

Далее расчетную схему замещения можно представить в виде смешанного соединения комплексных сопротивлений $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ и $\underline{Z}_3$ (рис. 2.4, *б*).

Входное комплексное сопротивление, очевидно, будет равно:

$$\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 120 - j141{,}5 + \frac{(38{,}5 + j98)(123 - j101)}{38{,}5 + j98 + 123 - j101} =$$

$$= 209{,}6 - j89 = 228e^{-j23^\circ}\text{Ом}.$$

Задавшись произвольным значением начальной фазы напряжения (в данном примере $\psi_u = 0$), не представляет особого труда определить ток $\underline{I}_1$ в неразветвленной части цепи по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{19}{209{,}6 - j89} = 0{,}077 + j0{,}033 = 0{,}0834e^{j23^\circ}\ \text{А}$$

и токи $\underline{I}_2$ и $\underline{I}_3$ в параллельных ветвях:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \left(0{,}077 + j0{,}033\right) \frac{123 - j101}{38{,}5 + j98 + 123 - j101} =$$

$$= 0{,}079 - j0{,}0216 = 0{,}0822e^{-j15{,}3^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \left(0{,}077 + j0{,}033\right) \frac{38{,}5 + j98}{38{,}5 + j98 + 123 - j101} =$$

$$= -0{,}0026 + j0{,}0545 = 0{,}0544e^{j92{,}7^\circ}\ \text{А}.$$

Баланс активных и реактивных мощностей

Комплексная мощность, развиваемая источником, определяется в виде:

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{U}\overset{*}{\underline{I}}_1 = 19 \cdot 0{,}0834e^{-j23^\circ} = 1{,}577e^{-j23^\circ} = (1{,}459 - j0{,}619)\ \text{В} \cdot \text{А};$$

где $P_{\text{ист}} = Re\underline{S} = 1{,}459$ Вт – активная мощность источника; $Q_{\text{ист}} = I_m\underline{S} = -0{,}619$ вар – реактивная мощность источника.

Мощность, потребляемая приемниками:

– активная

$$P_{\text{пр}} = R_1 I_1^2 + (R_6 + R_{12}) I_2^2 + R_{11} I_3^2 =$$

$$= 120 \cdot 0{,}0834^2 + (100 + 23)0{,}0544^2 + 38{,}5 \cdot 0{,}0822^2 = 1{,}459\ \text{Вт};$$

– реактивная

$$Q_{\text{пр}} = -X_{17}I_1^2 + X_{11}I_2^2 + (X_{12} - X_{16}) =$$

$$= -141{,}5 \cdot 0{,}0834^2 + 98 \cdot 0{,}0822^2 + (104 - 205)0{,}0544^2 = -0{,}617 \text{ вар}.$$

Относительная ошибка вычислений:

$$\delta_P\,\% = \frac{P_{\text{ист}} - З_{\text{пр}}}{0{,}5(P_{\text{ист}} + З_{\text{пр}})}100\,\% = \frac{1{,}459 - 1{,}459}{0{,}5(1{,}459 + 1{,}459)}100\,\% = 0.$$

Далее для построения топографической векторной диаграммы напряжений узлы и промежуточные точки (в ветви с тремя элементами) обозначим буквами a, b, c, d, f и g (рис. 2.5), предварительно считая комплексный потенциал точки g равным нулю. На диаграмме (рис. 2.5) поместим эту точку в начало координат комплексной плоскости.

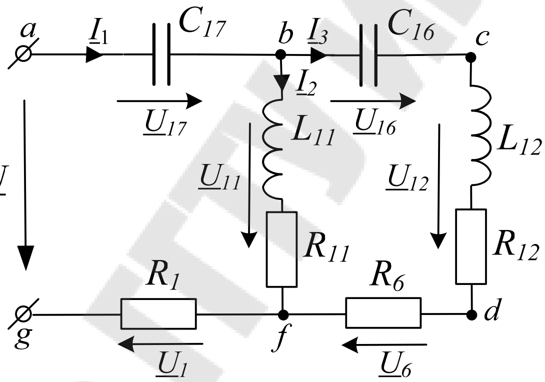


Рис. 2.5

Комплексные потенциалы остальных точек цепи будут равны:

$$\underline{\varphi}_g = 0;$$

$$\underline{\varphi}_f = \underline{\varphi}_g + R_1\underline{I}_1 = 120 \cdot 0{,}0834e^{j23^\circ} = 10e^{j23^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_d = \underline{\varphi}_f + R_6\underline{I}_3 = 10e^{j23^\circ} + 100 \cdot 0{,}0544e^{j92{,}7^\circ} = 12{,}94e^{j46{,}2^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_c = \underline{\varphi}_d + (R_{12} + jX_{12})\underline{I}_3 = 12{,}94e^{j46{,}2^\circ} +$$

$$+ (23 + j104{,}3)0{,}0544e^{j92{,}7^\circ} = 10{,}8e^{j72{,}6^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_c + (-jX_{16})\underline{I}_3 = 10{,}8e^{j72{,}6^\circ} + (-j205{,}4)0{,}0544e^{92{,}7^\circ} = 18e^{j37^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{\varphi}_a = \underline{\varphi}_b + (-jX_{17})\underline{I}_1 = 18e^{j37^\circ} +$$
$$+ (-j141{,}5)0{,}0834e^{j23^\circ} = 18{,}99 + j0{,}03 \approx 19e^{j0^\circ} \text{ В};$$
$$\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_f + (R_{11} + jX_{11})\underline{I}_2 = 10e^{j23^\circ} + (38{,}5 + j98)0{,}0822e^{-j15{,}3^\circ} = 18e^{j37^\circ} \text{ В}.$$

Выбрав масштабы тока m_I и напряжения m_U, строим векторную лучевую диаграмму токов и топографическую диаграмму комплексных потенциалов (рис. 2.6). При этом каждая точка на комплексной плоскости соответствует каждой точке схемы:

1. Согласно первому закону Кирхгофа выполняется равенство $\underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_1$, в чем нетрудно убедиться, построив параллелограмм, сторонами которого являются векторы $\underline{I}_2$ и $\underline{I}_3$.

2. Точка a в результате построений оказалась на оси +1. Следовательно, напряжение $\underline{U}_{ag}$ имеет фазу, равную 0, как было принято в расчете.

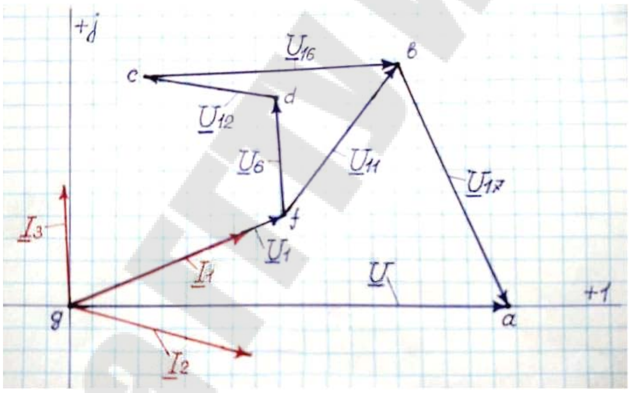


Рис. 2.6

Кроме того, напряжение между точками a и g оказалось равным $U_{ag} = l_{ag} m_U = 19$ В, что также соответствует условию задачи.

По топографической диаграмме легко определить вектор напряжения между любыми двумя произвольными точками цепи. Например, разность потенциалов между точками b и f может быть представлена вектором $\underline{U}_{11} = \underline{U}_{bf} = \underline{\varphi}_b - \underline{\varphi}_f$, направленным от точки f к точке b в полном соответствии с правилом вычитания векторов. То же подтверждает равенство $\underline{\varphi}_b = \underline{\varphi}_f + \underline{U}_{bf}$.

3. При наличии векторов на топографической диаграмме становится очевидным, что векторы напряжений $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_6$ на активных со-

противлениях совпадают по фазе с векторами соответствующих токов $\underline{I}_1$ и $\underline{I}_3$; векторы напряжений $\underline{U}_{16}$ и $\underline{U}_{17}$ на конденсаторах отстают от векторов токов $\underline{I}_3$ и $\underline{I}_1$ на угол 90°; наконец, векторы $\underline{U}_{11}$ и $\underline{U}_{12}$ опережают векторы токов $\underline{I}_2$ и $\underline{I}_3$ соответственно на 68,6° и 77,6°, что легко определить с помощью линейки и транспортира.

Приведенный анализ показывает, что расчет заданной цепи выполнен правильно.

Задача 2.14. Определить все токи (рис. 2.7, *а*), если $E = 100$ В; $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $X_L = 30$ Ом, $X_{C_1} = 40$ Ом, $X_{C_2} = 50$ Ом.

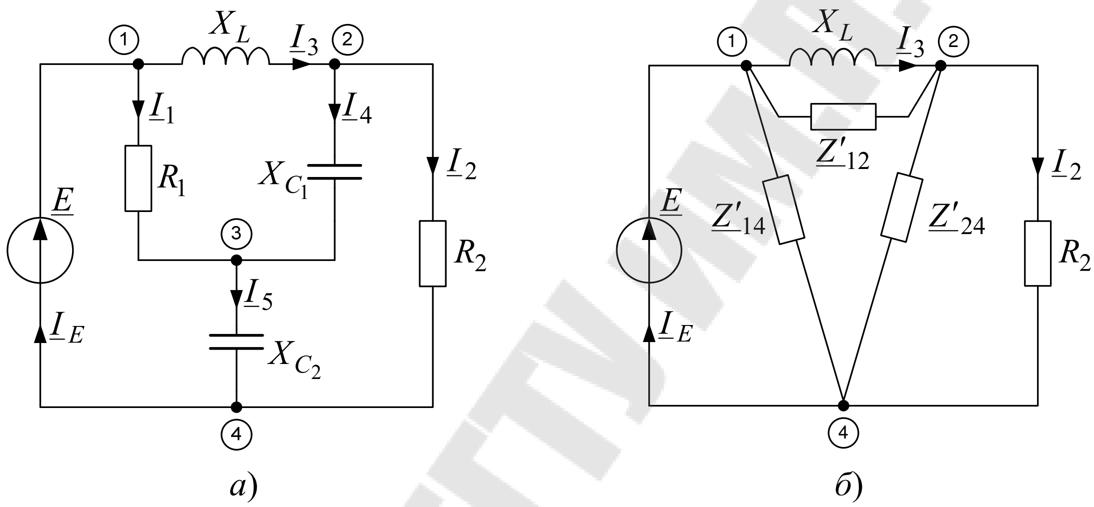


Рис. 2.7

Решение. Расчет схемы целесообразно начать с преобразования звезды сопротивлений R_1, X_{C_1} и X_{C_2} в эквивалентный треугольник, вершины которого будут располагаться в узлах 1, 2 и 4, а стороны имеют сопротивления:

$$\underline{Z}'_{14} = R_1 - jX_{C_2} + \frac{R_1(-jX_{C_2})}{-jX_{C_1}} = 10 - j50 + \frac{10(-j50)}{-j40} = 54{,}83e^{-j65{,}77^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{12} = R_1 - jX_{C_1} + \frac{R_1(-jX_{C_1})}{-jX_{C_2}} = 10 - j40 + \frac{10(-j40)}{-j50} = 43{,}86e^{-j56{,}77^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}'_{24} = -jX_{C_1} - jX_{C_2} + \frac{-jX_{C_1}(-jX_{C_2})}{R_1} = -j40 - j50 + \frac{-j50(-j40)}{10} =$$

$$= 219{,}32e^{-j155{,}77^\circ} \text{ Ом}.$$

После преобразования схема замещения примет вид, приведенный на рис. 2.7, *б*.

Сопротивления межузловых участков этой схемы будут равны:

$$\underline{Z}_{12} = \frac{jX_L \underline{Z}'_{12}}{jX_L + \underline{Z}'_{12}} = \frac{j30 \cdot 43{,}86e^{-j56{,}77^\circ}}{j30 + 43{,}86e^{j65{,}77^\circ}} = 63{,}91e^{j53{,}28^\circ}\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{24} = \frac{R_2 \underline{Z}'_{24}}{R_2 + \underline{Z}'_{24}} = \frac{20 \cdot 219{,}32e^{-j155{,}77^\circ}}{20 + 219{,}32e^{-j155{,}77^\circ}} = 21{,}79e^{-j2{,}34^\circ}\ \text{Ом}.$$

Входное сопротивление схемы относительно зажимов источника

$$\underline{Z}_{14} = \frac{\underline{Z}'_{14}\underline{Z}_{124}}{\underline{Z}'_{14} + \underline{Z}_{124}},$$

где

$$\underline{Z}_{124} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{24} = 63{,}91e^{j53{,}28^\circ} + 21{,}79e^{-j2{,}34^\circ} = 78{,}31e^{j40^\circ}\ \text{Ом}.$$

Учитывая это, получим:

$$\underline{Z}_{\text{экв}} = \frac{\underline{Z}'_{14} Z_{124}}{\underline{Z}'_{14} + Z_{124}} = \frac{54{,}83e^{-j65{,}77^\circ} \cdot 78{,}31e^{j40^\circ}}{54{,}83e^{-j65{,}77^\circ} + 78{,}31e^{j40^\circ}} = 52{,}1e^{-j26{,}01^\circ}\ \text{Ом}.$$

Рассчитываем токи:

$$\underline{I}_E = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\text{экв}}} = \frac{100e^{j0^\circ}}{52{,}1e^{-j26{,}01^\circ}} = 1{,}92e^{j26{,}01^\circ} = 1{,}73 + j0{,}84\ \text{А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_E \frac{\underline{Z}'_{14}}{\underline{Z}'_{14} + \underline{Z}_{124}} \cdot \frac{\underline{Z}'_{12}}{\underline{Z}'_{12} + jX_L}; \qquad \underline{I}_2 = \underline{I}_E \frac{\underline{Z}'_{14}}{\underline{Z}'_{14} + \underline{Z}_{124}} \cdot \frac{\underline{Z}'_{24}}{R_2 + \underline{Z}'_{24}}.$$

Подставляя численные значения, получим:

$$\underline{I}_3 = 1{,}92e^{j26{,}01^\circ} \frac{54{,}8e^{-j65{,}77^\circ}}{54{,}8e^{-j65{,}77^\circ} + 78{,}3e^{j40^\circ}} \cdot \frac{43{,}9e^{-j65{,}77^\circ}}{43{,}9e^{-j65{,}77^\circ} + j30} =$$

$$= 2{,}72e^{-j76{,}72^\circ} = 0{,}62 - j2{,}65\ \text{А};$$

$$\underline{I}_2 = 1{,}92e^{-j26{,}01^\circ} \frac{54{,}8e^{-j65{,}77^\circ}}{54{,}8e^{-j65{,}77^\circ} + 78{,}3e^{j40^\circ}} \cdot \frac{219{,}3e^{-j155{,}77^\circ}}{20 + 219{,}3e^{-j155{,}77^\circ}} =$$

$$= 1{,}39e^{-j42{,}34^\circ} = 1{,}03 - j0{,}94\ \text{А};$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_E - \underline{I}_3 = 1{,}73 + j0{,}84 - 0{,}625 + j2{,}65 = 3{,}66e^{j72{,}48°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_4 = \underline{I}_3 - \underline{I}_2 = 2{,}72e^{-j76{,}72°} - 1{,}39e^{-j42{,}34°} = 1{,}76e^{-j103{,}29°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_5 = \underline{I}_1 + \underline{I}_4 = 3{,}66e^{-j72{,}48°} + 1{,}76e^{-j103{,}29°} = 1{,}91e^{j68{,}58°}\ \text{А}.$$

Составим баланс мощностей:

$$\widetilde{S} = \underline{E} \cdot I_E^* = 100e^{j0°} \cdot 1{,}92e^{-j26{,}01°} = (173 - j84{,}2)\ \text{В} \cdot \text{А};$$

$$P_{\text{ист}} = Re\widetilde{S} = \underline{E}I_E^* = 173\ \text{Вт}; \qquad Q_{\text{ист}} = I_m\widetilde{S} = -84{,}2\ \text{вар};$$

$$P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 = 3{,}66^2 \cdot 10 + 1{,}39^2 \cdot 20 = 173\ \text{Вт};$$

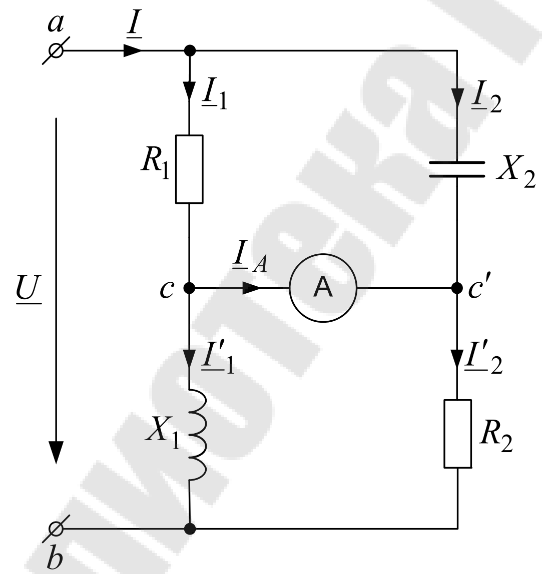
$$Q_{\text{пр}} = I_3^2 X_L + I_4^2(-X_{C_1}) + I_5^2(-X_{C_2}) =$$

$$= 2{,}72^2 \cdot 30 + 1{,}76^2(-40) + 1{,}91^2(-50) = -84{,}2\ \text{вар};$$

173 Вт = 173 Вт; – 84,2 вар = – 84,2 вар,

т. е. $P_{\text{ист}} = P_{\text{пр}}$; $Q_{\text{ист}} = Q_{\text{пр}}$.

Задача 2.15. Определить показания амперметра в схеме (рис. 2.8, *а*), если $U = 120$ В, $R_1 = 15$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $X_1 = 25$ Ом, $X_2 = 10$ Ом.



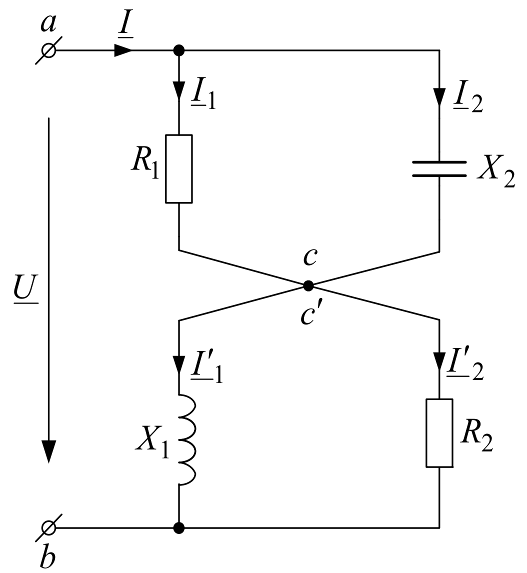


Рис. 2.8

Решение. Поскольку амперметр идеальный $(Z_A = 0)$, участок cc' является короткозамкнутым. Эквивалентная схема представлена на рис. 2.8, *б*.

Общее сопротивление такой цепи:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{ac} + \underline{Z}_{cb};$$

$$\underline{Z}_{ac} = \frac{R_1(-jX_2)}{R_1 - jX_2} = \frac{15(-j10)}{15 - j10} = 8{,}3e^{-j56{,}31^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{cb} = \frac{R_2(jX_1)}{R_2 + jX_1} = \frac{30 \cdot j25}{30 + j25} = 19{,}2e^{j50{,}19^\circ} \text{ Ом}.$$

Следовательно,

$$\underline{Z} = 8{,}3e^{-j56{,}31^\circ} + 19{,}2e^{j50{,}19^\circ} = 18{,}6e^{j24{,}83^\circ} \text{Ом}.$$

Поскольку в условии задачи нет особых указаний о начальной фазе входного напряжения, примем $\underline{U} = 120e^{j0^\circ}$ В.

Тогда

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{120e^{j0^\circ}}{18{,}6e^{j24{,}83^\circ}} = 6{,}4e^{-j24{,}83^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}\frac{-jX_2}{R_1 - jX_2} = 6{,}4e^{-j24{,}83^\circ}\frac{-j10}{15 - j10} = 3{,}6e^{-j81{,}13^\circ} = (0{,}55 - j3{,}52) \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}\frac{R_1}{R_1 - jX_2} = \underline{I} - \underline{I}_1 = 6{,}4e^{-j24{,}83^\circ} - 3{,}6e^{-j81{,}3^\circ} = (5{,}29 + j0{,}82) \text{ А};$$

$$\underline{I'}_1 = \underline{I}\frac{R_2}{R_2 + jX_1} = 6{,}4e^{-j24{,}83^\circ}\frac{-j30}{30 - j25} = 4{,}9e^{-j75{,}02^\circ} = (1{,}27 - j4{,}78) \text{ А};$$

$$\underline{I'}_2 = \underline{I}\frac{jX_1}{R_2 + jX_1} = \underline{I} - \underline{I'}_1 = (-0{,}72 + j1{,}26) = 1{,}45e^{j119{,}74^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_A = \underline{I}_1 - \underline{I'}_1 = \underline{I'}_2 - I_2 = (-6{,}01 + j0{,}44) = 6{,}02e^{j175{,}81^\circ} \text{ А}.$$

Следовательно, показание амперметра $I_A = 6{,}02$ А.

Задача 2.16. В схеме (рис. 2.9, *а*) заданы $e_1(t) = 80\sin(\omega t + 60^{\circ})$ В; $e_2(t) = 120\cos(\omega t - 60^{\circ})$ В, $R_1 = R_3 = 40$ Ом; $X_1 = X_2 = X_3 = 50$ Ом. Определить все токи.

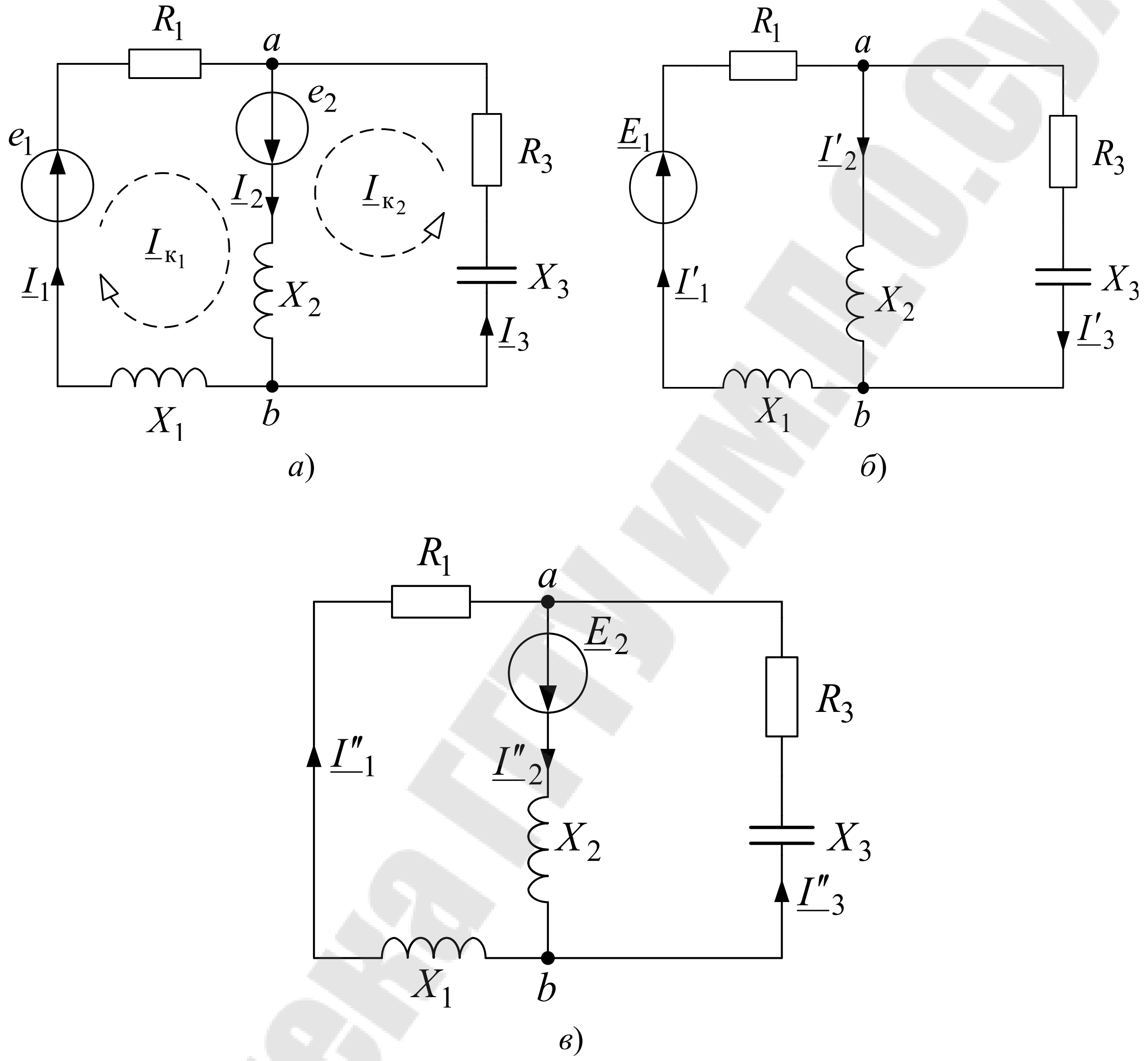


Рис. 2.9

Решение. Для расчета токов в символической форме необходимо перейти от мгновенных значений ЭДС к комплексам их действующих значений. При этом ЭДС e_2 необходимо заменить эквивалентной синусоидой, т. е. представить в виде:

$$e_2(t) = 120\cos(\omega t - 60°) = 120\sin(\omega t - 60° + 90°) = 120\sin(\omega t + 30°) \text{ В.}$$

Комплексы действующих значений ЭДС соответственно будут равны:

$$\underline{E}_1 = \frac{80}{\sqrt{2}} e^{j60°} = 56{,}6 e^{j60°} = (28{,}3 + j49) \text{ В};$$

$$\underline{E}_2 = \frac{120}{\sqrt{2}} e^{j30°} = 84{,}9 e^{j30°} = (73{,}5 + j42{,}5) \text{ В}.$$

Расчет токов в заданной цепи, очевидно, может быть выполнен различными методами, что будет показано ниже.

Метод контурных токов

Перед началом расчета произвольно выберем условные положительные направления истинных (I_1, I_2, I_3) и контурных $(I_{к_1}, I_{к_2})$ токов, например так, как показано на рис. 2.9, *а*. После этого запишем уравнения по второму закону Кирхгофа для контурных токов:

$$\begin{cases} (R_1 + jX_1 + jX_2)\underline{I}_{к1} + jX_2 \underline{I}_{к_2} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2; \\ jX_2 \underline{I}_{к_1} + (R_3 + jX_2 - jX_3)\underline{I}_{к_2} = \underline{E}_2. \end{cases}$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$\begin{cases} (40 + j50 + j50)\underline{I}_{к1} + j50\underline{I}_{к_2} = 56{,}6e^{j60°} + 84{,}9e^{j30°}; \\ j50\underline{I}_{к_1} + (40 + j50 - j50)\underline{I}_{к_2} = 84{,}9e^{j30°}. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим контурные токи:

$$\underline{I}_{к_1} = 1{,}08e^{-j44{,}3°} = (0{,}77 - j0{,}75) \text{ А}; \ \underline{I}_{к_2} = 0{,}9e^{j6{,}1°} = (0{,}89 + j0{,}095) \text{ А}.$$

Истинные токи будут равны:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{к_1}; \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_{к_2};$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{к_1} + \underline{I}_{к_2} = 1{,}66 - j0{,}66 = 1{,}79e^{-j21{,}6°} \text{ А}.$$

Метод узловых потенциалов

Считая потенциал узла b равным 0, определим напряжение между узлами a и b в виде:

$$\underline{U}_{ab}=\frac{\dfrac{\underline{E}_1}{R_1+jX_1}-\dfrac{\underline{E}_2}{jX_2}}{\dfrac{1}{R_1+jX_1}+\dfrac{1}{jX_2}+\dfrac{1}{R_3-jX_3}}=\frac{\dfrac{28{,}3+j49}{40+j50}-\dfrac{73{,}5+j42{,}5}{j50}}{\dfrac{1}{40+j50}+\dfrac{1}{j50}+\dfrac{1}{40-j50}}=$$

$$=-40{,}4+j40{,}7=57{,}4e^{j134{,}4^\circ}\ \text{В}.$$

Тогда искомые токи будут равны:

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{E}_1-\underline{U}_{ab}}{R_1+jX_1}=\frac{56{,}6e^{j60^\circ}-57{,}4e^{-j134{,}4^\circ}}{40+j50}=1{,}08e^{-j44{,}46^\circ}=(0{,}77-j0{,}75)\ \text{А};$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{E}_2+\underline{U}_{ab}}{jX_2}=\frac{84{,}9e^{j30^\circ}+57{,}4e^{-j134{,}4^\circ}}{j50}=1{,}79e^{-j21{,}59^\circ}=(1{,}66-j0{,}66)\,\text{А};$$

$$\underline{I}_3=\frac{-\underline{U}_{ab}}{R_3-jX_3}=\frac{-57{,}4e^{-j134{,}4^\circ}}{40-j50}=0{,}89e^{-j6{,}16^\circ}=(0{,}89+j0{,}096)\ \text{А}.$$

Метод наложения

Заданная цепь (рис. 2.9, *а*) содержит два источника питания.

Вначале рассмотрим частичную схему, в которой действует только источник e_1, а источник e_2 заменен короткозамкнутым участком (рис. 2.9, *б*).

В этой схеме протекают частичные токи, равные:

$$\underline{I}'_1=\frac{\underline{E}_1}{R_1+jX_1+\dfrac{jX_2(R_3-jX_3)}{R_3+j(X_2-X_3)}}=0{,}4e^{j15{,}5^\circ}=(0{,}38+j0{,}11)\ \text{А};$$

$$\underline{I}'_2=\underline{I}'_1\frac{R_3-jX_3}{R_3+j(X_2-X_3)}=0{,}64e^{-j35{,}6^\circ}=(0{,}52-j0{,}37)\ \text{А};$$

$$\underline{I}'_3=\underline{I}'_1\frac{-jX_2}{R_3+j(X_2-X_3)}=\underline{I}'_1-\underline{I}'_2=0{,}5e^{-j74{,}5^\circ}=(0{,}14-j0{,}48)\ \text{А}.$$

Затем рассмотрим частичную схему (рис. 2.9, *в*), в которой короткозамкнутым участком заменен источник ЭДС e_1. В ней протекают частичные токи:

$$\underline{I}''_2 = \frac{\underline{E}_2}{jX_2 + \dfrac{(R_1 + jX_1)(R_3 - jX_3)}{R_3 + R_1 + j(X_1 - X_3)}} = 1{,}19e^{-j14{,}3^\circ} = (1{,}15 - j0{,}29)\ \text{А};$$

$$\underline{I}''_1 = \underline{I}''_2 \frac{R_3 - jX_3}{R_3 + R_1 + j(X_1 - X_3)} = 0{,}95e^{-j65{,}6^\circ} = (0{,}39 - j0{,}87)\ \text{А};$$

$$\underline{I}''_3 = \underline{I}''_2 \frac{R_1 + jX_1}{R_3 + R_1 + j(X_1 - X_3)} = \underline{I}''_2 - \underline{I}''_1 = 0{,}95e^{-j37^\circ} = (0{,}76 - j0{,}57)\ \text{А}.$$

Истинные токи в цепи на рис. 2.9, *а* выражаются алгебраическими суммами соответствующих частичных токов:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_1 + \underline{I}''_1 = (0{,}77 - j0{,}76)\ \text{А}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}'_2 + \underline{I}''_2 = (1{,}67 - j0{,}66)\ \text{А};$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}'_3 - \underline{I}''_3 = (0{,}9 + j0{,}09)\ \text{А}.$$

Для проверки составим баланс мощностей.

Полная комплексная мощность источников:

$$\widetilde{S} = \underline{I}_1^* \underline{E}_1 + \underline{I}_2^* \underline{E}_2 .$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$\widetilde{S} = 1{,}08e^{j44{,}62^\circ} \cdot 56{,}6e^{j60^\circ} + 1{,}8e^{j21{,}5^\circ} \cdot 84{,}9e^{j30^\circ} = (78{,}8 + j178)\ \text{В} \cdot \text{А};$$

$$P_{\text{ист}} = Re\widetilde{S} = 78{,}8\ \text{Вт}; \quad Q_{\text{ист}} = I_m\widetilde{S} = 178\ \text{вар};$$

$$P_{\text{пр}} = I_1^2 R_1 + I_3^2 R_3 = 1{,}081^2 \cdot 40 + 0{,}896^2 \cdot 40 = 78{,}851\ \text{Вт};$$

$$Q_{\text{пр}} = I_1^2 X_1 + I_2^2 X_2 + I_3^2(-X_3) = 1{,}08^2 \cdot 50 + 1{,}78^2 \cdot 50 + 0{,}89^2(-50) = 178{,}3\ \text{Вт}.$$

В итоге:

$$P_{\text{ист}} = P_{\text{пр}},\ \text{или}\ \ 78{,}8 = 78{,}8\ \text{Вт}; \quad Q_{\text{ист}} = Q_{\text{пр}},\ \text{или}\ \ 178{,}3 = 178{,}3\ \text{вар}.$$

Задача 2.17. В схеме (рис. 2.10, *а*) определить показание электромагнитного амперметра, если R_1 = 15 Ом, R_2 = 25 Ом, $X_1 = 18$ Ом, $X_2 = 10$ Ом, $e(t) = 180\cos(\omega t + 30^\circ)$ В, $i_J(t) = 5\sin(\omega t - 45^\circ)$ А.

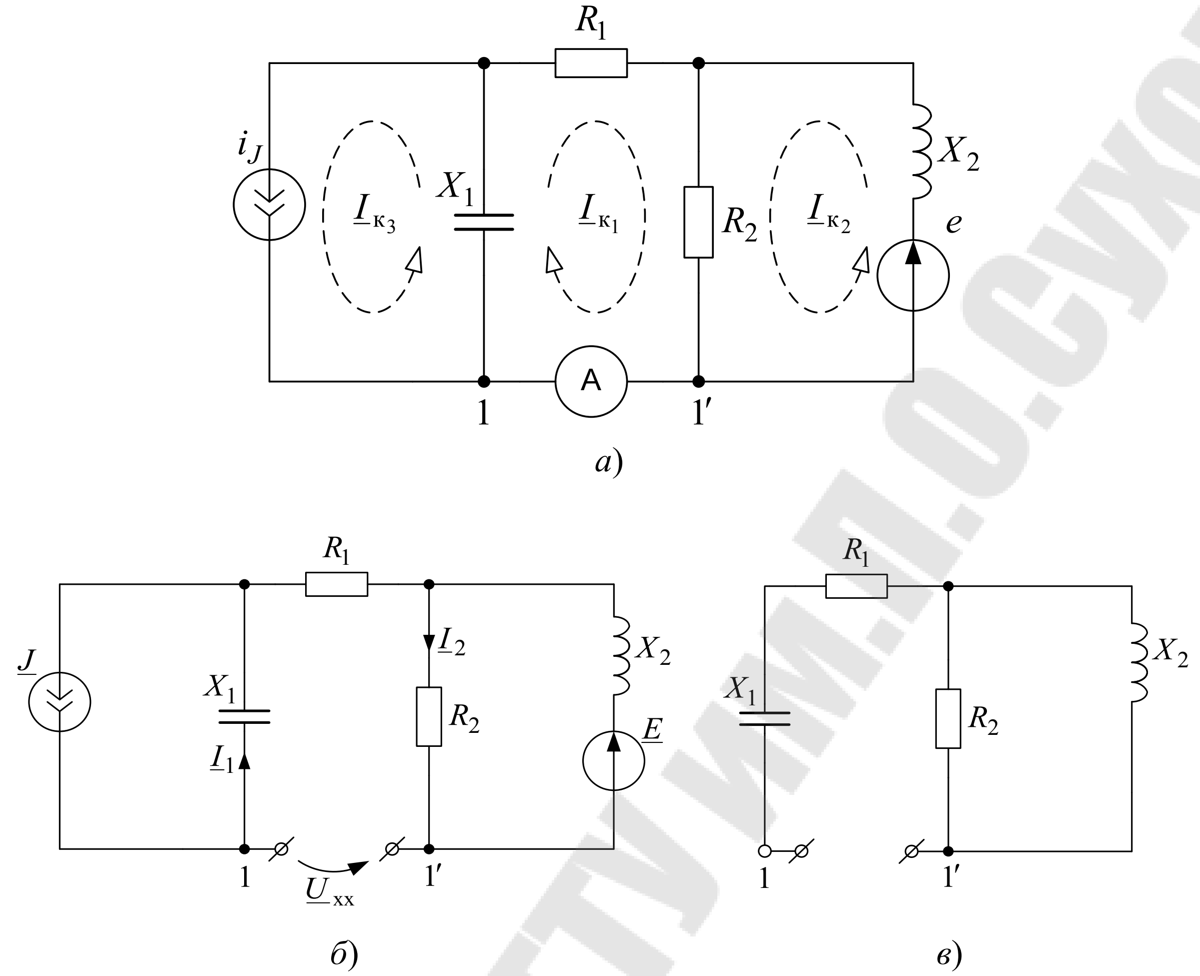


Рис. 2.10

Решение. Поскольку в задаче требуется рассчитать ток только в одной ветви, используем метод эквивалентного генератора. Схема в режиме холостого хода приведена на рис. 2.10, *б*.

В этой схеме протекают токи:

$$\underline{I}_1 = \underline{J} = \frac{5}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ} = 3{,}54 e^{-j45^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{E}}{R_2 + jX_2} = \frac{180 e^{j120^\circ}}{\sqrt{2}(25 + j10)} = 4{,}73 e^{j98{,}2^\circ} \text{ А.}$$

Напряжение холостого хода при этом:

$$\underline{U}_{\text{хх}} = -jX_1 \underline{I}_1 + R_2 \underline{I}_2 =$$

$$= -j18 \cdot 3{,}54 e^{-j45^\circ} + 25 \cdot 4{,}73 e^{j98{,}2^\circ} = 94{,}95 e^{j130{,}5^\circ} \text{ В.}$$

Чтобы рассчитать внутреннее сопротивление эквивалентного генератора, необходимо в схеме холостого хода изъять ветвь, содержащую источник тока, и заменить источник ЭДС короткозамкнутым участком. В нашем случае после такого преобразования получится схема, приведенная на рис. 2.10, *в*.

Входное сопротивление этой схемы (равное внутреннему сопротивлению эквивалентного генератора):

$$\underline{Z}_{\text{вн}} = \underline{Z}_{11'} = -jX_1 + R_1 + \frac{R_2(jX_2)}{R_2 + jX_2} =$$

$$= -j18 + 15 + \frac{25 \cdot j10}{25 + j10} = 18{,}45 - j9{,}38 = 20{,}7e^{-j27^\circ} \text{ Ом.}$$

Искомый ток в амперметре, внутреннее сопротивление которого пренебрежимо мало, равен:

$$\underline{I}_{11'} = \underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{\text{хх}}}{\underline{Z}_{\text{вн}}} = \frac{\underline{U}_{\text{хх}}}{\underline{Z}_{\text{вн}}} = 4{,}59e^{j157{,}56^\circ} \text{ А.}$$

2.3. Резонансные режимы в цепи синусоидального тока

Задача 2.18. В цепи (рис. 2.11) индуктивная катушка с сопротивлением $R_{\text{к}} = 100$ Ом и индуктивностью $L = 100$ мГн соединена последовательно с конденсатором, емкость которого равна $C = 10$ мкФ. Определить: а) резонансную частоту последовательного колебательного контура; б) напряжение на индуктивной катушке и конденсаторе при резонансе, если $U = 50$ В.

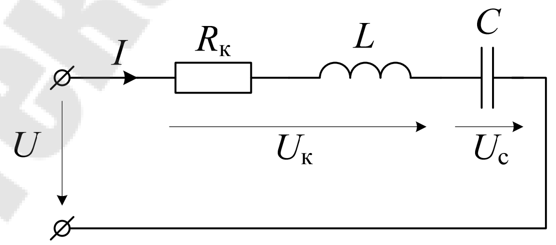


Рис. 2.11

Решение. Как известно, при резонансе напряжений

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 10^3 \text{ с}^{-1}.$$

Реактивные сопротивления катушки и конденсатора будут одинаковы и равны:

$$X_{L0} = \omega_0 L = 10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-3} = 100 \text{ Ом};$$

$$X_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 100 \text{ Ом}.$$

Следовательно, полное сопротивление цепи будет активным и равным:

$$\underline{Z}_0 = R + jX_{L0} - jX_{C0} = 100 \text{ Ом}.$$

Ток в цепи

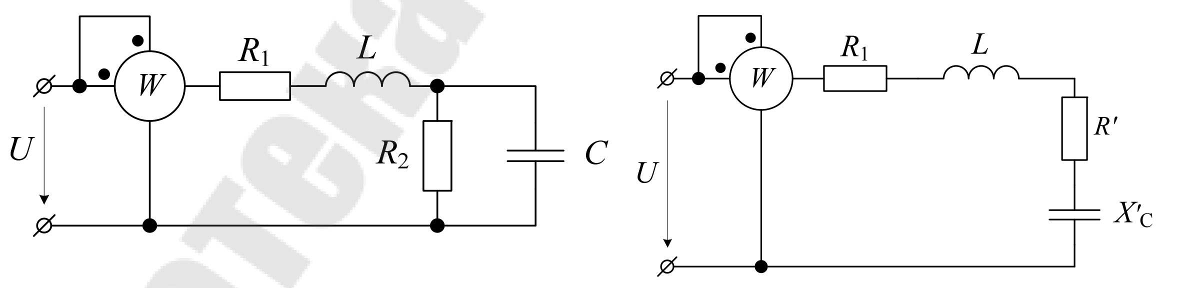
$$I = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R} = \frac{50}{100} = 0{,}5 \text{ А}.$$

Наконец, напряжения на индуктивной катушке и конденсаторе:

$$U_{\text{к}} = Z_{\text{к}} I = \sqrt{R_{\text{к}}^2 + X_{L0}^2} \cdot I = \sqrt{100^2 + 100^2} \cdot 0{,}5 = 70{,}7 \text{ В};$$

$$U_C = X_{C0} \cdot I = 100 \cdot 0{,}5 = 50 \text{ В}.$$

Задача 2.19. В цепи (рис. 2.12, *а*) $U = 100$ В, $f = 400$ Гц, $R_1 = 35$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $C = 13{,}3$ мкФ. Определить индуктивность L, при которой в цепи наблюдается резонанс. Рассчитать показание ваттметра при резонансе.



а) *б*)

Рис. 2.12

Решение. Предварительно определим комплексное сопротивление идеального конденсатора в виде:

$$\underline{Z}_C = -jX_C = -j\frac{1}{2\pi fC} = -J\frac{1}{2\pi \cdot 400 \cdot 13{,}3 \cdot 10^{-6}} = -j30 = 30e^{-j90^\circ} \text{ Ом}.$$

Далее заменим параллельное соединение резистора R_2 и конденсатора эквивалентным последовательным:

$$\underline{Z}_{\text{экв}} = \frac{R_2 \underline{Z}_C}{R_2 + \underline{Z}_C} = \frac{20 \cdot 30 e^{-j90^\circ}}{20 - j30} = 13{,}85 - j9{,}23 = (R_2' \ - jX_C') \text{ Ом.}$$

В результате исходная цепь примет вид, представленный на рис. 2.12, *б*.

Из рис. 2.12, *б* следует, что в рассматриваемой цепи резонанс напряжений возможен при условии:

$$X_L = \omega L = X_C', \ \text{ т. е. при } L = \frac{X_C'}{\omega} = \frac{9{,}23}{2\pi f} = \frac{9{,}23}{2\pi \cdot 400} = 3{,}67 \text{ мГн.}$$

Таким образом, при резонансе напряжений:

– сопротивление цепи

$$\underline{Z}_{\text{экв}} = R_{\text{экв}} = R_1 + R' = 35 + 13{,}85 = 48{,}85 \text{ Ом;}$$

– ток в цепи

$$I = \frac{U}{R_{\text{экв}}} = \frac{100}{48{,}85} = 2{,}05 \text{ А;}$$

– показание ваттметра

$$P_W = R_{\text{экв}} I^2 = 48{,}85 \cdot 2{,}05^2 = 205{,}3 \text{ Вт,}$$

или

$$P_W = UI\cos\varphi = 100 \cdot 2{,}05 \cdot 1 = 205 \text{ Вт.}$$

Задача 2.20. В схеме (рис. 2.13, *а*) имеет место резонанс. Определить R и X_C, если $P_W = 64$ Вт, $U = 4$ В, $X_L = 2$ Ом.

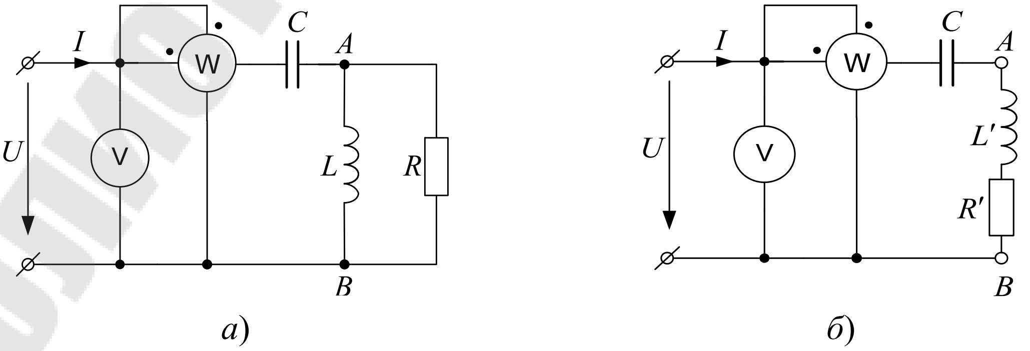


Рис. 2.13

Решение. В общем случае показание ваттметра

$$P_W = UI\cos\varphi,$$

где φ – угол сдвига фаз между напряжением и током двухполюсника, активную мощность которого измеряет ваттметр. В заданной схеме имеет место резонанс. Следовательно, $\cos\varphi = 1$. Тогда

$$I = \frac{P_W}{U} = 16 \text{ А}.$$

Параллельное соединение ветвей на участке *AB* можно заменить эквивалентным участком с последовательным соединением элементов. Эквивалентная схема, получаемая при таком преобразовании, показана на рис. 2.13, *б*.

Чтобы рассчитать параметры эквивалентной схемы, найдем комплексное сопротивление участка *AB* схемы на рис. 2.13, *а*:

$$\underline{Z}_{AB} = \frac{RjX_L}{(R + jX_L)} \cdot \frac{(R - jX_L)}{(R - jX_L)} = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} + j\frac{X_L R^2}{R^2 + X_L^2}.$$

С другой стороны, в схеме (рис. 2.13, *б*).

$$\underline{Z}_{AB} = R' + jX'_L.$$

Сопоставляя два равноценных выражения для $\underline{Z}_{AB}$, получим:

$$R' = \frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2}; \quad X'_L = \frac{R^2 X_L}{R^2 + X_L^2}.$$

В схеме (рис. 2.13, *б*) резонанс возможен при условии

$$X_C = X'_L.$$

При этом

$$P_W = R'I^2; \quad U = R'I,$$

откуда

$$R' = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{P_W} = \frac{4^2}{64} = 0{,}25 \text{ Ом}.$$

Следовательно,

$$\frac{RX_L^2}{R^2 + X_L^2} = 0{,}25.$$

Из последнего выражения получаем квадратное уравнение для неизвестного R:

$$0{,}25R^2 - 4R + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня:

$$R_{(1)} = 15{,}75 \text{ Ом}; \quad R_{(2)} = 0{,}25 \text{ Ом}.$$

Так как оба эти корня положительны, задача имеет два решения:

$$X_{C(1)} = \frac{X_L R_{(1)}^2}{X_L^2 + R_{(1)}^2} = 1{,}97 \text{ Ом}; \; X_{C(2)} = \frac{X_L R_{(2)}^2}{X_L^2 + R_{(2)}^2} = 0{,}031 \text{ Ом}.$$

Задача 2.21. В цепи (рис. 2.14) определить мгновенное значение тока $i(t)$ и показание амперметра при резонансе, если $u(t) = 120\cos(\omega t - 45^\circ)$ В, $R = 20$ Ом, $L = 35$ мГн, $C = 45$ мкФ.

Решение. Эквивалентную синусоиду входного напряжения выразим равенством

$$u(t) = 120\cos(\omega t - 45^\circ) = 120\sin(\omega t + 45^\circ), \text{ В}.$$

В заданной цепи резонанс достигается при условии

$$B_\text{C} = B_{RL},$$

где $B_C = \omega C$ – реактивная проводимость левой ветви; B_{RL} – реактивная проводимость правой ветви.

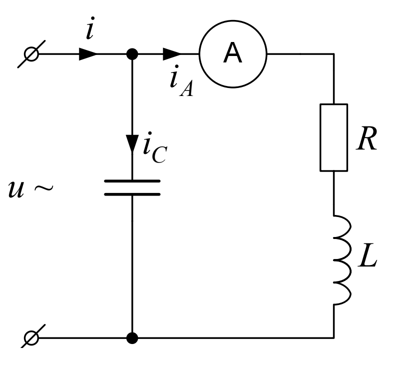


Рис. 2.14

Из параллельной схемы замещения RL-ветви следует:

$$\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{R + jX_L} = \frac{R - jX_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} - j\frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = G - jB_{RL},$$

откуда

$$B_{RL} = \frac{X_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Возвращаясь с учетом этого к условию резонанса, получим уравнение

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Решая его, находим резонансную частоту: $\omega = \omega_0 = 555$ рад/с.

Полная проводимость схемы при резонансе определяется ее активной проводимостью, которая в нашем случае совпадает с активной проводимостью RL-ветви:

$$G = G_{RL} = \frac{R}{R^2 + X_L^2} = \frac{R}{R^2 + (\omega_0 L)^2} = 0{,}0257 \text{ См}.$$

Тогда действующее значение тока в неразветвленной части схемы:

$$\underline{I} = G\underline{U} = 0{,}0257\frac{120}{\sqrt{2}}e^{j45^\circ} = 2{,}18\sqrt{2}e^{j45^\circ}\text{ А}.$$

В свою очередь, мгновенное значение этого тока:

$$i(t) = 2{,}18\sqrt{2}\sin(\omega_0 t + 45^\circ) = 3{,}1\sin(555t + 45^\circ), \text{ А}.$$

Показание амперметра:

$$\underline{I}_A = \underline{I}\frac{-jX_C}{R + j(X_L - X_C)} = 3{,}04e^{j0{,}8^\circ} \text{ А}, \quad \text{т. е. } I_A = 3{,}04 \text{ А}.$$

Задача 2.22*. В цепи (рис. 2.15) $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $L_1 = 20$ мГн, $L_2 = 40$ мГн, $C_1 = 50$ мкФ, $C_2 = 25$ мкФ. Мгновенное значение тока $i(t) = \sqrt{2}\sin 1000t$ А. Определить показания приборов и напряжение $u(t)$ на входе цепи.

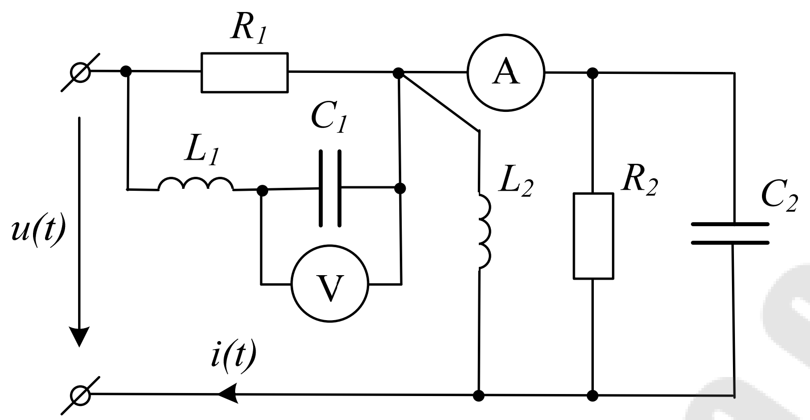


Рис. 2.15

Решение. Реактивные сопротивления индуктивностей L_1 и L_2, а также емкостей C_1 и C_2 соответственно равны:

$$X_{L_1} = \omega L_1 = 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом};$$

$$X_{C_1} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом};$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 40 \text{ Ом};$$

$$X_{C_2} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ Ом}.$$

Расчет показывает, что в ветви с последовательным соединением L_1 и C_1 имеет место резонанс напряжений, а на участке с параллельным соединением L_2 и C_2 наблюдается резонанс токов. Следовательно, заданный ток $i(t)$ протекает по ветви с L_1, C_1 и далее по сопротивлению R_2.

Действующее значение этого тока $I = 1$ А.

Показание вольтметра

$$U_V = X_{C_1} I = 20 \cdot 1 = 20 \text{ В}.$$

Напряжение на резисторе R_2 и параллельном колебательном контуре L_2C_2 будет равно:

$$U_2 = R_2 I = 40 \cdot 1 = 40 \text{ В},$$

ток в емкости

$$I_{C_2} = \frac{U_2}{X_{C_2}} = \frac{40}{40} = 1 \text{ А.}$$

Так как ток в сопротивлении R_2 совпадает с напряжением U_2 по фазе, а ток в емкости C опережает это напряжение на 90°, показание амперметра будет равно:

$$I_A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \text{ А.}$$

Наконец, мгновенное значение напряжения на входе цепи

$$u(t) = R_2 \cdot i(t) = 40\sqrt{2} \sin 1000t \text{ В.}$$

2.4. Коэффициент мощности. Пути его повышения

Задача 2.23. Электродвигатель подключен к однофазной цепи с напряжением $U = 220$ В частотой f = 50 Гц и потребляет мощность $P = 1{,}76$ кВт при коэффициенте мощности $\cos\varphi = 0{,}4$. Определить емкость батареи конденсаторов, повышающей коэффициент мощности этого двигателя до $\cos\varphi' = 0{,}8$.

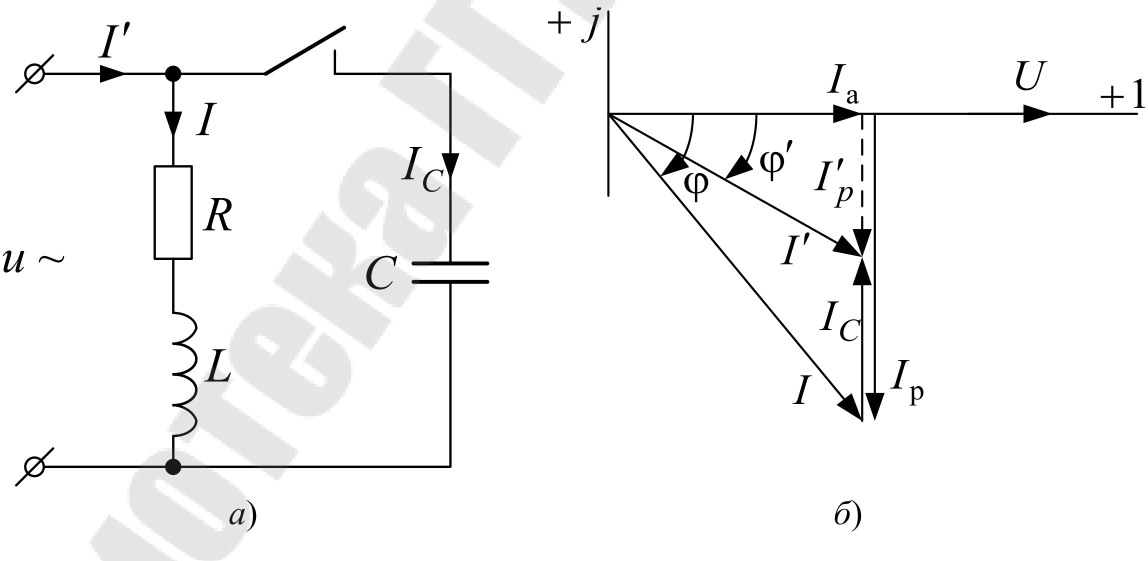


Рис. 2.16

Решение. Электродвигатель представляет собой активно-индуктивную нагрузку. Его схема замещения и соответствующая векторная диаграмма приведены на рис. 2.16, *а* и *б*.

Мощность двигателя

$$P = UI\cos\varphi.$$

Ток двигателя, равный:

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{1760}{220 \cdot 0{,}4} = 20\,\text{А}$$

имеет активную составляющую

$$I_{\text{а}} = I\cos\varphi = 20 \cdot 0{,}4 = 8\ \text{А},$$

которая не изменяется при параллельном подключении емкости, тогда как общий ток при этом подключении уменьшается до значения

$$I' = \frac{I_{\text{а}}}{\cos\varphi'} = \frac{8}{0{,}8} = 10\,\text{А}$$

за счет уменьшения реактивной составляющей тока двигателя от значения

$$I_{\text{р}} = I\sin\varphi = 20 \cdot 0{,}91 = 18{,}3\ \text{А}$$

до значения

$$I'_{\text{р}} = I'\sin\varphi' = 10 \cdot 0{,}6 = 6\ \text{А}.$$

Величина убыли реактивной составляющей равна току, протекающему через параллельно подключенную емкость:

$$I_{\text{р}} - I'_{\text{р}} = I_C = U\omega C.$$

Отсюда емкость батареи компенсирующих конденсаторов

$$C = \frac{I_{\text{р}} - I'_{\text{р}}}{U\omega} = \frac{18{,}3 - 6}{220 \cdot 314} = 178\ \text{мкФ}.$$

2.5. Электрические цепи с индуктивно связанными элементами

Задача 2.24. Определить токи в цепи (рис. 2.17, *а*), если $U = 100\,\text{В}$, $R_1 = R_2 = 30$ Ом, $\omega L_1 = \omega L_2 = 40$ Ом, $\omega M = 20$ Ом.

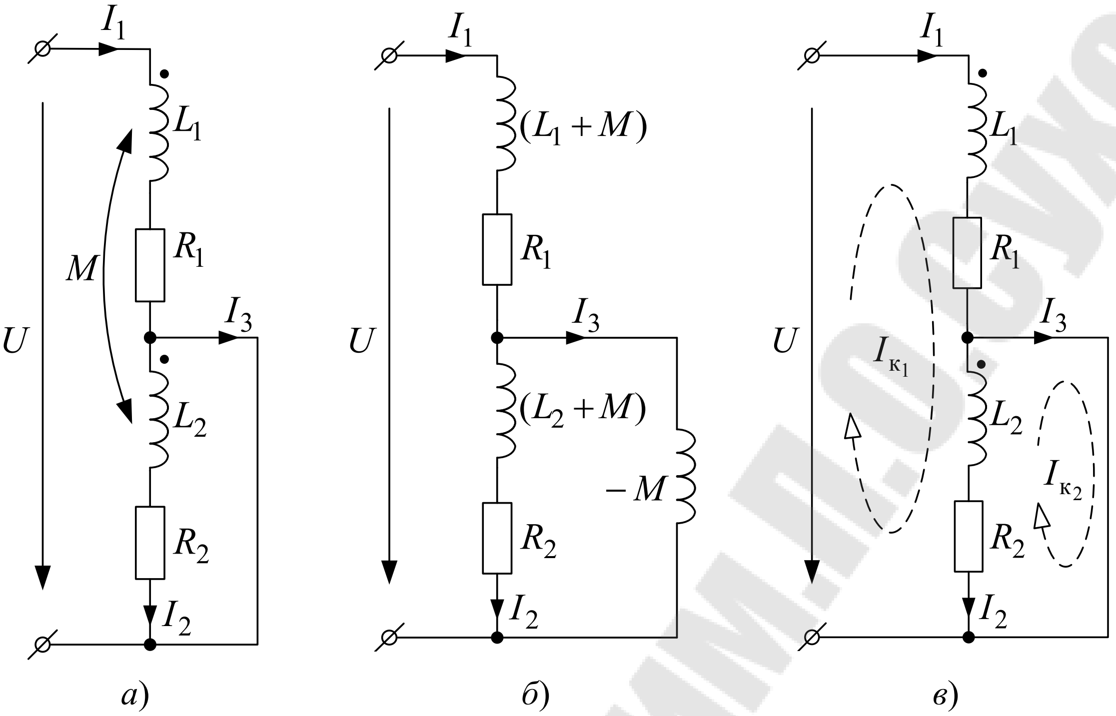


Рис. 2.17

Решение. 1 способ (метод уравнений Кирхгофа)

Уравнения, составленные по законам Кирхгофа для заданной цепи, имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0; \\ \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + \underline{I}_2 \cdot j\omega M = \underline{U}; \\ \underline{I}_1 \cdot j\omega M + \underline{I}_2(R_2 + j\omega L_2) = 0. \end{cases}$$

Подставив во второе и третье уравнения исходные данные, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \underline{I}_1(30 + j40) + \underline{I}_2 \cdot j20 = 100; \\ \underline{I}_1 \cdot j20 + \underline{I}_2(30 + j40) = 0, \end{cases}$$

решая которую найдем:

$\underline{I}_1 = 2{,}07e^{-j44^\circ} = (1{,}49 - j1{,}44)$ А; $\underline{I}_2 = 0{,}83e^{j172{,}87^\circ} = (-0{,}82 + j0{,}103)$ А.

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = (1{,}49 - j1{,}44) - (-0{,}82 + j0{,}103) =$$
$$= (0{,}67 - 1{,}543) = 2{,}78e^{-j33{,}74^\circ}\text{ А.}$$

2 способ («развязывание»)

После развязывания исходная схема примет вид, показанный на рис. 2.17, *б*. Входное сопротивление такой схемы:

$$\underline{Z} = R_1 + j\omega(L_1 + M) + \frac{(-j\omega M)\left[R_2 + j\omega(L_2 + M)\right]}{R_2 + j\omega L_2} =$$

$$= 30 + j60 + \frac{(30 + j60)(-j20)}{30 + j40} = 48{,}37 e^{j44^\circ} \text{ Ом.}$$

Тогда по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100}{48{,}37 e^{j44^\circ}} = 2{,}07 e^{-j44^\circ} \text{ А.}$$

Токи разветвленной части схемы:

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_1 \frac{-j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} = 2{,}07 e^{-j44^\circ} \frac{20 e^{-j90^\circ}}{50 e^{j53{,}13^\circ}} = 0{,}828 e^{j172{,}87^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_1 \frac{R_2 + j\omega\,(L_2 + M)}{R_2 + j\omega L_2} = 2{,}07 e^{-j44^\circ} \frac{30 + j60}{30 + j40} = 2{,}78 e^{-j33{,}7^\circ} \text{ А.}$$

3 способ (метод контурных токов)

Заданная схема содержит два независимых контура. Обходя их по часовой стрелке (рис. 2.17, *в*), получим два уравнения для контурных токов:

$$\begin{cases} \underline{I}_{\text{к}_1}\left(R_1 + R_2 + j\omega\left(L_1 + L_2 + 2M\right)\right) - \underline{I}_{\text{к}_2}\left(R_2 + j\omega\left(L_2 + M\right)\right) = \underline{U}; \\ \underline{I}_{\text{к}_2}\left(R_2 + j\omega L_2\right) - \underline{I}_{\text{к}_1}\left(R_2 + j\omega\left(L_2 + M\right)\right) = 0. \end{cases}$$

Подставляя числовые данные условия, получим:

$$\begin{cases} 134{,}16 e^{j63{,}43^\circ} \underline{I}_{\text{к}_1} - 67{,}1 e^{j63{,}43^\circ} \underline{I}_{\text{к}_2} = 100; \\ -67{,}1 e^{j63{,}43^\circ} \underline{I}_{\text{к}_1} + 50 e^{j53{,}13^\circ} \underline{I}_{\text{к}_2} = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{\text{к}_1} = 2{,}07 e^{-j44^\circ} \text{ А;} \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{\text{к}_2} = 2{,}77 e^{-j33{,}7^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{\text{к}_1} - \underline{I}_{\text{к}_2} = 0{,}83 e^{-j187{,}14^\circ} \text{ А.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.25. К генератору с напряжением $u = 283\sin 500t$ *В* подключен реостат с активным сопротивлением $R = 10$ Ом. Определить: *а*) мгновенное и действующее значения тока в реостате; *б*) полную и активную мощности, потребляемые реостатом.

Задача 2.26. Реостат с сопротивлением 100 Ом и конденсатор емкостью 2 мкФ соединены последовательно. Мгновенное значение напряжения на зажимах конденсатора равно $10\sin 5000t$ В. Определить: *а*) мгновенное и действующее значения тока в цепи; мгновенные значения напряжения на реостате и на входе цепи; *б*) активную мощность, потребляемую цепью.

Задача 2.27. К источнику с напряжением $u = 311\sin 314t$ В подключена катушка, индуктивность которой $L = 0{,}159$ Гн, а активное сопротивление $R = 36$ Ом. Определить: *а*) мгновенное значение тока в катушке; *б*) мгновенные значения активной и реактивной составляющих напряжения на катушке; *в*) полную, активную и реактивную мощности, потребляемые катушкой. Построить векторную диаграмму тока и напряжений; треугольник сопротивлений.

Задача 2.28. В сеть с напряжением $U = 220$ В включены последовательно две 110-вольтовые лампы мощностью соответственно $P_1 = 500$ Вт и $P_2 = 300$ Вт. Считая сопротивления ламп неизменными, определить напряжение на зажимах каждой лампы. Какая из ламп будет гореть ярче?

Задача 2.29. Приборы, включенные в цепь индуктивной катушки (рис. 2. 18), показывают: амперметр – 5 А, вольтметр – 220 В, ваттметр – 660 Вт.

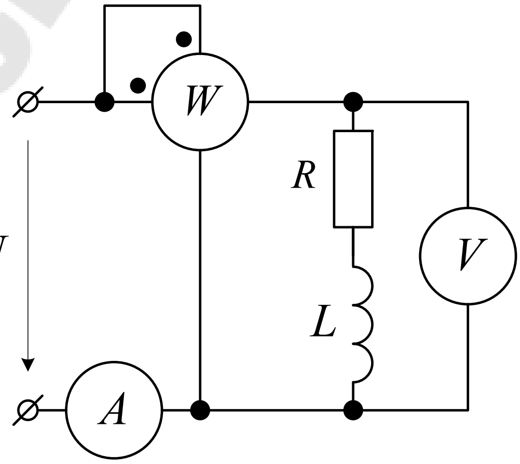


Рис. 2.18

Определить:

а) параметры и коэффициент мощности катушки при частоте $f = 50$ Гц; б) как изменятся показания амперметра и ваттметра, а также коэффициент мощности катушки, если частота сети будет 200 Гц, а напряжение останется неизменным?

Задача 2.30. Для определения параметров несовершенного конденсатора с помощью вольтметра произведены измерения напряжений (рис. 2.19): $U = 193$ В, $U_1 = 60$ В, $U_2 = 180$ В. Частота приложенного к зажимам синусоидального напряжения $f = 50$ Гц; сопротивление $R_1 = 20$ Ом. Вычислить величины R и C.

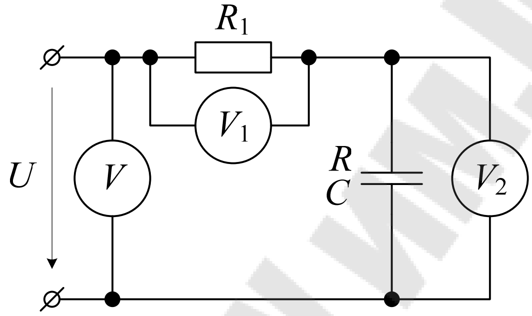


Рис. 2.19

Задача 2.31. В цепь с напряжением 220 В включена электрическая лампочка, номинальное напряжение которой 127 В и мощность 60 Вт. Для «погашения» части напряжения последовательно с лампой присоединяется конденсатор. Определить необходимую емкость конденсатора, если частота напряжения $f = 50$ Гц.

Задача 2.32. Реостат и конденсатор с равными сопротивлениями соединены последовательно. К зажимам цепи подведено переменное напряжение, действующее значение которого $U = 220$ В. Активная мощность, потребляемая цепью, $P = 880$ Вт. Определить ток в цепи, реактивную и полную мощности.

Задача 2.33. Двигатель переменного тока включен в сеть с напряжением U = 500 В и частотой 50 Гц. Активная мощность и коэффициент мощности двигателя соответственно равны 120 кВт и 0,7. Какой емкости конденсатор необходимо подключить параллельно двигателю, чтобы $\cos\varphi$ установки увеличился до 0,85?

Задача 2.34. Активное сопротивление индуктивной катушки при частоте ω в два раза меньше ее реактивного сопротивления. Как надо изменить частоту, чтобы коэффициент мощности возрос в два раза?

Задача 2.35. Коэффициент мощности приемника, содержащего реостат и конденсатор, соединенные последовательно, равен 0,8. Каким будет коэффициент мощности приемника, содержащего те же реостат и конденсатор, соединенные параллельно?

Задача 2.36. Коэффициент мощности приемника, состоящего из реостата и конденсатора без потерь, соединенных параллельно, равен $\cos\varphi = 0{,}5$. Чему окажется равен коэффициент мощности этого приемника, если частоту приложенного к нему синусоидального напряжения уменьшить вдвое?

Задача 2.37. Две реактивные катушки соединены параллельно. Параметры катушек соответственно равны: $R_1 = 8$ Ом, $X_1 = 15$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $X_2 = 5$ Ом. Определить ток в неразветвленной части цепи и токи в катушках при напряжении сети $U = 220$ В. Определить параметры эквивалентной реактивной катушки.

Задача 2.38. К цепи (рис. 2.20) приложено напряжение $U = 120$ В. Параметры приемников известны и равны: $X_1 = 100$ Ом, $X_2 = X_3 = 50$ Ом, $R_1 = 75$ Ом, $R_2 = 20$ Ом. Определить токи во всех ветвях и коэффициент мощности цепи. Построить векторную диаграмму токов и напряжений.

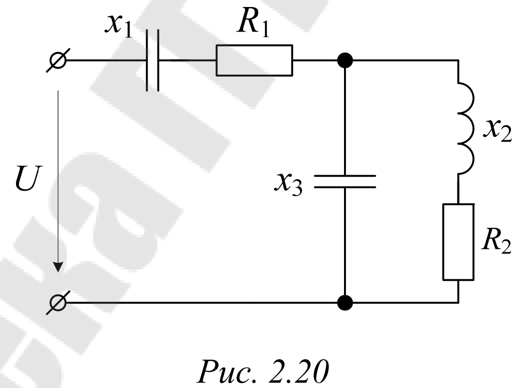


Рис. 2.20

Задача 2.39. Какое напряжение приложено к цепи (рис. 2.20), если напряжение на конденсаторе $u_C = 192\sqrt{2}\sin\omega t$ В, а сопротивления элементов цепи соответственно равны: $R_1 = 28$ Ом, $R_2 = 50$ Ом, $X_C = 96$ Ом? Вычислить все токи и параметры эквивалентной схемы, состоящей из последовательно соединенных элементов. Записать уравнения мгновенных значений токов i_1, i_2 и i_3.

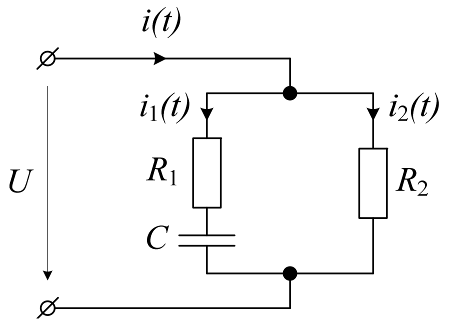


Рис. 2.21

Задача 2.40. В цепи (рис. 2.22) $u(t) = 100\sqrt{2}\sin\omega t$ В, $R = 50$ Ом, $X_1 = 40$ Ом, $X_2 = 60$ Ом, $X_3 = 80$ Ом, $X_4 = 30$ Ом, $X_5 = 20$ Ом. Определить токи в ветвях цепи. Построить векторную диаграмму токов и топографическую векторную диаграмму напряжений, приняв потенциал узла 5 равным нулю.

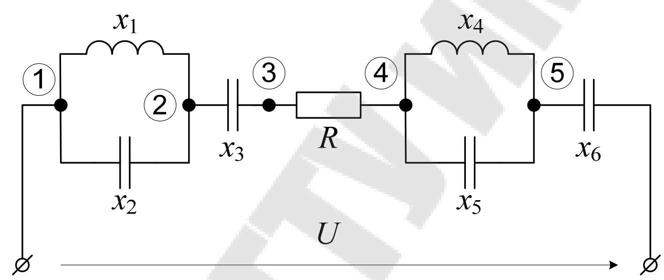


Рис. 2.22

Задача 2.41. Параметры элементов цепи (рис. 2.23) известны и равны: $L_1 = 55$ мГн; $R_1 = 150$ Ом; $C_1 = 0{,}667$ мкФ, $L_2 = 10$ мГн, $R_2 = 200$ Ом, $C_2 = 1$ мкФ.

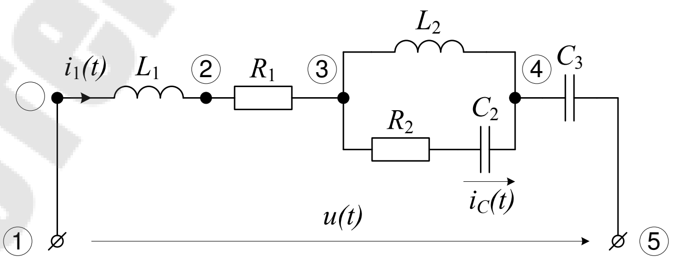


Рис. 2.23

Напряжение на входе цепи $u(t) = 10\sqrt{2}\sin 10^4 t$ В. Найти ток $i_1(t)$ и напряжение $u_{C_2}(t)$. Построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений.

Глава 3. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ НЕСИНУСОИДАЛЬНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТОКА

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Разложение периодических токов, напряжений и ЭДС в гармонические ряды. Периодический ток $i = i(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле, может быть представлен в виде ряда Фурье:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (I'_{km} \sin k\omega t + I''_{km} \cos k\omega t), \quad (1)$$

где I_0 – постоянная составляющая (нулевая гармоника); $I_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ – первая гармоника; $I_{km} \sin(k\omega t + \psi_k)$ при $k > 1$ – высшие гармоники (вторая, третья и т. д.); $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – основная угловая частота, т. е. угловая частота первой гармоники тока, имеющего период T.

Амплитуды и начальные фазы гармоник определяются по табл. 1 и соотношениям:

$$I_{km} = \sqrt{(I'_{km})^2 + (I''_{km})^2}, \quad \psi_k = \operatorname{arctg} \frac{I''_{km}}{I'_{km}}, \quad k = 1, 2, \dots . \quad (2)$$

Аналогичным образом могут быть представлены в виде рядов периодические напряжения и ЭДС цепи (табл. 1).

Таблица 1

I_0	$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t)\, dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\omega t)\, d(\omega t)$
I'_{km}	$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) \sin k\omega t\, dt$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\omega t) \sin k\omega t\, d(\omega t)$
I''_{km}	$\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i(t) \cos k\omega t\, dt$	$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\omega t) \cos k\omega t\, d(\omega t)$

Наиболее распространенные в электротехнике разложения Фурье приведены в Приложении.

Расчет установившихся режимов в линейных цепях символическим методом. Представив все ЭДС и токи источников в виде рядов Фурье, можно провести расчет цепи отдельно по каждой из гармоник: по нулевой гармонике (постоянному току), когда учитываются постоянные составляющие ЭДС и токов источников; по первой гармонике, когда источники считаются синусоидальными с частотой ω и т. д. В результате определяются постоянные и гармонические составляющие токов и напряжений цепи, которые затем в соответствии с принципом наложения (*суперпозиции*) суммируются. Так, для некоторого тока имеем:

$$i \approx I_0 + i_1 + i_2 + \ldots + i_k + \ldots + i_n,$$

где I_0 – постоянная составляющая тока; $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – гармонические составляющие $i_k = I_{km}\sin(k\omega t + \psi_k)$, где $k = 1, 2, \ldots$ соответствует номеру гармоники; i_n – гармоника тока, обеспечивающая требуемую точность его вычисления.

Рассчитывать первую и высшие гармоники тока удобно в комплексной форме записи, обязательно переводя результаты расчета в вещественную (временную) область, так как суммировать гармоники можно только в этой области. При расчете изменением активного сопротивления R, как правило, пренебрегают, а комплексные сопротивления индуктивного и емкостного элементов, соответственно равные:

$$\underline{Z}_L = jX_L = jk\omega L \quad \text{и} \quad \underline{Z}_C = -j\frac{1}{k\omega C},$$

необходимо пересчитывать для каждой гармоники.

Действующие значения тока, напряжения, ЭДС. Для периодических процессов действующие значения переменных могут быть рассчитаны по формулам:

$$\left.\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt} \approx \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + \ldots + I_n^2}; \\ U &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt} \approx \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + \ldots + U_n^2}; \\ E &= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T e^2 dt} \approx \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + \ldots + E_n^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где I_0, U_0, E_0 – постоянные составляющие тока, напряжения, ЭДС; $I_k = \dfrac{I_{km}}{\sqrt{2}}$; $U_k = \dfrac{U_{km}}{\sqrt{2}}$; $E_k = \dfrac{E_{km}}{\sqrt{2}}$ – действующие значения тока, напряжения, ЭДС; $k = 1, 2, ..., n$.

Мощности в цепях с периодическими токами и напряжениями. Активную и полную мощности некоторого двухполюсника с периодическими несинусоидальными током $i(t)$ и напряжением $u(t)$ можно выразить через параметры их гармоник:

$$\left.\begin{aligned} P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k, \quad P_k = U_k I_k \cos\varphi_k, \quad P_0 = U_0 I_0; \\ S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Отношение $\lambda = \dfrac{P}{S}$ называют коэффициентом мощности.

Интегральные оценки качества несинусоидальных процессов. Периодические процессы принято характеризовать четырьмя величинами: максимальным значением тока (напряжения) $I_{\max}$ ($U_{\max}$) за период, их действующим значением $I(U)$, действующим значением тока (напряжения) первой гармоники $I_1(U_1)$, а также средним по модулю значением:

$$I_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T |i(t)|\,dt, \quad U_{ср} = \frac{1}{T}\int_0^T |u(t)|\,dt \qquad (5)$$

и тремя коэффициентами:

– коэффициентом формы

$$k_ф = \frac{I}{I_{ср}}\left(k_ф = \frac{U}{U_{ср}}\right); \qquad (6)$$

– коэффициентом амплитуды

$$k_а \frac{I_{\max}}{I}\left(k_а = \frac{U_{\max}}{U}\right); \qquad (7)$$

– коэффициентом искажения

$$k_{и} = \frac{I_1}{I}\left(k_{и} = \frac{U_1}{U}\right). \qquad (8)$$

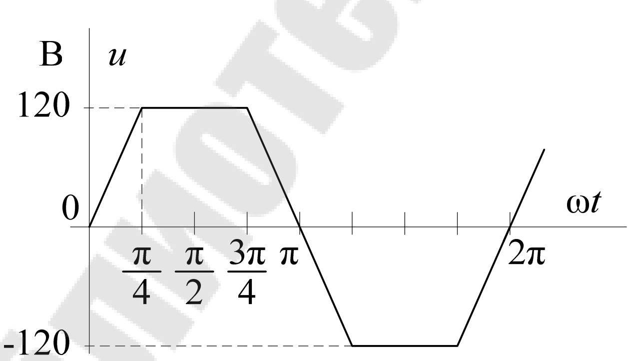
Показания приборов. В зависимости от исполнения прибора (амперметр или вольтметр) и устройства его входного преобразователя он может показывать действующее значение измеряемой величины, ее среднее по модулю значение, усредненное за период положительное (отрицательное) значение и т. д.

Магнитоэлектрические приборы показывают *постоянную составляющую* измеряемой величины; *электромагнитные*, *электродинамические*, *электростатические* и *тепловые* – ее *действующее значение*. Показания электронных приборов в зависимости от устройства входного преобразователя могут определяться действующим, средним по модулю, максимальным или минимальным значением измеряемой величины. Прибор индукционной системы и электронный прибор с конденсатором на входе определяет действующее значение переменной составляющей измеряемой величины.

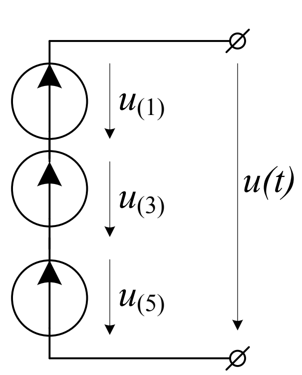
Задачи с решениями

3.1. Периодические процессы в линейных цепях

Задача 3.1. На рис. 3.1, *а* изображена кривая напряжения $u(t)$. Записать три первые гармоники разложения этого напряжения в ряд Фурье. Составить схему замещения источника с учетом этих трех гармоник. Определить коэффициенты, характеризующие форму кривой $u(t)$.



а)



б)

Рис. 3.1

Решение. Воспользуемся разложением, приведенным в Приложении:

$$u = \frac{4U_m}{\alpha\pi}(\sin\alpha\sin\omega t + \frac{1}{9}\sin 3\alpha\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\alpha\sin 5\omega t + ...).$$

После подстановки значений $U_m = 120$ В и $\alpha = \frac{\pi}{4}$ получим:

$$u(t) = \frac{4\cdot 120\cdot 4}{\pi\cdot\pi}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin\omega t + \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi}{4}\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin\frac{5\pi}{4}\sin 5\omega t\right) =$$

$$= 137{,}6\sin\omega t + 15{,}3\sin 3\omega t - 5{,}5\sin 5\omega t =$$

$$= 137{,}6\sin\omega t + 15{,}3\sin 3\omega t + 5{,}5\sin(5\omega t - 180°)\ \text{В}.$$

Схема замещения источника представлена на рис. 3.1, *б*.

Коэффициент амплитуды

$$k_\text{а} = \frac{U_m}{U} = \frac{120}{98} = 1{,}22,$$

где $U = \sqrt{\frac{U_{m(1)}^2}{2} + \frac{U_{m(3)}^2}{2} + \frac{U_{m(5)}^2}{2} + ...} = \sqrt{\frac{137{,}6^2}{2} + \frac{15{,}3^2}{2} + \frac{5{,}5^2}{2} + ...} = 98$ В – действующее значение несинусоидального напряжения.

Коэффициент формы

$$k_\text{ф} = \frac{U}{U_\text{ср.мод}} = \frac{98}{90} = 1{,}09,$$

где $U_\text{ср.мод} = U_m\frac{\pi - \alpha}{\pi} = 90$ В – среднее по модулю значение напряжения.

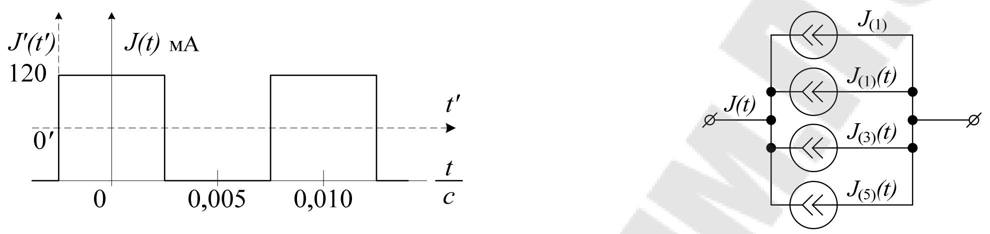
Коэффициент искажения $k_\text{и} = \frac{U_{(1)}}{U} = \frac{97{,}3}{98} = 0{,}993,$

где $U_{(1)} = \frac{U_{m(1)}}{\sqrt{2}} = \frac{137{,}6}{\sqrt{2}} = 97{,}3$ В – действующее значение первой гармоники напряжения.

Коэффициент гармоник

$$k_{\text{г}} = \frac{\sqrt{\dfrac{U_{m(3)}^2}{2} + \dfrac{U_{m(5)}^2}{2} + \ldots}}{U_{(1)}} = \frac{\sqrt{\dfrac{15{,}3^2}{2} + \dfrac{5{,}5^2}{2} + \ldots}}{97{,}3} = 0{,}118.$$

Задача 3.2. Ток J источника тока является периодической функцией времени, представленной на рис. 3.2, *а*. Составить схему замещения этого источника, учитывающую постоянную составляющую и первые три гармоники тока.



а) *б*)

Рис. 3.2

Решение. При смещении начала координат на 60 мА вверх и на $\dfrac{T}{4}$ влево получим кривую, разложение в ряд которой приведено в Приложении.

В соответствии с таблицей (см. Приложение):

$$J'(t') = \frac{4I'_m}{\pi}\left(\sin\omega t' + \frac{1}{3}\sin 3\omega t' + \frac{1}{5}\sin 5\omega t'\right).$$

Подставив $I'_m = 60$ мА, получим:

$$J'(t') = 76{,}4\sin\omega t' + 25{,}5\sin 3\omega t' + 15{,}3\sin 5\omega t' \text{ мА}.$$

Учитывая, что $t' = t + \dfrac{T}{4}$ и кривая $J'(t')$ получена смещением кривой $J(t)$ на 60 мА, найдем ток источника:

$$J(t) = J_{(0)} + J_{(1)}(t) + J_{(3)}(t) + J_{(5)}(t) =$$
$$= 60 + 76{,}4\cos\omega t - 25{,}5\cos 3\omega t + 15{,}3\cos 5\omega t \text{ мА},$$

где частота основной гармоники $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 628$ рад/с.

Схема замещения представлена на рис. 3.2, *б*.

Задача 3.3. Напряжение, соответствующее прямоугольной кривой, подведено к цепи, содержащей только индуктивный элемент (рис. 3.3). $U_{\max} = 100$ В, $L = 4{,}76$ мГн, частота основной гармоники $f = 50$ Гц.

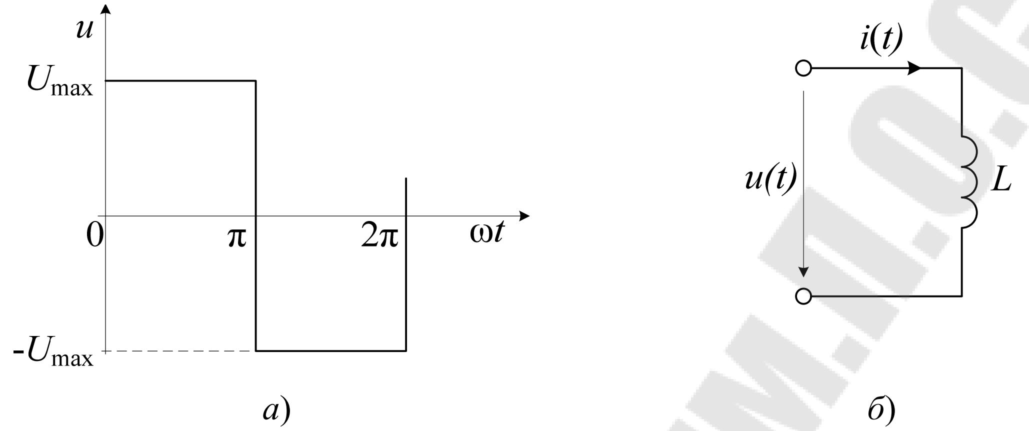


Рис. 3.3

Рассчитать мгновенное значение тока в цепи с учетом первой, третьей и пятой гармоник.

Решение. Для заданного напряжения

$$u(t) = \begin{cases} U_{\max} = 100\text{ В при } 0 \le \omega t \le \pi, \\ -U_{\max} = -100\text{ В при } \pi \le \omega t \le 2\pi \end{cases}$$

ряд Фурье имеет вид (см. Приложение):

$$u(t) = \frac{4U_{\max}}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \ldots\right).$$

В соответствии с методом наложения рассчитаем ток *k*-й гармоники $i_{(k)}(t)$ при действии *k*-й гармоники напряжения:

$$u_{(k)}(t) = \frac{4U_{\max}}{k\pi}\sin k\omega t.$$

Комплексная амплитуда *k*-й гармоники напряжения

$$\underline{U}_{m(k)} = \frac{4U_{\max}}{k\pi}e^{j0^\circ};$$

реактивное сопротивление индуктивной катушки на *k*-й гармонике

$$X_{L(k)} = \omega_{(k)}L = k\omega L,$$

где $\omega = 2\pi f = 314$ рад/с – частота первой (основной) гармоники.

При этом комплексная амплитуда тока k-й гармоники

$$\underline{I}_{m(k)} = \frac{U_{m(k)}}{jk\omega L} = \frac{4U_{\max}e^{j0^\circ}}{k\pi k\omega L e^{j90^\circ}} = \frac{4U_{\max}}{k^2\pi\omega L}e^{-j90^\circ} = \frac{85}{k^2}e^{-j90^\circ}.$$

С учетом $k = 1, 3, 5...$ мгновенное значение тока $i(t)$:

$$i(t) = 85\left(\sin(\omega t - 90^\circ) + \frac{1}{9}\sin(3\omega t - 90^\circ) + \frac{1}{25}\sin(5\omega t - 90^\circ) + ...\right) =$$

$$= -85\left(\cos\omega t + \frac{1}{9}\cos 3\omega t + \frac{1}{25}\cos 5\omega t + ...\right) \text{ А.}$$

Задача 3.4. Напряжение, соответсвующее прямоугольной кривой (рис. 3.3, a), подведено к цепи, содержащей только емкостной элемент. Емкость $C = 53$ мкФ, частота основной гармоники $f = 50$ Гц. Рассчитать мгновенное значение тока в цепи с учетом первой, третьей и пятой гармоник.

Решение. Как и в предыдущей задаче, мгновенное значение напряжения, приложенного к емкости C, имеет вид:

$$u(t) = \frac{4U_{\max}}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right) \text{ В.}$$

Реактивное сопротивление идеального конденсатора на k-й гармонике:

$$X_{C(k)} = \frac{1}{\omega_k C} = \frac{1}{k\omega C}.$$

Комплексная амплитуда тока k-й гармоники:

$$\underline{I}_{m(k)} = \frac{\underline{U}_{m(k)}}{-j\dfrac{1}{k\omega C}} = \frac{U_{m(k)}e^{j0^\circ}}{k\pi\dfrac{1}{k\omega C}e^{-j90^\circ}} = \frac{4U_{\max}\omega C}{\pi}e^{j90^\circ} = 2{,}12e^{j90^\circ}.$$

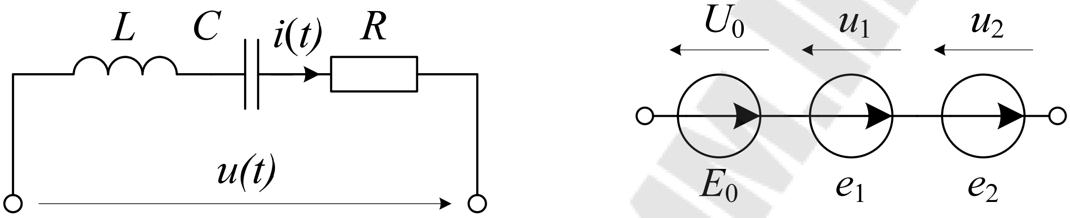
Для $k = 1, 3, 5...$ мгновенное значение тока:

$$i(t) = 2{,}12\left[\sin(\omega t + 90^\circ) + \sin(3\omega t + 90^\circ) + \sin(5\omega t + 90^\circ)\right] \text{ А.}$$

Задача 3.5. Определить мгновенное значение тока $i(t)$ в схеме (рис. 3.4, *а*), если $u(t) = 75 + 106\sqrt{2}\sin(\omega t + 45°) - 50\sqrt{2}\sin(2\omega t - 45°)$ В, а сопротивления элементов схемы $\omega L = \dfrac{1}{(\omega C)} = 100$ Ом, $R = 150$ Ом.

Решение. Негармонический периодический источник заданного напряжения $u(t)$ представим в виде последовательного соединения источника постоянного напряжения $U_{(0)}$ и двух источников синусоидального напряжения $u_{(1)}$ и $u_{(2)}$ с разными частотами (рис. 3.4, *б*), т. е.

$$u(t) = U_{(0)} + u_{(1)} + u_{(2)}.$$



а) *б*)

Рис. 3.4

Ток в линейной цепи в соответствии с методом наложения определим в виде:

$$i(t) = I_{(0)} + i_{(1)} + i_{(2)}.$$

Постоянная составляющая тока $I_{(0)} = 0$, так как в цепи есть конденсатор, сопротивление которого $X_{C_{(0)}} = \infty$.

Расчет первой гармоники

$$\underline{U}_{m(1)} = 106\sqrt{2}e^{j45°}\ \text{В};\quad X_{L(1)} = \omega L = 100\ \text{Ом};\quad X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = 100\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{(1)} = R + j(X_{L(1)} - X_{C(1)}) = 150 + j(100 - 100) = 150\ \text{Ом}.$$

На первой гармонике в цепи наблюдается резонанс напряжений. При этом

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{106\sqrt{2}e^{j45°}}{150} = 1e^{j45°}\ \text{А}.$$

Расчет второй гармоники

$$\underline{U}_{m(2)} = -50\sqrt{2}e^{-j45^{\circ}} = 50\sqrt{2}e^{j135^{\circ}}\,\text{В};$$

$$X_{L(2)} = 2\omega L = 200\ \text{Ом};\quad X_{C(2)} = \frac{1}{2\omega C} = 50\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{(2)} = R + j(X_{L(2)} - X_{C(2)}) = 150 + j(200-50) = 150 + j150 =$$

$$= 150\sqrt{2}e^{j45^{\circ}}\ \text{Ом}.$$

$$\underline{I}_{m(2)} = \frac{\underline{U}_{m_{(2)}}}{\underline{Z}_{(2)}} = \frac{50\sqrt{2}e^{135^{\circ}}}{150\sqrt{2}e^{j45^{\circ}}} = 0{,}33(3)e^{j90^{\circ}}\ \text{А}.$$

Мгновенное значение искомого тока
$i(t) = i_{(1)} + i_{(2)} = 1\sin(\omega t + 45^{\circ}) + 0{,}33(3)\sin(2\omega t + 90^{\circ})$ А.

Задача 3.6. К цепи (рис. 3.5) приложено напряжение $u(t) = 60 + 100\sin\omega t + 50\sin 3\omega t$. В. Параметры элементов: $R_1 = 6$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $L_1 = 47{,}8$ мГн, $L_2 = 31{,}8$ мГн, $C = 159$ мкФ. Частота основной гармоники $f = 50$ Гц. Определить токи ветвей.

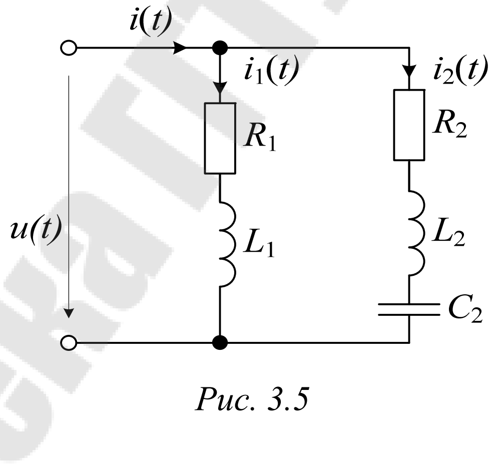


Рис. 3.5

Решение. Согласно условию, напряжение источника энергии содержит постоянную составляющую, первую и третью гармоники, т. е.

$$u(t) = U_{(0)} + u_{(1)}(t) + u_{(3)}(t).$$

Особенность цепи состоит в том, что постоянные составляющие тока в неразветвленной части цепи и в первой ветви одинаковы и равны:

$$I_{(0)} = I_{1(0)} = \frac{U_{(0)}}{R_1} = \frac{60}{6} = 10\ \text{А}.$$

Постоянная составляющая тока второй ветви $I_{2(0)} = 0$, так как сопротивление конденсатора $X_{C(0)} = \infty$.

Расчет токов первой гармоники

Комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_{1(1)} = R_1 + j\omega L_1 = 6 + j314 \cdot 47{,}8 \cdot 10^{-3} = (6 + j15)\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{2(1)} = R_2 + j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2} = 8 + j314 \cdot 31{,}8 \cdot 10^{-3} - j\frac{1}{314 \cdot 159 \cdot 10^{-6}} =$$
$$= 8 + j10 - j20 = (8 - j10)\ \text{Ом}.$$

Токи в ветвях, соответственно, будут равны:

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{1(1)}} = \frac{100}{6 + j15} = 2{,}3 - j5{,}75 = 6{,}2e^{-68{,}2°}\ \text{А};$$

$$I_{2m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{2(1)}} = \frac{100}{8 - j10} = 4{,}9 + j6{,}1 = 7{,}8e^{j51{,}34°}\ \text{А}.$$

Ток в неразветвленной части цепи:

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{1m(1)} + \underline{I}_{2m(1)} = 2{,}3 - j5{,}75 + 4{,}9 + j6{,}1 = 7{,}2 + j0{,}35 = 7{,}2e^{2{,}8°}\ \text{А}.$$

***Расчет токов третьей гармоники* (выполняется аналогично)**

$$\underline{Z}_{1(3)} = R_1 + j3\omega L_1 = 6 + j3 \cdot 314 \cdot 47{,}8 \cdot 10^{-3} = (6 + j45)\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{2(3)} = R_2 + j3\omega L_2 - j\frac{1}{3\omega C_2} = 8 + j942 \cdot 31{,}8 \cdot 10^{-3} - j\frac{1}{942 \cdot 159 \cdot 10^{-6}} =$$
$$= 8 + j30 - j0{,}15 = (8 + j29{,}85)\ \text{Ом}.$$

$$\underline{I}_{1m(3)} = \frac{50}{6 + j45} = 0{,}146 - j1{,}092 = 1{,}1e^{-82{,}4°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{2m(3)} = \frac{50}{8 + j29{,}85} = 0{,}42 - j1{,}56 = 1{,}62e^{-j75°}\ \text{А};$$

$$I_{m(3)} = I_{1m(3)} I_{2m(3)} = 0{,}146 - j1{,}092 + 0{,}42 - j1{,}56 =$$
$$= 1{,}88 - j2{,}652 = 3{,}25e^{-j54{,}7°}\ \text{А}.$$

Задача 3.7. В цепи (рис. 3.6) R_1 = 6 Ом, R_2 = 5 Ом, R_3 = 20 Ом, $u(t) = U_{(0)} + U_{m(1)} \sin \omega t + U_{m(3)} \sin(3\omega t + \psi(3))$, где $U_{(0)}$ = 30 В, $U_{m(1)}$ = 100 В, $U_{m(3)}$ = 40 В, $\psi_{(3)}$ = 20°. Реактивные элементы цепи на основной частоте ωL = 12 Ом, $\frac{1}{\omega C} = 30$ Ом. Определить мгновенное значение тока на неразветвленном участке цепи. Определить действующее значение каждого тока. Вычислить активную мощность, потребляемую цепью.

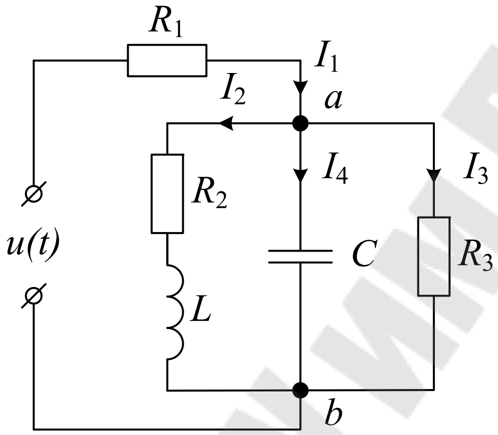


Рис. 3.6

Решение

Расчет постоянной составляющей токов в ветвях цепи

$$R_{эк} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 6 + \frac{5 \cdot 20}{5 + 20} = 10 \text{ Ом};$$

$$I_{1(0)} = \frac{U_0}{R_{эк}} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А}; \quad I_{2(0)} = I_{1(0)} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 3 \frac{20}{5 + 20} = 2{,}4 \text{ А};$$

$$I_{3(0)} = I_{1(0)} - I_{2(0)} = 3 - 2{,}4 = 0{,}6 \text{ А}.$$

Расчет первой гармоники каждого из токов

Определим комплексное сопротивление параллельных ветвей:

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ab(1)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{2(1)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{3b(1)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{4(1)}} = \frac{1}{(5 + j12)} + \frac{1}{(20)} + \frac{1}{(-j12)} =$$

$$= (79{,}6 - j37{,}7)10^{-3} \text{ См},$$

откуда

$$\underline{Z}_{ab(1)} = \frac{1}{(79{,}6 - j37{,}7)10^{-3}} = 11{,}35e^{j25{,}34^\circ} = (10{,}26 + j4{,}86)\ \text{Ом}.$$

Комплексное сопротивление всей цепи

$$\underline{Z}_{\text{эк}(1)} = R_1 + \underline{Z}_{ab(1)} = 6 + 10{,}26 + j4{,}86 = 16{,}26 + j4{,}86 = 17e^{j16{,}64^\circ}\ \text{Ом}.$$

Комплексные амплитуды тока в неразветвленной части цепи, напряжения на параллельных ветвях и токов в них:

$$\underline{I}_{1m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{\text{эк}(1)}} = \frac{100}{17e^{j16{,}64^\circ}} = 5{,}88e^{-j16{,}64^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{U}_{abm(1)} = \underline{I}_{1m(1)}\underline{Z}_{ab(1)} = 5{,}88e^{-j16{,}64^\circ} \cdot 11{,}35e^{j25{,}34} = 66{,}75e^{j8{,}7^\circ}\ \text{В}.$$

$$\underline{I}_{2m(1)} = \frac{\underline{U}_{abm(1)}}{\underline{Z}_{2(1)}} = \frac{66{,}75e^{j8{,}7^\circ}}{(5 + j12)} = 5{,}14e^{-j58{,}7^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{3m(1)} = \frac{\underline{U}_{abm(1)}}{\underline{Z}_{3(1)}} = \frac{66{,}75e^{j8{,}7^\circ}}{20} = 3{,}34e^{j8{,}7^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{4m(1)} = \frac{\underline{U}_{abm(1)}}{\underline{Z}_{4(1)}} = \frac{66{,}75e^{j8{,}7^\circ}}{(-j30)} = 2{,}23e^{j98{,}7^\circ}\ \text{А}.$$

Расчет третьей гармоники каждого из токов **(выполняется аналогично)**

$$\underline{Z}_{1(3)} = 6\ \text{Ом}; \qquad \underline{Z}_{2(3)} = R_2 + j3\omega L = 5 + j3 \cdot 12 = (5 + j36)\ \text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{3(3)} = 20\ \text{Ом}; \qquad \underline{Z}_{4(3)} = -j10\ \text{Ом}.$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{ab(3)}} = \frac{1}{\underline{Z}_{2(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{3(3)}} + \frac{1}{\underline{Z}_{4(3)}} =$$

$$= \frac{1}{(5 + j36)} + \frac{1}{20} + \frac{1}{(-j10)} = (53{,}8 + j72{,}7)10^{-3}\ \text{См}.$$

$$\underline{Z}_{ab(3)} = \frac{1}{(53{,}8 + j72{,}7) \cdot 10^{-3}} = 6{,}58 - j8{,}89 = 11{,}06e^{-j53{,}5^\circ}\ \text{Ом}.$$

$$\underline{Z}_{эк(3)} = \underline{Z}_{1(3)} + \underline{Z}_{ab(3)} = 6 + 6{,}58 - j8{,}89 = 12{,}58 - j8{,}89 = 15{,}4e^{-j35{,}3^\circ} \text{ Ом}.$$

$$\underline{I}_{1m(3)} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{эк(3)}} = \frac{40e^{j20^\circ}}{15{,}4e^{-j35{,}3^\circ}} = 2{,}6e^{j55{,}3^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{U}_{abm(3)} = \underline{I}_{1m(3)}\underline{Z}_{ab(3)} = 2{,}6e^{j55{,}3^\circ} \cdot 11{,}06e^{-j53{,}5^\circ} = 28{,}76e^{j1{,}8^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_{2m(3)} = \frac{\underline{U}_{abm(3)}}{\underline{Z}_{2(3)}} = \frac{28{,}76e^{j1{,}8^\circ}}{(5 + j36)} = 0{,}79e^{-j80{,}3^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{3m(3)} = \frac{\underline{U}_{abm(3)}}{\underline{Z}_{3(3)}} = \frac{28{,}76e^{j1{,}8^\circ}}{20} = 1{,}44e^{j1{,}8^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{4m(3)} = \frac{\underline{U}_{abm(3)}}{\underline{Z}_{4(3)}} = \frac{28{,}76e^{j1{,}8^\circ}}{(-j10)} = 2{,}88e^{j91{,}8^\circ} \text{ А}.$$

Таким образом, мгновенное значение тока в неразветвленной части цепи равно:

$$i_1(t) = \left[3 + 5{,}88\sin(\omega t - 16{,}64^\circ) + 2{,}6\sin(3\omega t + 55{,}3^\circ)\right] \text{ А}.$$

Действующее значение каждого тока определим по формуле (3):

$$I_1 = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(3)}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{5{,}88}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2{,}6}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5{,}45 \text{ А};$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + I_{2(1)}^2 + I_{2(3)}^2} = \sqrt{2{,}4^2 + \left(\frac{5{,}15}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}79}{\sqrt{2}}\right)^2} = 4{,}4 \text{ А};$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(0)}^2 + I_{3(1)}^2 + I_{3(3)}^2} = \sqrt{0{,}6^2 + \left(\frac{3{,}35}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1{,}44}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2{,}65 \text{ А};$$

$$I_4 = \sqrt{I_{4(0)}^2 + I_{4(1)}^2 + I_{4(3)}^2} = \sqrt{0 + \left(\frac{2{,}23}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2{,}88}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2{,}58 \text{ А}.$$

Активную мощность, потребляемую цепью, определим по формуле

$$P = U_0 I_{1(0)}^2 + \left(\frac{U_{m(1)}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{I_{1m(1)}}{\sqrt{2}}\right)\cos 16{,}64^{\circ} + \left(\frac{U_{m(3)}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{I_{1m(3)}}{\sqrt{2}}\right)\cos(-35{,}3^{\circ}) =$$

$$= 30 \cdot 3 + \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5{,}88}{\sqrt{2}}\cos 16{,}64^{\circ} + \frac{40}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2{,}6}{\sqrt{2}}\cos(-35{,}3^{\circ}) = 414{,}13 \text{ Вт}.$$

***Проверка*:**

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 6 \cdot 5{,}45^2 + 5 \cdot 4{,}4^2 + 20 \cdot 2{,}65^2 = 415{,}5 \text{ Вт}.$$

Задача 3.8. В цепи (рис. 3.7) определить мгновенные значения токов i_1 и i_3, активную мощность P и коэффициент мощности cos φ, если мгновенное значение тока $i_2 = 10\sin\omega t + 5\sin 5\omega t$, а величины сопротивлений на основной гармонике $X_L = 5$ Ом, $X_C = 25$ Ом, $R = 20$ Ом.

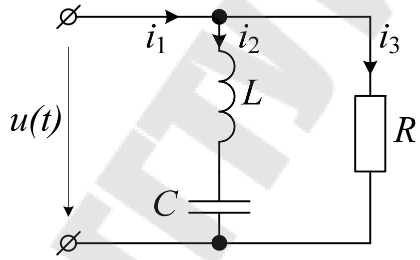


Рис. 3.7

Решение

На первой гармонике

$$\underline{I}_{2m(1)} = 10 \text{ А}; \quad \underline{Z}_{2(1)} = j5 - j25 = -j20 = 20e^{-90^{\circ}} \text{ Ом};$$

$$\underline{U}_{2m(1)} = \underline{Z}_{2(1)}\underline{I}_{2m(1)} = 20e^{-j90^{\circ}} \cdot 10 = 200e^{-j90^{\circ}} \text{ В};$$

$$I_{3m(1)} = \frac{\underline{U}_{2m(1)}}{R} = \frac{200e^{-j90^{\circ}}}{20} = 10e^{-j90^{\circ}} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{1m(1)} = \underline{I}_{2m(1)} + \underline{I}_{3m(1)} = 10 - j10 = 10\sqrt{2}e^{-j45^{\circ}} \text{ А}.$$

На пятой гармонике

$$\underline{I}_{2m(5)} = 5 \text{ А}, \quad \underline{Z}_{2(5)} = j25 - j5 = j20 = 20e^{90^{\circ}} \text{ Ом};$$

$$\underline{U}_{2m(5)} = \underline{Z}_{2(5)}\underline{I}_{2m(5)} = 20e^{j90^\circ} \cdot 5 = 100e^{j90^\circ} \text{ В;}$$

$$I_{3m(5)} = \frac{\underline{U}_{2m(5)}}{R} = \frac{100e^{j90^\circ}}{20} = 5e^{j90^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{1m(5)} = \underline{I}_{2m(5)} + \underline{I}_{3m(5)} = 5 + j5 = 5\sqrt{2}e^{j45^\circ} \text{ А.}$$

Искомые токи:

$$i_1 = 10\sqrt{2}\sin(\omega t - 45^\circ) + 5\sqrt{2}\sin(5\omega t + 45^\circ) \text{ А;}$$

$$i_3 = 10\sin(\omega t - 90^\circ) + 5\sin(5\omega t + 90^\circ) \text{ А.}$$

Активная мощность выделяется только в сопротивлении R. Поэтому

$$P = RI_{3(1)}^2 + RI_{3(5)}^2 = 20\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + 20\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1250 \text{ Вт.}$$

Полная мощность $S = U_2 I_1$, где U_2 и I_1 – действующие значения напряжения и тока на входе цепи:

$$U_2 = \sqrt{\left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2} = 158{,}1 \text{ В;} \quad I_1 = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11{,}2 \text{ А.}$$

Следовательно,

$$S = 158{,}1 \cdot 11{,}2 = 1770{,}72 \text{ В} \cdot \text{А.}$$

Коэффициент мощности при этом:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{1250}{1770{,}72} = 0{,}706.$$

Задача 3.9. Определить мгновенные и действующие значения токов в ветвях цепи (рис. 3.8), если $e(t) = 20\sin(2\omega t - 90^\circ)$ В, $j(t) = 10 + 10\sin(\omega t + 60^\circ)$ А, $\omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 12$ Ом, $R_1 = R_2 = 4$ Ом.

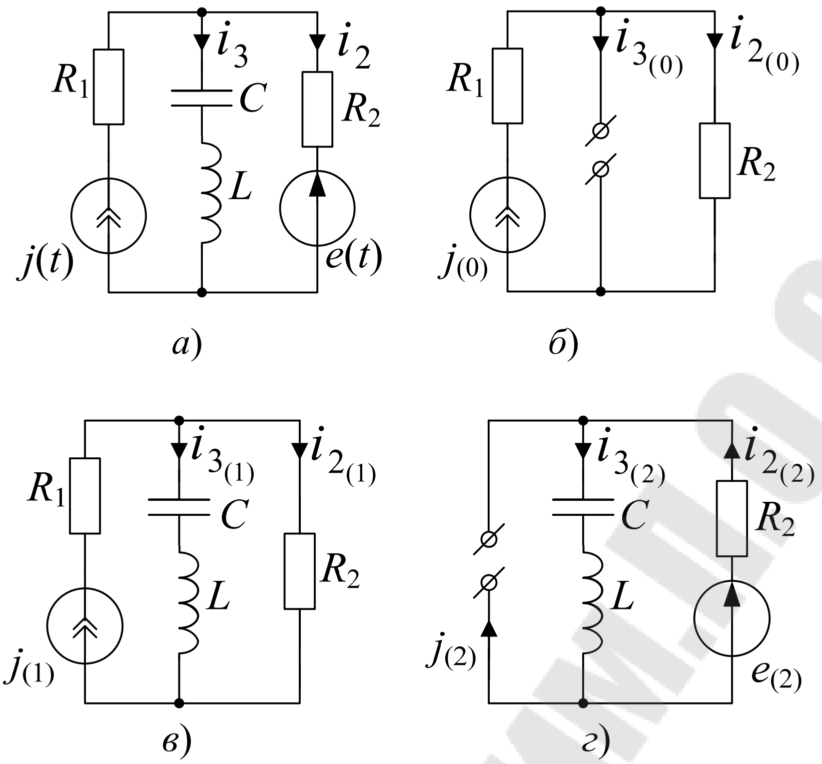


Рис. 3.8

Решение. По условию источник тока содержит нулевую и первую гармоники, а источник ЭДС – только вторую гармонику. С учетом этого распределение токов в ветвях определим путем наложения трех режимов, соответствующих нулевой, первой и второй гармоникам.

На нулевой гармонике

$$I_{2(0)} = J_{(0)} = 10 \text{ А}, \quad I_{3(0)} = 0.$$

Для расчета первой и второй гармоник вначале определим комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_{1(1)} = \underline{Z}_{2(1)} = R_1 = R_2 = 4 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{3(1)} = \frac{j\omega L - j1}{\omega C} = j2 - j2 = 0;$$

$$\underline{Z}_{2(2)} = \frac{j2\omega L - j1}{2\omega C} = j4 - j1 = j3 \text{ Ом}.$$

Следовательно,

$$I_{2(1)} = 0; \quad \underline{I}_{3(1)} = \underline{J}_{(1)} = \frac{10e^{60°}}{\sqrt{2}} = 7{,}07e^{j60°} \text{ А}.$$

$$\underline{J}_{1(2)} = 0; \;\; \underline{I}_{2(2)} = I_{3(2)} = \frac{\underline{E}_{(2)}}{\underline{Z}_{2(2)} + \underline{Z}_{3(2)}} = \frac{\frac{20}{\sqrt{2}} e^{-j90^\circ}}{4 + j3} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{-127^\circ} \text{ А.}$$

Таким образом, мгновенные значения токов во второй и третьей ветвях:

$$i_2(t) = i_{2(0)} + i_{2(1)} + i_{2(2)} = 10 - 4\sin(2\omega t - 127^\circ), \text{ А;}$$

$$i_3(t) = i_{3(0)} + i_{3(1)} + i_{3(2)} = 10\sin(\omega t + 60^\circ) + 4\sin(2\omega t - 127^\circ), \text{ А.}$$

Действующие значения токов:

$$I_1 = \sqrt{L_{1(0)}^2 + \left(\frac{I_{1m(1)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2} = 12{,}24 \text{ А;}$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2(0)}^2 + \left(\frac{I_{2m(2)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 10{,}39 \text{ А;}$$

$$I_3 = \sqrt{I_{3(0)}^2 + \left(\frac{I_{3m(3)}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 7{,}615 \text{ А.}$$

Задача 3.10. В цепи (рис. 3.9) напряжение, приложенное к первичной обмотке двухобмоточного трансформатора, равно $u(t) = 100 + 70{,}7\sin\omega t$ В. Активные сопротивления обмоток $R_1 = 40$ Ом и $R_2 = 60$ Ом; реактивные сопротивления на основной частоте $\omega L_1 = 40$ Ом, $\omega L_2 = 60$ Ом и $\omega M = 10$ Ом. Найти мгновенные значения токов в обмотках трансформатора.

Решение. При решении следует учесть, что постоянная составляющая тока первичной обмотки не наводит ЭДС взаимной индукции во вторичной обмотке.

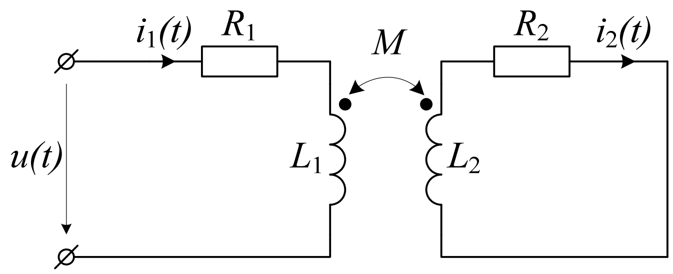


Рис. 3.9

Следовательно,

$$I_{1(0)} = \frac{U_0}{R_1} = \frac{100}{40} = 2{,}5 \text{ A}, \quad I_{2(0)} = 0.$$

Уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа с учетом напряжения взаимоиндукции для первой гармоники, имеют вид:

$$\underline{U}_{(1)} = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_{1(1)} - j\omega M \underline{I}_{2(1)},$$

$$0 = -j\omega M \underline{I}_{1(1)} + (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_{2(1)}.$$

Решая уравнения, получим:

$$\underline{I}_{1(1)} = 0{,}984e^{-j31{,}5°} \text{ A}, \quad \underline{I}_{2(1)} = 0{,}232e^{-j166{,}5°} \text{ A}.$$

Мгновенные значения токов в обмотках трансформатора:

$$i_1(t) = 2{,}5 + 0{,}984\sqrt{2}\sin(\omega t - 31{,}5°) \text{ A};$$

$$i_2(t) = 0{,}232\sqrt{2}\sin(\omega t - 166{,}5°) \text{ A}.$$

Задача 3.11. К генератору с ЭДС $e(t) = 100\cos\omega t + 50\cos 2\omega t + {}$ $+ 10\cos 3\omega t$. В присоединены параллельно две ветви: в одной из них резистор R_A последовательно соединен с индуктивностью L; во второй ветви резистор R_B последовательно соединен с конденсатором емкостью C (рис. 3.10). Известно, что $R_A = R_B = 20$ Ом, $\omega L = \dfrac{1}{\omega C} =$ $= 15$ Ом. В какой ветви потребляемая мощность больше?

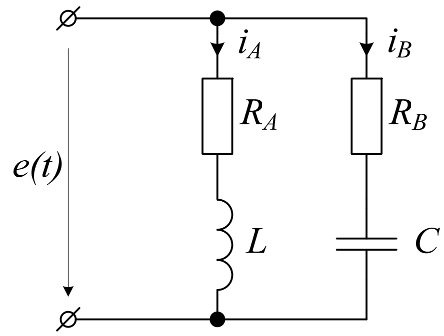


Рис. 3.10

Решение. Согласно условию ЭДС источника энергии представлена суммой гармоник:

$$e(t)=100\cos\omega t+50\cos 2\omega t+10\cos 3\omega t \text{ В.}$$

Расчет ведем в соответствии с методом наложения.

На первой гармонике

$$\underline{E}_{A(1)}=\frac{100}{\sqrt{2}}e^{j90^\circ}\text{В},\quad X_{L(1)}=\omega L=15\text{ Ом},\quad X_{C(1)}=\frac{1}{\omega C}=15\text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{A(1)}=R_A+jX_{L(1)}=20+j15=25e^{j36{,}9^\circ}\text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{B(1)}=R_B-jX_{C(1)}=20-j15=25e^{-j36{,}9^\circ}\text{Ом};$$

$$\underline{I}_{A(1)}=\frac{\underline{E}_{A(1)}}{\underline{Z}_{A(1)}}=\frac{100e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}\cdot 25e^{j36{,}9^\circ}}=\frac{4}{\sqrt{2}}e^{j53{,}1^\circ}\text{ А};$$

$$\underline{I}_{B(1)}=\frac{\underline{E}_{B(1)}}{\underline{Z}_{B(1)}}=\frac{100e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}\cdot 25e^{-j36{,}9^\circ}}=\frac{4}{\sqrt{2}}e^{j126{,}9^\circ}\text{ А}.$$

На второй гармонике

$$\underline{E}_{A(2)}=\frac{50}{\sqrt{2}}e^{j90^\circ}\text{В},\quad X_{L(2)}=2\omega L=30\text{ Ом},\quad X_{C(2)}=\frac{1}{2\omega C}=7{,}5\text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{A(2)}=R_A+jX_{L(2)}=20+j30=36{,}06e^{j56{,}3^\circ}\text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{B(2)}=R_B-jX_{C(2)}=20-j7{,}5=21{,}36e^{-j20{,}6^\circ}\text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{A(2)}=\frac{\underline{E}_{A(2)}}{\underline{Z}_{A(2)}}=\frac{50e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}\cdot 36{,}06e^{j56{,}3^\circ}}=\frac{1{,}39}{\sqrt{2}}e^{j33{,}7^\circ}\text{ А};$$

$$\underline{I}_{B(2)} = \frac{\underline{E}_{B(2)}}{\underline{Z}_{B(2)}} = \frac{50e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}\cdot 21{,}36e^{-j20{,}6^\circ}} = \frac{2{,}34}{\sqrt{2}}e^{j110{,}6^\circ}\ \text{А}.$$

На третьей гармонике

$$\underline{E}_{A(3)} = \frac{10}{\sqrt{2}}e^{j90^\circ}\,\text{В};\quad X_{L(3)} = 3\omega L = 45\ \text{Ом};\quad X_{C(3)} = \frac{1}{3\omega C} = 5\ \text{Ом}.$$

$$\underline{Z}_{A(3)} = R_A + jX_{L(3)} = 20 + j45 = 49{,}24e^{j66^\circ}\,\text{Ом};$$

$$\underline{Z}_{B(3)} = R_B - jX_{C(3)} = 20 - j5 = 20{,}62e^{-j14^\circ}\,\text{Ом};$$

$$\underline{I}_{A(3)} = \frac{\underline{E}_{A(3)}}{\underline{Z}_{A(3)}} = \frac{10e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}\cdot 49{,}24e^{j66^\circ}} = \frac{0{,}2}{\sqrt{2}}e^{j24^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{B(3)} = \frac{\underline{E}_{B(3)}}{\underline{Z}_{B(3)}} = \frac{10e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}\cdot 20{,}62e^{-j14^\circ}} = \frac{0{,}48}{\sqrt{2}}e^{j104^\circ}\ \text{А}.$$

Потребляемая мощность:

$$P_A = R_A\left\{I_{A(1)}^2 + I_{A(2)}^2 + I_{A(3)}^2\right\} = 20\left\{\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1{,}39}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} = 179{,}7\ \text{Вт};$$

$$P_B = R_B\left\{I_{B(1)}^2 + I_{B(2)}^2 + I_{B(3)}^2\right\} = 20\left\{\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2{,}34}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}48}{\sqrt{2}}\right)^2\right\} = 216{,}1\ \text{Вт}.$$

Расчет показывает, что потребляемая мощность больше в ветви с резистором R_B и емкостью C.

3.2. Показания приборов при периодических воздействиях

Задача 3.12. На вход цепи с параметрами элементов $R = 30$ Ом, $R_1 = 18$ Ом, $L = 60$ мГн приложено напряжение $u(t) = 120 + 200\sin\omega t + 50\sin(3\omega t + 30^\circ)$ В (рис. 3.11). Частота основной гармоники f = 50 Гц. Определить мгновенные значения тока $i(t)$ и напряжения $u_{ab}(t)$, а также показания приборов A_1 и V_1 (магнитоэлектрической системы), A_2 и V_2 (индукционной системы), A_3 и V_3 (электродинамической системы).

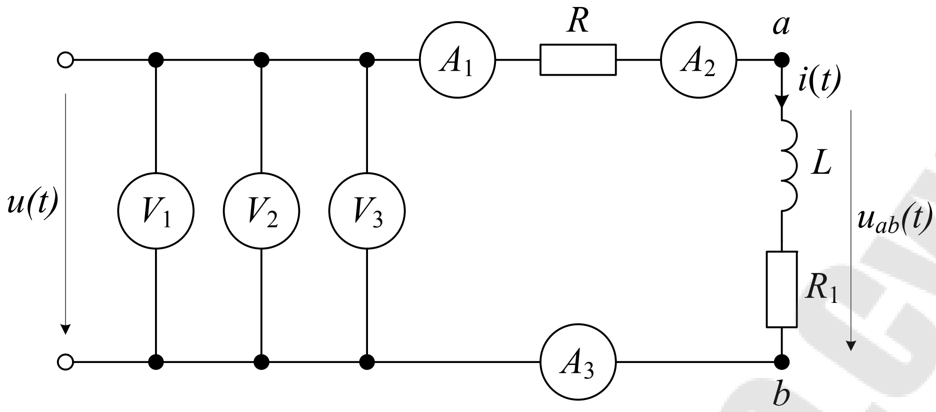


Рис. 3.11

Решение. Как было изложено выше, приборы A_1 и V_1 показывают среднее значение тока и напряжения на входе; A_2 и V_2 – действующее значение переменной составляющей тока и напряжения на входе; A_3 и V_3 – действующее значение всего тока и напряжения на входе.

Показания вольтметров:

$$U_{V_1} = U_0 = 120\ \text{В}; \qquad U_{V_2} = \sqrt{\left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 146\ \text{В};$$

$$U_{V_3} = \sqrt{120^2 + \left(\frac{200}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2} \approx 189\ \text{В}.$$

Определим мгновенные значения тока $i(t)$ и напряжения $u_{ab}(t)$, применив метод наложения: постоянные составляющие тока и напряжения определяются по схеме (рис. 3.12, *а*).

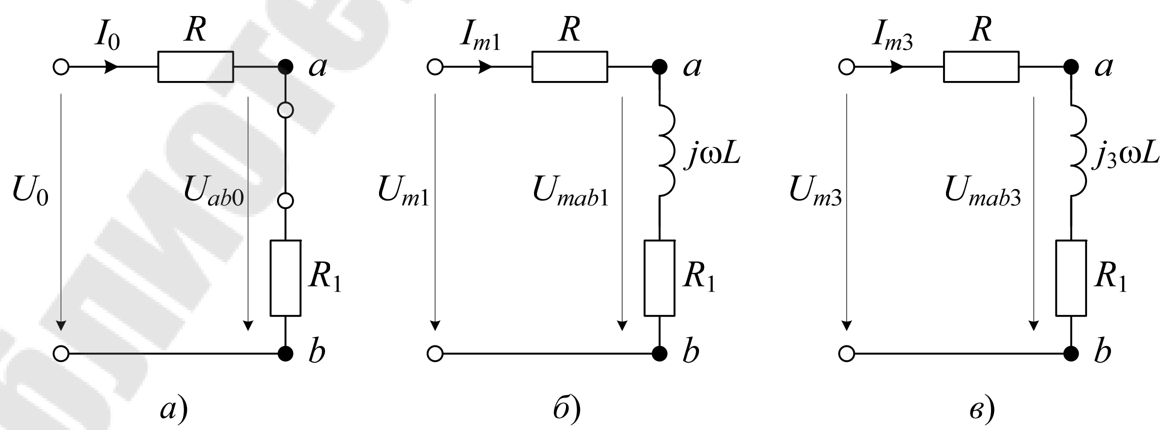


Рис. 3.12

$$U_0 = 120\,\text{В}; \quad I_0 = \frac{U_0}{R+R_1} = \frac{120}{30+18} = 2{,}5 \text{ А}; \; U_{ab0} = I_0 R_1 = 2{,}5 \cdot 18 = 45\,\text{В}.$$

Показание амперметра: $I_{A_1} = I_0 = 2{,}5$ А.

Комплексные амплитуды тока $\underline{I}_{m(1)}$ и напряжения $\underline{U}_{mab(1)}$ ***первой гармоники*** определим по схеме (рис. 3.12, *б*):

$$\underline{U}_{m(1)} = 200e^{j0^\circ}\text{В}, \quad \omega = 2\pi f = 314 \text{ 1/с};$$

$$\omega L = 314 \cdot 60 \cdot 10^{-3} = 18{,}84 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(1)} = (R+R_1) + j\omega L = (30+18) + j18{,}84 = 51{,}57e^{j21{,}43^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = \frac{200}{51{,}57e^{j21{,}43^\circ}} = 3{,}88e^{-j21{,}43^\circ} \text{А};$$

$$\underline{U}_{mab(1)} = (R_1 + j\omega L)\underline{I}_{m(1)} = (18 + j18{,}84)3{,}88e^{-j21{,}43} = 101{,}1e^{j24{,}9^\circ} \text{ В}.$$

Мгновенные значения тока и напряжения ***первой гармоники***:

$$i_{(1)}(t) = 3{,}88\sin(\omega t - 21{,}43^\circ) \text{ А};$$

$$u_{ab(1)}(t) = 101{,}1\sin(\omega t + 24{,}9^\circ) \text{ В}.$$

Комплексные амплитуды тока и напряжения ***третьей гармоники*** рассчитываем по схеме (рис. 3.12, *в*).

$$\underline{U}_{m(3)} = 50e^{j30^\circ}\text{В}, \quad 3\omega L = 56{,}52 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{(3)} = (R+R_1) + j3\omega L = 48 + j56{,}52 = 74{,}15e^{j49{,}66^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{I}_{m(3)} = \frac{\underline{U}_{m(3)}}{\underline{Z}_{(3)}} = \frac{50e^{j30^\circ}}{74{,}15e^{j49{,}66^\circ}} = 0{,}635 - j0{,}227 = 0{,}674e^{-j19{,}66^\circ} \text{А};$$

$$\underline{U}_{mab(3)} = \underline{I}_{m(3)}(R_1 + j3\omega L) = 0{,}674e^{-j19{,}66^\circ}(18 + j56{,}52) =$$
$$= 24{,}24 + j31{,}79 = 40e^{j52{,}7^\circ} \text{ В}.$$

Мгновенные значения тока и напряжения ***третьей гармоники*:**

$$i_{(3)}(t) = 0{,}674\sin(3\omega t - 19{,}66^\circ) \text{ А};$$

$$u_{ab(3)}(t) = 40\sin(3\omega t + 52{,}7^\circ) \text{ В}.$$

Показания амперметров:

$$A_2 \to I' = \sqrt{\left(\frac{3{,}88}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}674}{\sqrt{2}}\right)^2} = 2{,}785\ \text{А};$$

$$A_3 \to I = \sqrt{2{,}5^2 + \left(\frac{3{,}88}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}674}{\sqrt{2}}\right)^2} = 3{,}74\ \text{А}.$$

Задача 3.13. На вход цепи (рис. 3.13) подается напряжение $u(t) = 10 + 40\sin\omega t + 20\sin(2\omega t - 45°)$ В. Параметры цепи: $R = 10$ Ом, $\omega L_1 = 20$ Ом, $\frac{1}{\omega C_1} = 20$ Ом, $\omega L_2 = 10$ Ом, $\frac{1}{\omega C_2} = 40$ Ом. Определить ток $i(t)$.

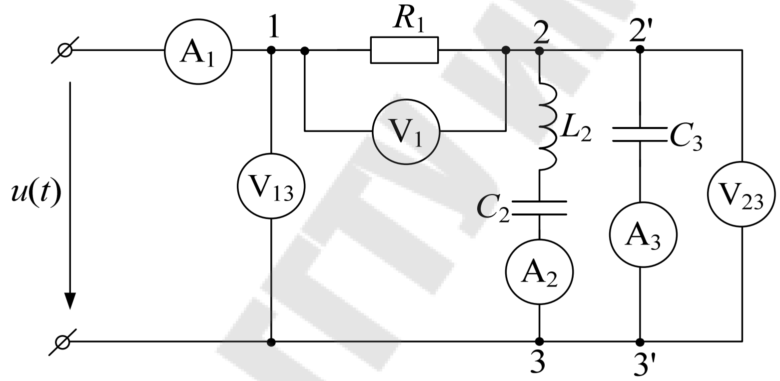


Рис. 3.13

Решение. Так как постоянный ток через емкость не протекает, то

$$I_{1(0)} = I_{2(0)} = I_{3(0)} = 0; \quad U_{1(0)} = 0; \quad U_{13(0)} = U_{23(0)} = 0.$$

Расчет первой гармоники

В ветви 2–3 резонанс напряжений:

$$X_{2(1)} = X_{L_2(1)} - X_{C_2(1)} = 0.$$

Следовательно, ветвь $2' - 3'$ закорочена:

$$I_{3(1)} = 0; \quad I_{1(1)} = I_{2(1)} = \frac{U_{(1)}}{R_1} = \frac{5}{5} = 1\ \text{А};$$

$$U_{23(1)} = 0; \quad U_{13(1)} = U_{(1)} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5 \text{ В}.$$

Расчет второй гармоники

$$X_{2(2)} = X_{L_2(2)} - X_{C_2(2)} = 4 - 1 = 3 \text{ Ом}; \quad X_{3(2)} = X_{C_3(2)} = \frac{6}{2} = 3 \text{ Ом}.$$

В параллельных ветвях резонанс токов:

$$\underline{Z}_{23(2)} = \infty; \quad I_{1(2)} = 0; \quad U_{12(2)} = 0; \quad U_{23(2)} = U_{(2)} = 3 \text{ В};$$

$$\underline{I}_{2(2)} = \frac{U_{23(2)}}{X_{2(2)}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ А}; \quad \underline{I}_{3(2)} = \frac{U_{23(2)}}{X_{3(2)}} = \frac{3}{3} = 1 \text{ А}.$$

Показания приборов:

$$I_{A_1} = \sqrt{I_{1(0)}^2 + I_{1(1)}^2 + I_{1(2)}^2} = \sqrt{0 + 1^2 + 0} = 1 \text{ А};$$

$$I_{A_2} = \sqrt{I_{2(0)}^2 + I_{2(1)}^2 + I_{2(2)}^2} = \sqrt{0 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{,}41 \text{ А};$$

$$I_{A_3} = \sqrt{0 + 0 + 1^2} = 1 \text{ А}.$$

$$U_{V_1} = \sqrt{U_{1(0)}^2 + U_{1(1)}^2 + U_{1(2)}^2} = \sqrt{0 + 5^2 + 0} = 5 \text{ В};$$

$$U_{V_{23}} = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = 5 \text{ В}; \quad U = \sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} = 7{,}07 \text{ В}.$$

3.3. Резонансные явления в цепях несинусоидального тока

Задача 3.14. Цепь (рис. 3.14) подключена к источнику питания с напряжением $u(t) = 20 + 80\sin 500t + 30\sin(2 \cdot 500t - 45°)$ В. Элементы схемы имеют параметры: $R = 20$ Ом, $L_1 = 40$ мГн, $L_2 = 20$ мГн, $C_1 = 100$ мкФ, $C_2 = 50$ мкФ. Определить ток $i(t)$.

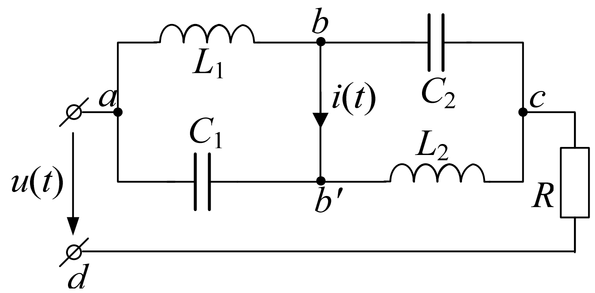


Рис. 3.14

Решение. Напряжение источника задано в виде усеченного ряда Фурье, содержащего постоянную составляющую $U_{(0)} = 20$ В, первую $[u_{(1)} = 80\sin 500t$ В] и вторую $[u_{(2)} = 30\sin(2\cdot 500t - 45°)$, В] гармоники. Поэтому ток $i(t)$ можно представить в виде $i(t) = I_{(0)} + i_{(1)} + i_{(2)}$.

Ток, соответствующий постоянной составляющей $I_{(0)}$, течет по пути $a - b - b' - c - d$ и равен:

$$I_{(0)} = \frac{U_{(0)}}{R} = \frac{20}{20} = 1 \text{ А}.$$

На частоте первой гармоники ($\omega = 500$ рад/с):

$$X_{L_1(1)} = \omega L_1 = 500\cdot 40\cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом};$$

$$X_{C_1(1)} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{500\cdot 100\cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом},$$

т. е. контур L_1C_1 настроен в резонанс. Его общее сопротивление на этой частоте бесконечно велико, напряжение первой гармоники $u_{(1)}$ будет приложено к зажимам этого контура. При этом комплексная амплитуда и мгновенное значение тока на участке bb' будут соответственно равны:

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{\underline{U}_{m(1)}}{jX_{L_1(1)}} = \frac{80}{j20} = 4e^{-j90°} \text{ А} \quad \Rightarrow \quad i_{(1)} = 4\sin(500t - 90°) \text{ А}.$$

На частоте второй гармоники ($\omega = 2\cdot 500$ рад/с):

$$X_{L_2(2)} = 2\cdot 500\cdot 20\cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом};$$

$$X_{C_2(2)} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{2\cdot 500\cdot 50\cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом},$$

т. е. контур L_2C_2 настроен в резонанс. Его общее сопротивление бесконечно велико и напряжение второй гармоники $u_{(2)}$ приложено к зажимам этого контура. Комплексная амплитуда и мгновенное значение тока на участке bb' будут соответственно равны:

$$\underline{I}_{m(2)}=\frac{\underline{U}_{m(2)}}{jX_{L_2(2)}}=\frac{30e^{-45^\circ}}{j20}=1{,}5e^{-j135^\circ}\text{ A}\quad\Rightarrow\quad i_{(2)}=1{,}5\sin(500t-135^\circ)\text{ A}.$$

В итоге

$$i(t)=I_{(0)}+i_{(1)}(t)+i_{(2)}(t)=1+4\sin(500t-90^\circ)+1{,}5\sin(2\cdot500t-135^\circ)\,\text{A}.$$

Задача 3.15. На вход цепи (рис. 3.15) подается напряжение $u(t)=10+40\sin\omega t+20\sin(2\omega t-45^\circ)$ В. Параметры цепи: $R=10$ Ом, $\omega L_1=20$ Ом, $\dfrac{1}{\omega C_1}=20$ Ом, $\omega L_2=10$ Ом, $\dfrac{1}{\omega C_2}=40$ Ом. Определить ток $i(t)$.

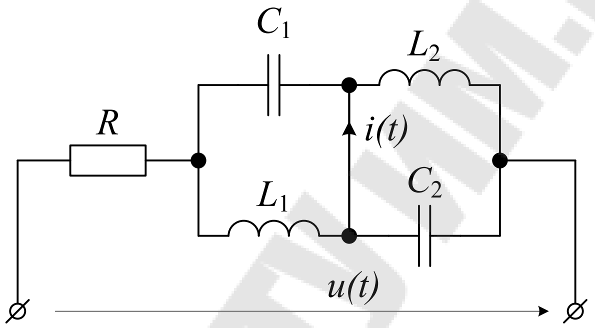


Рис. 3.15

Решение. Цепь можно рассматривать как последовательное соединение резистора R, параллельного контура L_1C_1 и параллельного контура L_2C_2.

В соответствии с методом наложения ток i можно представить в виде трех слагаемых:

$$i(t)=I_0+i_{(1)}(\omega t)+i_{(2)}(2\omega t),$$

где I_0 – постоянная составляющая; $i_{(1)}(\omega t)$ – ток первой гармоники, $i_{(2)}(2\omega t)$ – ток второй гармоники.

Постоянная составляющая

$$I_0=\frac{U}{R}=\frac{10}{10}=1\text{ A}.$$

При частоте ω первой гармоники параллельный контур L_1C_1 настроен в резонанс, так как $\omega L_1 = \dfrac{1}{\omega C_1}$. Его сопротивление бесконечно велико (потерь в контуре нет).

Следовательно, и ток в резисторе равен нулю, а напряжение первой гармоники $u_{(1)} = 40\sin\omega t$ приложено к зажимам этого контура.

Ток в индуктивности L_1:

$$\underline{I}_{L1} = \frac{\underline{U}_{(1)}}{j\omega L_1} = \frac{40}{\sqrt{2}\cdot j20} = -\frac{j2}{\sqrt{2}}\ \text{А}.$$

Напряжение на зажимах второго контура равно нулю, т. е. ток в емкости C_2 и в индуктивности L_2 равен нулю.

Поэтому по первому закону Кирхгофа:

$$i_{(1)} = i_{L1} = 2\sin(\omega t - 90°)\ \text{А}.$$

При частоте 2ω второй гармоники параллельный контур L_2C_2 настроен в резонанс, так как $2\omega L_2 = \dfrac{1}{2\omega C_2}$, его сопротивление бесконечно велико и напряжение $u_{(2)} = 20\sin(2\omega t - 45^{\circ})$ В приложено к зажимам этого контура.

Ток в индуктивности L_2:

$$\underline{I}_{L_2} = \frac{\underline{U}_{(2)}}{2j\omega L_2} = \frac{20e^{-j45°}}{\sqrt{2}\cdot 2e^{j90°}} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{-135°}}\ \text{А}.$$

Ток в емкости C_1 равен нулю и по первому закону Кирхгофа:

$$i_{(2)} = i_{L_2} = 1\sin(2\omega t - 135°)\ \text{А}.$$

Искомый ток:

$$i(t) = I_0 + i_{(1)}(\omega t) + i_{(2)}(2\omega t) = 1 + 2\sin(\omega t - 90°) + 1\sin(2\omega t - 135°)\ \text{А}.$$

Задача 3.16. К электрической цепи (рис. 3.16), содержащей в качестве нагрузки электромагнит, индуктивность которого $L = 6{,}36$ мГн и активное сопротивление $R = 5$ Ом, подведено напряжение, равное $u(t) = 40 + 50\sin 2\omega t$ В. Для снижения в токе нагрузки синусоидальной составляющей перед электромагнитом включен LC-фильтр, индуктивность которого $L = 0{,}00318$ Гн и емкость $C = 796$ мкФ.

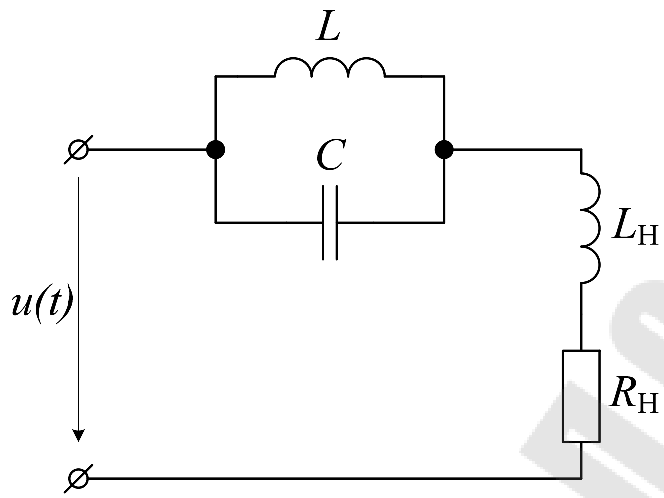


Рис.3.16

Определить мгновенные и действующие значения токов и напряжений на нагрузке до и после присоединения фильтра.

Решение. Ток в нагрузке до присоединения фильтра состоит из постоянной составляющей и второй гармоники.

Постоянная составляющая тока

$$I_{(0)} = \frac{U_{(0)}}{R} = \frac{40}{5} = 8 \text{ A}.$$

Вторая гармоника тока:

$$i_{(2)} = \left(\frac{\underline{U}_{m(2)}}{\underline{Z}_{\text{н}}}\right) \sin(2\omega t - \varphi_{\text{н}}) = 7{,}8 \sin(2\omega t - 38{,}7°) \text{ A},$$

где

$$\underline{Z}_{\text{н}} = R_{\text{н}} + j2\omega L_{\text{н}} = 5 + j2 \cdot 314 \cdot 0{,}00636 = 5 + j4 = 6{,}4e^{38{,}7°} \text{ Ом}.$$

Уравнение для мгновенного значения тока запишем в виде:

$$i(t) = 8 + 7{,}8 \sin(2\omega t - 38{,}7°) \text{ A}.$$

Действующее значение тока в нагрузке:

$$I = \sqrt{8^2 + \left(\frac{7{,}8}{\sqrt{2}}\right)^2} = 9{,}7 \text{ A}.$$

Действующее значение напряжения на нагрузке:

$$U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_{m(2)}^2}{\sqrt{2}}} = \sqrt{40^2 + \left(\frac{50}{\sqrt{2}}\right)^2} = 53{,}4 \text{ В}.$$

Далее оценим схему с присоединенным фильтром.

Для постоянной составляющей тока сопротивление фильтра равно нулю, так как $X_L = \omega L = 0$.

Сопротивления индуктивности X_L и емкости X_C соответственно равны:

$$X_L = 2\omega L = 2 \cdot 314 \cdot 0{,}00318 = 2 \text{ Ом},$$

$$X_C = \frac{1}{(2\omega C)} = \frac{1}{(2 \cdot 314 \cdot 796 \cdot 10^{-6})} = 2 \text{ Ом}.$$

Следовательно, сопротивление фильтра для второй гармоники

$$\underline{Z} = \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = \infty .$$

Таким образом, ток в электромагните

$$i(t) = I_{(0)} = \frac{V_{(0)}}{R} 8\text{А}.$$

Задача 3.17. Напряжение на входе цепи (рис. 3.17) известно и равно $u(t) = 100\sin\omega t + 50\sin 3t$ В. $L = 2{,}5$ Гн; $\omega = 314$ рад/с. Рассчитать значения емкостей C_1 и C_2, при которых напряжение на сопротивлении $R_н$ не зависит от значения R и равно $u_R(t) = 100\sin\omega t$ В.

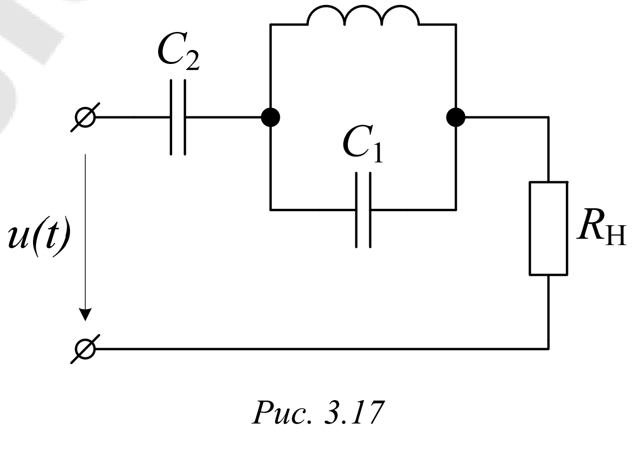


Рис. 3.17

Решение. Напряжение $u_R(t)$ не будет содержать третьей гармоники в том случае, когда параллельный контур L_1C_1 настроен в резонанс, т. е. при условии

$$3\omega C_1 = \frac{1}{3\omega L_1},$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{9\omega^2 L_1} = \frac{1}{9 \cdot 314^2 \cdot 2{,}5} \approx 1{,}352 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

Вместе с тем напряжение $u_R(t)$ равно первой гармонике напряжения источника тогда, когда сопротивление схемы чисто активным, т. е. при резонансе напряжений. Из условия резонанса напряжений на первой гармонике следует, что

$$\frac{\dfrac{L_1}{C_1}}{\dfrac{1}{\omega C_1} - \omega L_1} - \frac{1}{\omega C_2} = 0,$$

откуда

$$C_2 = \frac{1}{\omega^2 L_1} - C_1 = \frac{1}{314^2 \cdot 2{,}5} - 1{,}352 \cdot 10^{-6} \approx 2{,}705 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.18. Записать ряд Фурье для функции $u_2(t)$, представленной на рис. 3.18.

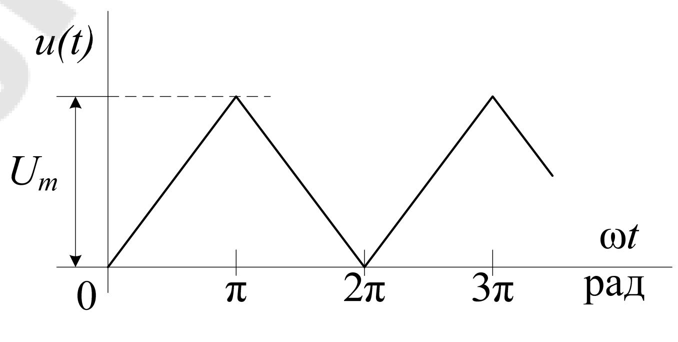


Рис. 3.18

Задача 3.19. Цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора с сопротивлением $R = 5$ Ом и конденсатора емкостью $C = 1060$ мкФ, находится под напряжением

$$u(t) = 100 + 200\sin\omega t + 30\sin\left(3\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{В}.$$

Частота основной гармоники $f = 50$ Гц.

Найти мгновенные значения тока в цепи $i(t)$ и напряжения на конденсаторе $u_C(t)$. Определить действующее значение тока и активную мощность, потребляемую цепью.

Задача 3.20. К индуктивной катушке с активным сопротивлением $R = 3$ Ом и индуктивностью $L = 12{,}7$ мГн подведено напряжение $u(t) = 30 + 60\sin\omega t$ В. Частота основной гармоники $f = 50$ Гц. Определить мгновенные значения тока в цепи и напряжения на индуктивном элементе. Рассчитать активную мощность, потребляемую катушкой.

Задача 3.21. Для питания нагрузки с сопротивлением $R_\text{н} = 3000$ Ом от источника выпрямленного синусоидального напряжения применен фильтр, параметры которого $R_1 = 100$ Ом, $\omega L = 3000$ Ом, $\dfrac{1}{\omega C} = 20$ Ом (рис. 3.19). Определить отношение постоянной составляющей тока к действующему значению тока в нагрузке. Сравнить с соотношением тех же величин при непосредственном подключении нагрузки к источнику однофазного двухполупериодного выпрямленного напряжения.

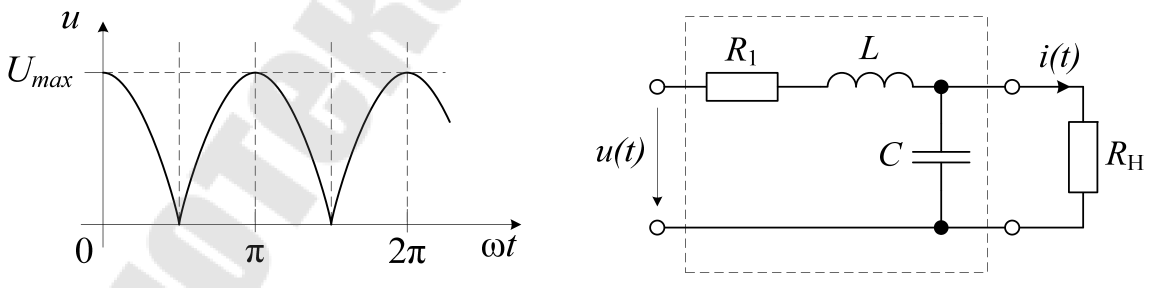


Рис. 3.19

Задача 3.22. На вход цепи (рис. 3.20) подается напряжение $u(t) = 10 + 40\sin\omega t + 20\sin(2\omega t - 45°)$ В. Параметры цепи: $\omega L_1 = 20$ Ом, $\dfrac{1}{\omega C_1} = 20$ Ом, $\omega L_2 = 10$ Ом, $\dfrac{1}{\omega C_1} = 40$ Ом, $R = 10$ Ом. Определить ток $i(t)$.

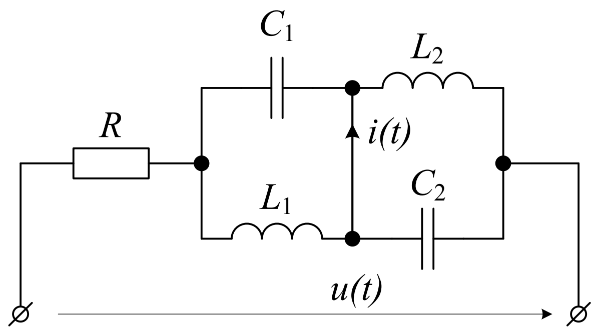


Рис. 3.20

Задача 3.23. Напряжение на входе цепи (рис. 3.21) известно и равно $u(t) = 40\cos(\omega t + 30°) + 6\sin 3\omega t$ В; $\omega = 1000$ рад/с; $L = 0{,}1$ Гн. Найти емкости C_1 и C_2, при которых $u_R(t) = 40\cos(\omega t + 30°)$ В.

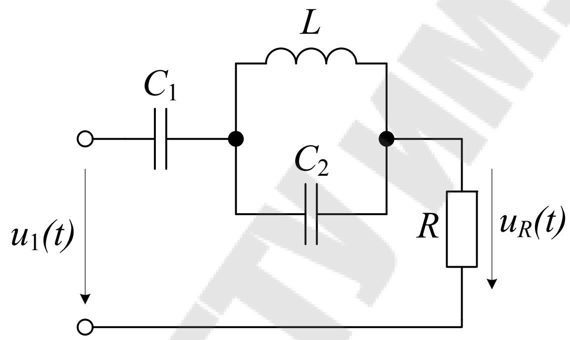


Рис. 3.21

Глава 4. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Трехфазная электрическая цепь представляет собой совокупность трех однофазных цепей, в которых действуют ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе на угол 120° и полученные в одном источнике электрической энергии.

Простейшая трехфазная цепь состоит из трех основных элементов:

– источника (чаще всего синхронного генератора), посредством которого механическая энергия преобразуется в электрическую;

– линии передачи со всем необходимым оборудованием;

– приемников (потребителей), которые могут быть как трехфазными, так и однофазными.

Особенность простейшего трехфазного генератора заключается в том, что три его обмотки, от которых получает электрическую энергию внешняя цепь, конструктивно сдвинуты в пространстве на угол 120° одна относительно другой. В связи с этим наводимые в обмотках ЭДС (каждая из них во времени изменяется по синусоидальному закону) отличаются одна от другой по фазе на 120°. Принято каждую из обмоток называть «фазой» генератора и обозначать латинскими буквами A, B и C. При этом начала фаз обозначают теми же буквами A, B и C, а концы – буквами X, Y и Z. За положительное направление ЭДС в каждой фазе принято направление от конца фазы к началу (рис. 1).

Обычно наведенные в фазах ЭДС имеют одинаковые амплитуды и сдвинуты по фазе относительно друг друга на 120°. Такая система ЭДС называется *симметричной*. Если же ЭДС не равны по величине или сдвинуты друг относительно друга на угол, не равный 120°, систему ЭДС называют *несимметричной.*

Если ЭДС какой-либо отдельной фазы (например, фазы A), принять за исходную и считать ее начальную фазу равной нулю, то мгновенные значения симметричной системы ЭДС можно записать в тригонометрической форме:

$$e_A = E_m \sin\omega t; \qquad e_B = E_m \sin(\omega t - 120°);$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t - 240°) = E_m \sin(\omega t + 120°), \tag{1}$$

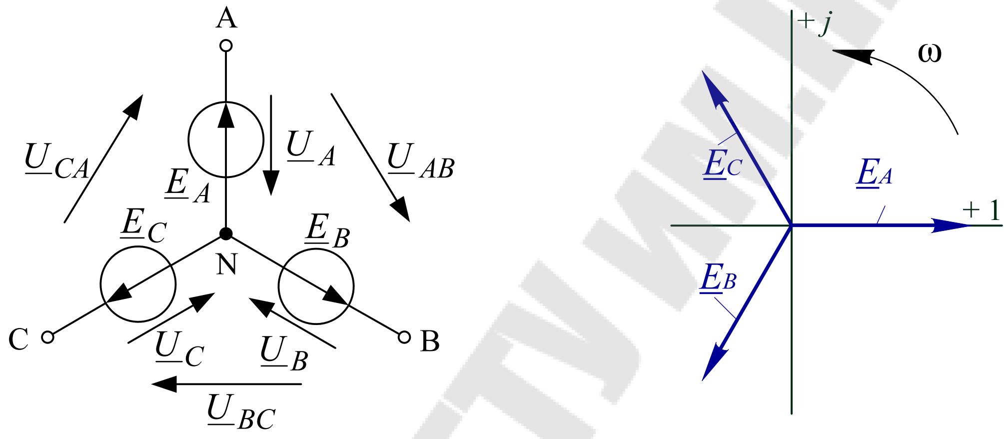
а соответствующие комплексы действующих значений – в виде:

$$\underline{E}_A = E_ф e^{j0°}; \quad \underline{E}_B = E_ф e^{-j120°}; \quad \underline{E}_C = E_ф e^{-j240°} = E_ф e^{j120°}. \qquad (2)$$

В любой момент времени для симметричной системы ЭДС справедливы равенства

$$e_A + e_B + e_C = 0 \qquad \text{или} \qquad \underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0. \qquad (3)$$

Обычно обмотки трехфазного источника соединяют *звездой*. На схеме замещения каждую из фаз условно изображают, как показано на рис. 1, *а*.



а) *б*)

Рис. 1

Для простоты обмотки генератора не показывают, а их сопротивлениями ввиду их малости по сравнению с сопротивлениями нагрузки обычно пренебрегают. При этом фазные напряжения принято считать равными фазным ЭДС, т. е.

$$u_A = e_A; \quad u_B = e_B; \quad u_C = e_C, \qquad (4)$$

и в комплексной форме

$$\underline{U}_A = \underline{E}_A = U_ф e^{j0°}\ \text{В}; \qquad \underline{U}_B = \underline{E}_B = U_ф e^{-j120°}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_C = \underline{E}_C = U_ф e^{j120°}\ \text{В}. \qquad (5)$$

Линейные напряжения $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{BC}$ и $\underline{U}_{CA}$ согласно второму закону Кирхгофа будут равны разностям:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A. \tag{6}$$

Для симметричного источника с фазным напряжением $U_{\text{ф}}$ комплексы фазных напряжений можно представить в виде:

$$\underline{U}_A = U_{\text{ф}} e^{j0^\circ}; \quad \underline{U}_B = U_{\text{ф}} e^{-j120^\circ}; \quad U_{\text{C}} = U_{\text{ф}} e^{j120^\circ}, \tag{7}$$

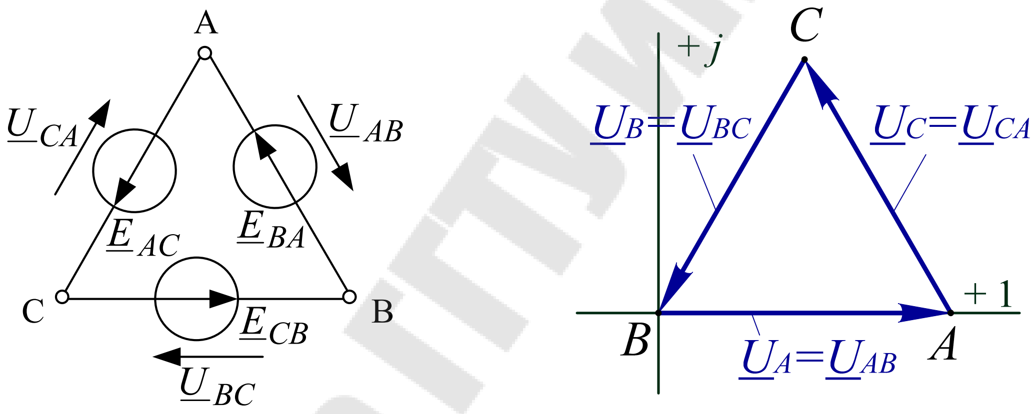
а комплексы линейных напряжений

$$\underline{U}_{AB} = U_{\text{л}} e^{j30^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{BC} = U_{\text{л}} e^{-j90^\circ} \text{ В}; \quad \underline{U}_{CA} = U_{\text{л}} e^{j150^\circ} \text{ В}, \tag{8}$$

где

$$U_{\text{л}} = \sqrt{3} U_{\text{ф}}.$$

Соответствующая векторная диаграмма напряжений трехфазного симметричного источника, приведена на рис. 1, *б*.



а) *б*)

Рис. 2

При соединении фазных обмоток источника треугольником (рис. 2, *а*) линейные напряжения равны фазным. Векторная диаграмма напряжений такого источника приведена на рис. 2, *б*.

Симметричный режим. Для симметричного приемника, фазы которого $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}_{\text{ф}}$ соединены звездой (рис. 3), токи в фазах:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_{\text{л}} + \underline{Z}_{\text{ф}}}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_{\text{л}} + \underline{Z}_{\text{ф}}}; \quad \underline{I}_{\text{C}} = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_{\text{л}} + \underline{Z}_{\text{ф}}},$$

где $\underline{Z}_{\text{л}}$ – сопротивление линейных проводов. По модулю эти токи одинаковы и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный 120°.

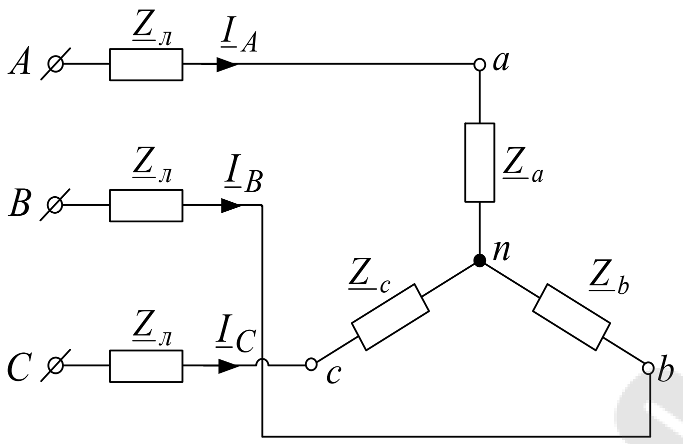


Рис. 3

Для симметричного приемника, фазы которого соединены треугольником (рис. 4), $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}$.

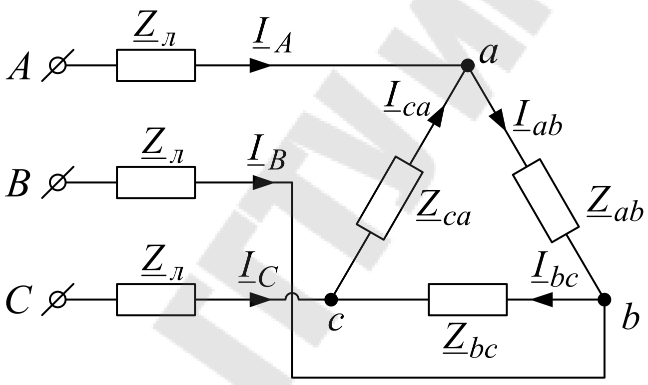


Рис. 4

Если $\underline{Z}_л = 0$, то фазные токи приемника:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}}.$$

По модулю эти токи также одинаковы и имеют сдвиг по фазе относительно друг друга, равный 120°.

Линейные токи приемника, фазы которого соединены треугольником, равны разностям его фазных токов, т. е.

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc}. \tag{9}$$

При этом для симметричного приемника:

$$\underline{I}_A = \sqrt{3}\underline{I}_{ab}e^{-j30°}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_A e^{-J120°}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_A e^{120°}.$$

Соответственно, фазные токи выражаются через линейные следующим образом:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{I}_A}{\sqrt{3}} e^{j30°}; \quad \underline{I}_{bc} = \underline{I}_{ab}e^{-j120°}; \quad \underline{I}_{ca} = \underline{I}_{ab}e^{j120^*}.$$

Если $\underline{Z}_л \neq 0$, то после преобразования треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду линейные токи находят по формулам:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\frac{\underline{Z}}{3} + \underline{Z}_л}; \qquad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\frac{\underline{Z}}{3} + \underline{Z}_л}; \qquad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\frac{\underline{Z}}{3} + \underline{Z}_л}.$$

Несимметричный режим. При соединении приемника звездой с нейтральным проводом (рис. 5) напряжение смещения нейтрали выражается равенством

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A\underline{Y}_A + \underline{U}_B\underline{Y}_B + \underline{U}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N},$$

где

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_л}; \quad \underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_л}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_л}; \quad Y_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

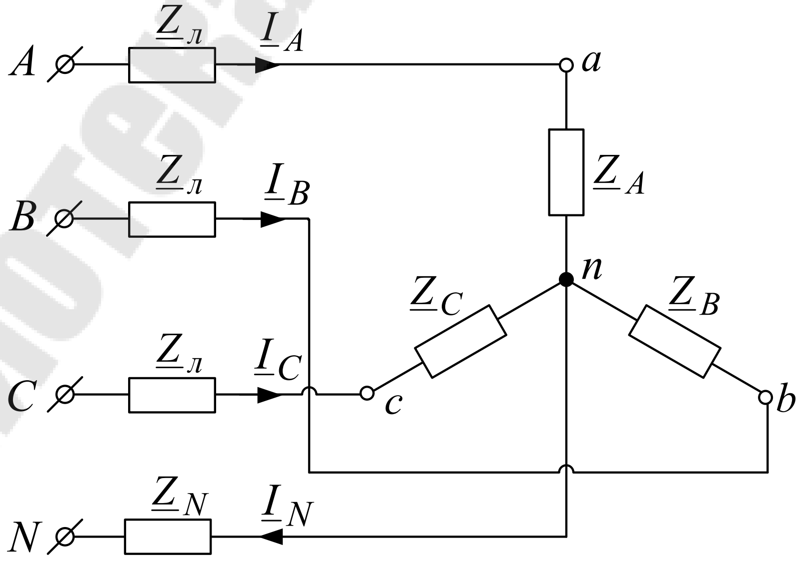


Рис. 5

Линейные токи и ток в нейтральном проводе выражаются равенствами:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_л}; \qquad (10)$$

$$\underline{I}_N = \frac{\underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_N}. \qquad (11)$$

При этом по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \qquad (12)$$

Если сопротивление $\underline{Z}_N = 0$, то $\underline{Y}_N = \infty$, $\underline{U}_{nN} = 0$ и

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_a + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{Z}_b + \underline{Z}_л}; \quad \underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_c + \underline{Z}_л},$$

а ток $\underline{I}_N$ определяется по формуле (4.12).

Если в цепи (рис. 5) $\underline{Z}_N = \infty$, т. е. $\underline{Y}_N = 0$, то получается схема соединения звездой без нейтрального провода (рис. 3), для которой

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C},$$

а линейные токи определяются по формулам (10). При этом

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0.$$

При соединении приемника треугольником (рис. 4) и идеальных проводах линии ($Z_л = 0$) фазные токи:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}},$$

а линейные токи определяются по формуле (9). Если же $\underline{Z}_л \neq 0$, то для расчета цепи треугольник сопротивлений следует преобразовать в эквивалентную звезду, после чего для полученной эквивалентной схемы линейные токи рассчитывают, как показано выше. Фазные токи определяются по предварительно найденным фазным напряжениям приемника:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{Z}'_A \underline{I}_A - \underline{Z}'_B \underline{I}_B; \quad \underline{U}_{bc} = \underline{Z}'_B \underline{I}_B - \underline{Z}'_C \underline{I}_C; \quad \underline{U}_{ca} = \underline{Z}'_C \underline{I}_C - \underline{Z}'_A \underline{I}_A;$$

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \qquad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \ \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}},$$

где $\underline{Z}'_A$, $\underline{Z}'_B$, $\underline{Z}'_C$ – сопротивления лучей звезды, эквивалентной исходному треугольнику нагрузки.

Активная, *реактивная* и *полная мощности* симметричного приемника независимо от вида соединения:

$$P = 3U_ф I_ф \cos\varphi = \sqrt{3} U_л I_л \cos\varphi;$$

$$Q = 3U_ф I_ф \sin\varphi = \sqrt{3} U_л I_л \sin\varphi; \qquad S = 3U_ф I_ф = \sqrt{3} U_л I_л,$$

где φ – сдвиг фаз между напряжением и током фазы.

В симметричных трехфазных цепях при соединении приемников звездой $P_a = P_b = P_c = P_ф$, а при соединении приемников треугольником $P_{ab} = P_{bc} = P_{ca} = P_ф$. Поэтому для определения активной мощности симметричного приемника достаточно утроить показания ваттметра, включенного в любую из фаз нагрузки (*метод одного ваттметра*; см. рис. 6): $P_{нагр} = 3P_ф$.

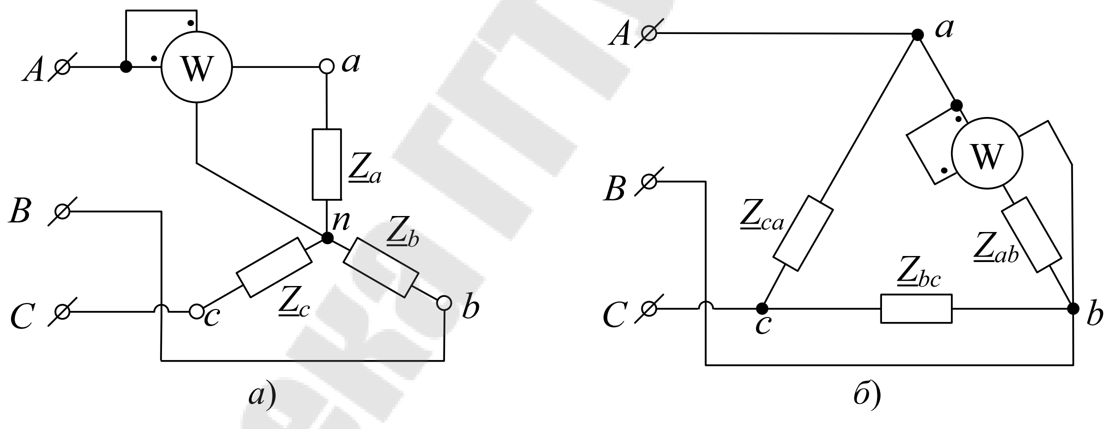


Рис. 6

В четырехпроводных трехфазных цепях с несимметричной нагрузкой измеряется мощность каждой фазы (*метод трех ваттметров*; см. рис. 7). Активная мощность нагрузки определяется арифметической суммой показаний ваттметров: $P_{нагр} = P_a + P_b + P_c$.

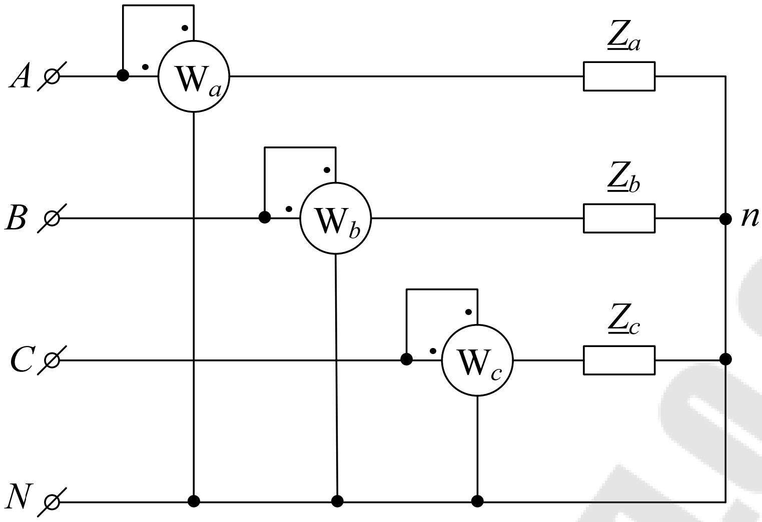
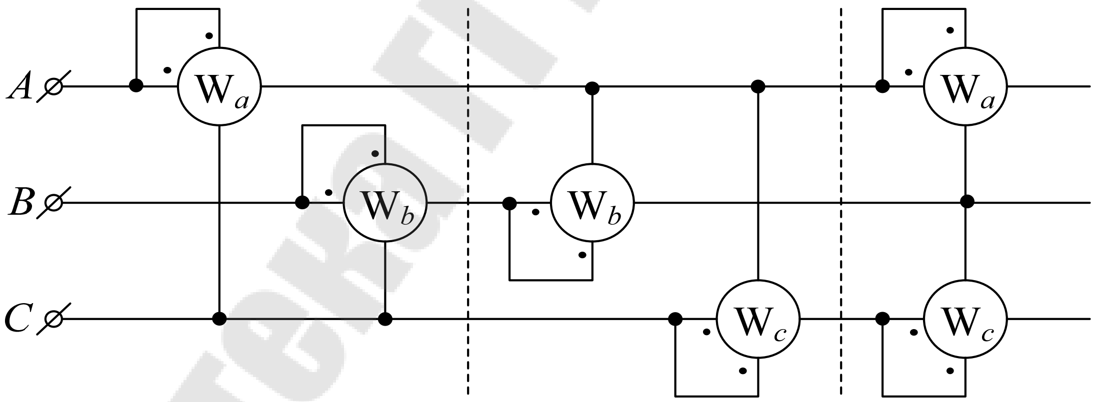


Рис. 7

В трехпроводных трехфазных цепях с несимметричной нагрузкой измерение мощности производится *методом двух ваттметров*. Активная мощность такой цепи выражается алгебраической суммой показаний обоих приборов: $P_{\text{нагр}} = P_{w1} + P_{w2}$. При этом пара приборов может быть включена в трехпроводную цепь тремя равноценными способами, показанными на рис. 8, *а–в*.



а)　　*б*)　　*в*)

Рис. 8

Нумерация ваттметров в паре определяется порядком включения их токовых цепей в линейные провода с учетом прямой последовательности фаз, что удобно представить в виде табл. 1.

Таблица 1

Способ включения ваттметров в трехпроводную цепь	***a*** →	***b*** →	***c*** →	***a*** → …
а	№ 1	№ 2		№ 1
б		№ 1	№ 2	
в	№ 2		№ 1	№ 2

Метод двух ваттметров применяется также в цепях с симметричной нагрузкой, особенно в тех случаях, когда нужно измерить не только активную, но и реактивную мощность.

Реактивная мощность симметричной нагрузки при этом равна:

$$Q = \sqrt{3}\left(P_{W1} - P_{W2}\right).$$

Реактивную мощность симметричной нагрузки можно измерить и одним ваттметром. Три равноценных способа включения ваттметра в такую цепь показаны на рис. 9. При этом

$$P_{Wa} = P_{Wb} = P_{Wc} = P_W \quad \text{и} \quad Q = \sqrt{3} P_W .$$

Если же нагрузка несимметричная, то для измерения ее реактивной мощности последовательно применяют все три показанных на рис. 9 включения ваттметра.

Реактивная мощность несимметричного трехфазного приемника при этом определяется в виде:

$$Q = \frac{P_{Wa} + P_{Wb} + P_{Wc}}{\sqrt{3}}.$$

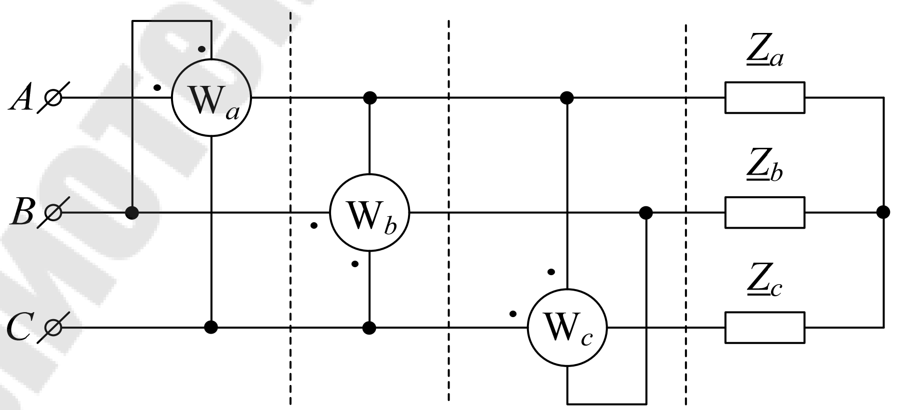


Рис. 9

Высшие гармоники в трехфазных цепях. ЭДС фазы реального трехфазного генератора в той или иной мере несинусоидальна. Постоянная составляющая при этом отсутствует, а каждая из трех ЭДС e_A, e_B, e_C повторяет по форме остальные со сдвигом на $\pm\frac{1}{3}$ периода, так что сдвигу фазы на 120° для основной гармоники соответствует сдвиг на k 120° для k-й гармоники. Этим обусловлены следующие закономерности^

1. Гармоники, кратные трем $\{k = 3n \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots)\}$, образуют нулевую последовательность:

$$\underline{E}_{A_{(3,6,9...)}} = \underline{E}_{B_{(3,6,9...)}} = \underline{E}_{C_{(3,6,9...)}}.$$

2. Гармоники $k = 3n+1$ (1, 4, 7, …) образуют прямую последовательность: k-я гармоника фазы С опережает k-ю гармонику фазы А на 120°, k-я гармоника фазы B отстает от k-й гармоники фазы A на 120°.

3. Гармоники $k = 3n+2$ (2, 5, 8, …) образуют обратную последовательность: k-я гармоника фазы B опережает k-ю гармонику фазы A на 120°, k-я гармоника фазы C отстает от k-й гармоники фазы A на 120°.

При соединении звездой фаз источника линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем, так как эти гармоники синфазны и потому взаимно погашаются при выражении линейных напряжений разностями фазных напряжений источника.

При соединении звездой фаз приемника гармоники, кратные трем, за счет своей синфазности складываются на участке Nn: в трехпроводной цепи они вносят вклад в U_{Nn} (при симметричной нагрузке U_{Nn} образовано именно трехкратными гармониками!), а в четырехпроводной цепи трехкратные гармоники токов вносят вклад в $\underline{I}_N$: при симметричной нагрузке по нейтральному проводу протекает ток:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{N(3)} = \frac{3\underline{E}_{(3)}}{\underline{Z}_{ф(3)} + \underline{Z}_{N(3)}}; \ \underline{I}_{A(3)} = \underline{I}_{B(3)} = \underline{I}_{C(3)} = \frac{\underline{I}_N}{3}.$$

При этом, однако, в отсутствие нейтрального провода линейные токи не содержат гармоник, кратных трем, так как их нет в линейных напряжениях!

При соединении треугольником фаз источника синфазные гармоники, кратные трём, складываются, создавая ток $\underline{I}_{(3)}$ в контуре источника. При этом, однако, линейные напряжения нагрузки не содержат гармоник, кратных трём, так как их не содержит фазное напряжение источника. В самом деле (рис. 10):

$$\underline{\varphi}_{A_{(3)}} = \underline{\varphi}_{B_{(3)}} + \underline{E}_{(3)} - \underline{I}_{(3)}\underline{Z}_{г_{(3)}} = \underline{\varphi}_{B_{(3)}}, \text{ так как } \underline{\mathrm{I}}_{(3)} = \frac{3\underline{E}_{(3)}}{3\underline{Z}_{ф_{(3)}}}.$$

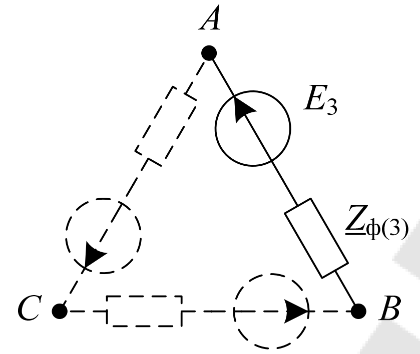


Рис. 10

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

4.1. Трехфазная нагрузка симметричная

Задача 4.1. В электрической цепи (рис. 4.1) $U_{фг} = U_{лг} = 220$ В. Рассчитать фазные и линейные токи для случая, когда сопротивления фаз приемника $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = R = 40$ Ом. По данным расчета построить топографическую векторную диаграмму напряжений источника и лучевую диаграмму токов приемника.

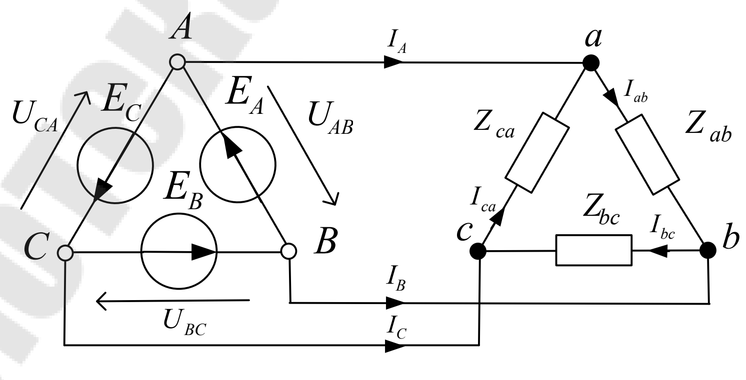


Рис. 4.1

Решение. Примем $\underline{U}_{AB} = 220$ В. Тогда фазный ток $\underline{I}_{ab}$ согласно закону Ома будет равен:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{R_{ab}} = \frac{220}{40} = 5{,}5 \text{ А.}$$

Поскольку приемник симметричный, остальные фазные токи:

$$\underline{I}_{bc} = 5{,}5e^{-j120°} \text{ А}; \quad \underline{I}_{ca} = 5{,}5e^{j120°} \text{ А.}$$

Линейные токи в $\sqrt{3}$ раз больше фазных и отстают от соответствующих фазных токов на угол 30°.

Поэтому

$$\underline{I}_{A} = 5{,}5\sqrt{3}e^{-j30°} = 9{,}53e^{-j30°} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{B} = 9{,}53e^{-j150°} \text{ А}; \qquad \underline{I}_{C} = 9{,}53e^{j90°} \text{ А.}$$

Векторные диаграммы напряжений источника и токов симметричного приемника приведены на рис. 4.2.

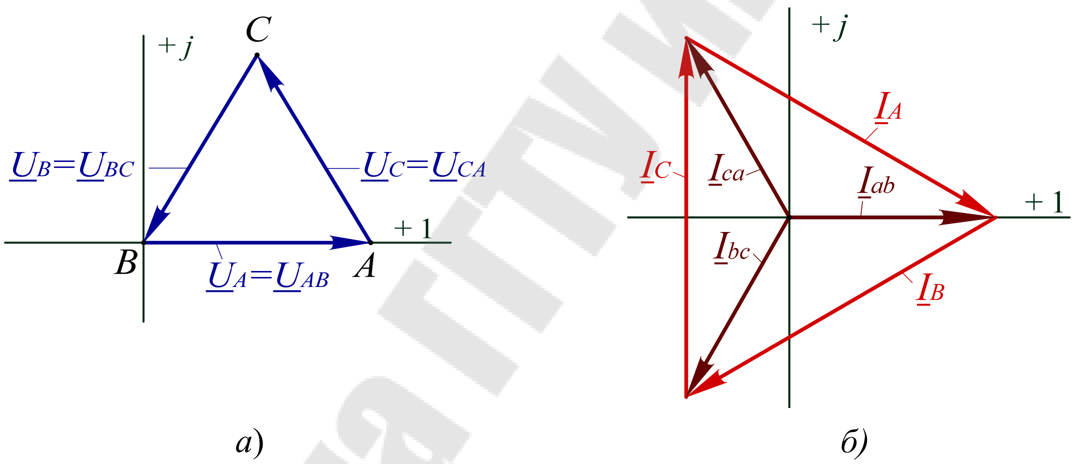


Рис. 4.2

Задача 4.2. В цепи (рис. 4.1) определить фазные и линейные токи, если $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = R - jX_c$, где $R = 25$ Ом, $C = 100$ мкФ включены последовательно и $e_{AB} = 141\sin 400t$ В. Рассчитать фазные и линейные токи. Составить баланс активных и реактивных мощностей.

Решение. Как и в предыдущей задаче будем считать, что фазное напряжения источника в комплексной форме $\underline{U}_{AB} = 220$ В.

Вычислим емкостное сопротивление конденсатора:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{400 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = 25 \text{ Ом.}$$

Тогда

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{220}{25 - j25} = \frac{220}{25\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = 6{,}22e^{j45^\circ}\ \text{А}.$$

Ток $\underline{I}_{bc}$ будет отставать от тока $\underline{I}_{ab}$ на 120°, а ток $\underline{I}_{ca}$ будет опережать ток $\underline{I}_{ab}$ на 120°. Поэтому

$$\underline{I}_{bc} = 6{,}22e^{-j75^\circ}\ \text{А}; \quad \underline{I}_{ca} = 6{,}22e^{j165^\circ}\ \text{А}.$$

Линейные токи определим на основании первого закона Кирхгофа в виде:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 6{,}22 \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j15^\circ} = 10{,}78e^{j15^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_B = 10{,}78e^{-j105^\circ}\ \text{А}; \quad \underline{I}_C = 10{,}78e^{j135^\circ}\ \text{А}.$$

При расчете баланса мощностей необходимо заменить источник с соединением фазных обмоток треугольником на эквивалентный источник с соединением фазных обмоток звездой. При этом фазные ЭДС эквивалентного источника, соединенные звездой, должны быть в $\sqrt{3}$ раз меньше фазных ЭДС заданного источника, соединенных треугольником. Кроме того, фазные ЭДС эквивалентного источника должны быть сдвинуты по отношению к фазным ЭДС заданного источника на угол –30°.

Следовательно, фазные ЭДС эквивалентного источника можно представить в виде:

$$\underline{U}_{A0} = \frac{\underline{U}_A}{\sqrt{3}}e^{-j30^\circ} = \frac{220}{\sqrt{3}}e^{-j30^\circ} = 127e^{-j30^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{B0} = 127e^{-j150^\circ}\ \text{В}; \ \underline{U}_{C0} = 127e^{j90^\circ}\ \text{В}.$$

Таким образом, полная мощность трехфазного источника в цепи (рис. 4.1) равна:

$$\underline{\tilde{S}}_{\text{ист}} = \underline{U}_{A0}\overset{*}{\underline{I}}_A + \underline{U}_{B0}\overset{*}{\underline{I}}_B + \underline{U}_{C0}\overset{*}{\underline{I}}_C =$$

$$= 127e^{-30^\circ} \cdot 10{,}78e^{-15^\circ} + 127e^{-j150^\circ} \cdot 10{,}78e^{j105^\circ} + 127e^{j90^\circ} \cdot 10{,}78e^{-j135^\circ} =$$

$$= 1369e^{-j45^\circ} \cdot 3 = 4107e^{-j45^\circ} = (2904 - j2904)\ \text{В} \cdot \text{А}.$$

Мощности источника:

– полная – $S_{\text{ист}} = 4107$ В · А;

– активная – $P_{\text{ист}} = 2904$ Вт,

– реактивная – $Q_{\text{ист}} = -2904$ вар.

Мощность, потребляемая приемниками:

– активная – $P_{\text{пр}} = 3R_{\text{ф}} I_{\text{ф}}^2 = 3 \cdot 25 \cdot 6{,}22^2 = 2902$ Вт;

– реактивная – $Q_{\text{пр}} = -3 \cdot 25 \cdot 6{,}22^2 = -2902$ вар.

Очевидно, баланс активных и реактивных мощностей сходится, что подтверждает правильность расчета.

Задача 4.3. Три одинаковые группы ламп соединены треугольником и получают питание от трехфазного трансформатора, обмотки которого соединены звездой. Сопротивление каждой группы ламп 11 Ом, фазное напряжение обмотки трансформатора $U_{\text{ф}}$ = 127 В. Определить токи в обмотках трансформатора и в фазах приемника.

Решение. Так как группы ламп соединены треугольником, к каждой из них приложено линейное напряжение трансформатора, равное:

$$U_{\text{л. ист}} = \sqrt{3} U_{\text{ф.тр}} = \sqrt{3} \cdot 127 = 220 \text{ В}.$$

Следовательно, токи в каждой из групп ламп будут одинаковы и равны:

$$I_{\text{ф}\Delta} = \frac{U_{\text{л.тр}}}{R_{\text{фн}}} = \frac{220}{11} = 20 \text{ А}.$$

В то же время токи в линейных проводах, соединяющих группы ламп с фазными обмотками трансформатора в $\sqrt{3}$ раз больше фазных токов, протекающих в каждой группе ламп, т. е. ток в каждой из обмоток трансформатора равен:

$$I_{\text{ф.тр}} = I_{\text{ф}\Delta} \sqrt{3} = 20 \cdot \sqrt{3} = 34{,}6 \text{ А}.$$

Задача 4.4. От трехфазной линии с линейным напряжением 380 В получают питание три одинаковых приемника, соединенных звездой. Сопротивление каждого приемника $\underline{Z} = (6 - j8)$ Ом. Найти токи приемников.

Решение. Так как приемники соединены звездой, напряжение на каждой фазе будет равно:

$$U_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}.$$

Сопротивление фазы приемника

$$Z_{\text{ф}} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ Ом}.$$

Следовательно, ток в каждой фазе приемника равен:

$$I_{\text{ф.пр}} = \frac{U_{\text{ф}}}{Z_{\text{ф}}} = \frac{220}{10} = 22 \text{ А}.$$

Задача 4.5. К трехфазному трансформатору присоединены треугольником три одинаковые индуктивные катушки с сопротивлением $\underline{Z}_{\text{к}} = (16 + j12)$ Ом. Обмотки трансформатора соединены звездой с фазным напряжением $U_{\text{ф}}$ = 127 В. Определить фазные и линейные токи треугольника.

Решение. Поскольку индуктивные катушки соединены треугольником, к каждой из них приложено линейное напряжение вторичной обмотки трансформатора, равное:

$$U_{\text{л.тр}} = \sqrt{3}U_{\text{ф}} = \sqrt{3} \cdot 127 = 220 \text{ В}.$$

Следовательно, ток в каждой из катушек будет равен:

$$I_{\text{к}} = \frac{U_{\text{л.тр}}}{Z_{\text{к}}} = \frac{220}{\sqrt{16^2 + 12^2}} = \frac{220}{20} = 11 \text{ А}.$$

В свою очередь, токи в проводах, соединяющих катушки с обмоткой трансформатора (линейные токи треугольника), в $\sqrt{3}$ раз больше токов в катушках, т. е.

$$I_{\text{л}\,\Delta} = \sqrt{3}I_{\text{к}} = \sqrt{3} \cdot 11 = 19 \text{ А}.$$

Задача 4.6. На рис. 4.3 представлена симметричная трехфазная система «звезда–треугольник» с параметрами: R = 40 Ом, X_C = 90 Ом. Определить показания приборов и ток $i_{A1}(t)$, если фазная ЭДС источника E_A = 120 В.

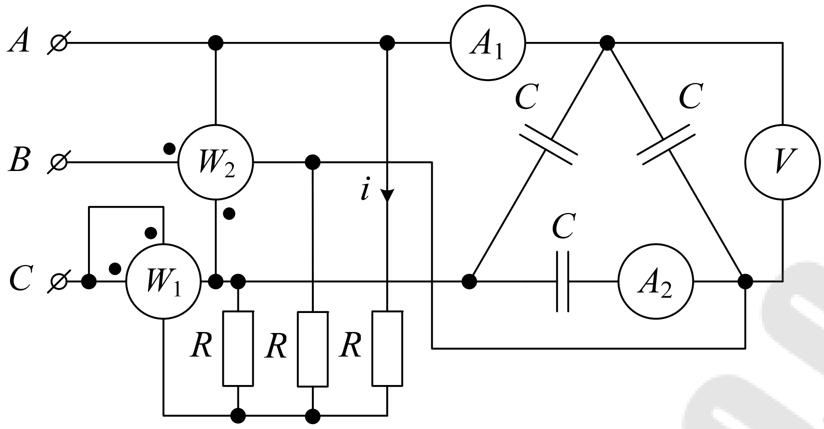


Рис. 4.3 (фазы источника соединены звездой)

Решение. Для симметричного источника, соединенного звездой, фазные ЭДС $E_B = E_C = E_A = 120$ В. Примем $\underline{E}_A = 120e^{j0°}$ В. Тогда аналогично (4.7) $\underline{E}_B = 120\,e^{-j120°}$ В, $\underline{E}_C = 120\,e^{120°}$ В.

Токи в фазах приемника, соединенного звездой, будут равны:

$$\underline{I}_{a_1} = \frac{\underline{E}_A}{R_a} = \frac{120e^{j0°}}{40} = 3e^{j0°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{b_1} = 3e^{-j120°}\ \text{А}; \quad \underline{I}_{c_1} = 3e^{j120°}\ \text{А}.$$

Линейные напряжения, приложенные ко второму симметричному приемнику, соединенному треугольником будут равны:

$$\underline{U}_{AB} = 120\sqrt{3}e^{j30°} = 207{,}85e^{j30°}\ \text{В}; \quad \underline{U}_{BC} = 207{,}85e^{-j90°}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{CA} = 207{,}85e^{150°}\ \text{В}.$$

Токи в фазах «треугольника» определятся по закону Ома в виде:

$$\underline{I}_{ab_2} = \frac{\underline{U}_{AB_2}}{-jX_C} = \frac{207{,}85e^{j30°}}{-j90} = 2{,}31e^{j120°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{bc_2} = 2{,}31e^{j0°}\ \text{А}; \quad \underline{I}_{ca_2} = 2{,}31e^{-j120°}\ \text{А}.$$

Линейные токи треугольника согласно (4.9) будут равны:

$$\underline{I}_{A_2} = 2{,}31\cdot\sqrt{3}e^{90°} = 4e^{j90°}\ \text{А}; \quad \underline{I}_{B_2} = 4e^{-j30°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{C_2} = 4e^{-j150°}\ \text{А}.$$

Токи в фазах источника в соответствии с первым законом Кирхгофа будут равны:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{a_1} + \underline{I}_{a_2} = 3 + 4e^{j90^\circ} = 5e^{j53{,}13^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_B = 5e^{-j66{,}87^\circ}\ \text{А}; \quad \underline{I}_C = 5e^{j173{,}13^\circ}\ \text{А}.$$

Показания приборов:

$$I_{A_1} = I_{A_2} = 4\ \text{А}; \quad I_{A_2} = I_{bc_2} = 2{,}31\ \text{А};$$

$$P_{W_1} = U_C I_C \cos(\varphi_1) = 120 \cdot 5 \cdot \cos(120^\circ - 173{,}13^\circ) = 360\ \text{Вт};$$

$$P_{W_2} = U_{CA} I_B \cos[150^\circ - (-66{,}87^\circ)] = 207{,}85 \cdot 5 \cdot \cos 216{,}87^\circ = -831{,}4\ \text{Вт}.$$

По показанию ваттметра P_{W_2} определим реактивную мощность симметричной системы:

$$Q = P_{W_2}\sqrt{3} = (-831)\sqrt{3} = -1439{,}3\ \text{вар}.$$

Проверка. Реактивная мощность симметричной системы

$$Q = -3X_C \cdot I_2^2 = -3 \cdot 90 \cdot 2{,}31^2 = -1440\ \text{вар}.$$

Мгновенное значение тока $i_{A1}(t) = 3\sqrt{2}\sin\omega t$ А.

Задача 4.7. Трехфазная линия с линейным $U_{\text{л}} = 380$ В питает цепь (рис. 4.4) с параметрами $R = \dfrac{1}{\omega C} = 6$ Ом и $\omega L = 2$ Ом. Определить показания приборов, активную и реактивную мощности источника.

Решение. Для симметричного источника, соединенного звездой, фазные напряжения $U_A = U_B = U_C = \dfrac{U_{\text{л}}}{\sqrt{3}} = \dfrac{380}{\sqrt{3}} = 220$ В.

Как и в предыдущей задаче, примем $\underline{U}_A = 220e^{j0^\circ}$ В.

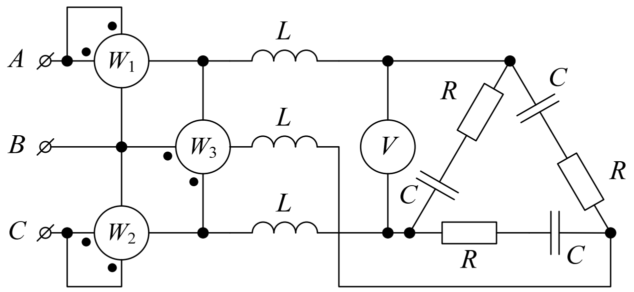


Рис. 4.4

Напряжения остальных фаз будут равны:

$$\underline{U}_B = 220e^{-120^\circ}\,\text{В};\ \underline{U}_C = 220e^{j120^\circ}\,\text{В}.$$

Преобразуем треугольник сопротивлений $\left(\dfrac{R - j1}{\omega C}\right)$ Ом в эквивалентную звезду. Получим:

$$\underline{Z}_{\text{фэкв}} = \frac{(R - jX_C)^2}{3(R - jX_C)} = \frac{6 - j6}{3} = (2 - j2) = R_{\text{экв}} - jX_{\text{экв}} = 2\sqrt{2}e^{-j45^\circ}\ \text{Ом}.$$

Тогда эквивалентное сопротивление фазы симметричной системы будет равно:

$$\underline{Z}_{\text{ф}} = \underline{Z}_{\text{фэкв}} + j\omega L = 2 - j2 + j2 = R_{\text{экв}} = 2e^{j0^\circ}\ \text{Ом},$$

т. е. в каждой фазе линии наблюдается резонанс напряжений.

При этом токи в линейных проводах будут равны:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{R_{\text{экв}}} = \frac{220}{2} = 110\ \text{А};\quad \underline{I}_B = 110e^{-j120^\circ}\,\text{А};\quad \underline{I}_C = 110e^{j120^\circ}\,\text{А}.$$

В соответствии с принятыми ранее фазными напряжениями запишем комплексы действующих значений линейных напряжений:

$$\underline{U}_{AB} = 380e^{j30^\circ}\,\text{В};\quad \underline{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ}\,\text{В};\quad \underline{U}_{CA} = 380e^{j150^\circ}\,\text{В}.$$

Определим напряжение на фазе и токи в фазе «треугольника». Согласно второму закону Кирхгофа:

$$\underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA} + j\omega L\underline{I}_A - j\omega L\underline{I}_C =$$
$$= 380e^{j150^\circ} + j2\cdot 110 - j2\cdot 110e^{j120^\circ} = 380e^{j150^\circ} + 220e^{j90^\circ} - 220e^{j210^\circ} =$$
$$= -138{,}5 + j520 = 538e^{j105^\circ}\ \text{В}.$$

Следовательно, показание вольтметра $U_V = 538$ В.

Токи в фазах «треугольника» равны:

$$I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = \frac{U_{ca}}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} = \frac{538}{\sqrt{6^2 + 6^2}} = 63{,}4\ \text{А}.$$

Показания ваттметров:

$$P_{W_1} = U_{AB}I_A\cos\varphi_1 = 380\cdot 110\cos(30^\circ - 0^\circ) = 36200\ \text{Вт} = 36{,}2\ \text{кВт};$$

$$P_{W_2} = U_{CB} I_C \cos\varphi_2 = 380 \cdot 110 \cos(90° - 120°) = 36200 \text{ Вт} = 36{,}2 \text{ кВт};$$

$$P_{W_3} = U_{CA} I_B \cos\varphi_3 = 380 \cdot 110 \cos[150° - (-120°)] = 0.$$

Показание ваттметра $P_{W_3} = 0$, так как в линии наблюдается резонанс напряжений.

В заключение определим активную и реактивную мощности источника:

$$\underline{S}_{\text{ист}} = \underline{U}_A \underline{I}_A^* + \underline{U}_B \underline{I}_B^* + \underline{U}_C \underline{I}_C^* =$$
$$= 220 \cdot 100 + 220 e^{-j120°} \cdot 110 e^{j120°} + 220 e^{j120°} \cdot 110 e^{-j120°} =$$
$$P_{\text{ист}} = 66000 \text{ Вт} = 66 \text{ кВт}; \quad Q_{\text{ист}} = 0.$$

Задача 4.8. В симметричную трехфазную цепь (рис. 4.5) включены два ваттметра. Определить активное и реактивное сопротивления фазы приемника, если показания ваттметров соответственно равны P_{W1} = 1000 Вт и P_{W2} =2000 Вт. Линейное напряжение источника $U_{\text{л}}$ = 380 В.

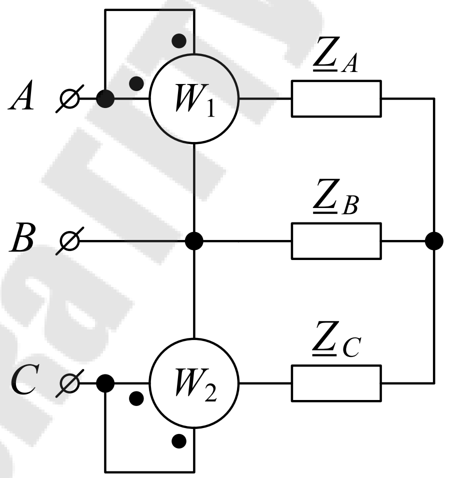


Рис. 4.5

Решение. Активную мощность, потребляемую каждой фазой симметричного приемника, определим в виде:

$$P_{\text{ф}} = \frac{P_{\text{пр}}}{3} = \frac{P_{W_1} + P_{W_2}}{3} = \frac{1000 + 2000}{3} = 1000 \text{ Вт}.$$

Разность фаз между напряжением и током в фазе симметричного приемника можно определить из выражения

$$\text{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}(P_{W_2} - P_{W_1})}{P_{W_1} + P_{W_2}} = \frac{\sqrt{3}(2000 - 1000)}{1000 + 2000} = 0{,}577,$$

откуда

$$\varphi = \text{arctg}\, 0{,}577 = 30°.$$

Так как

$$P_\text{ф} = U_\text{ф} I_\text{ф} \cos\varphi = \frac{U_\text{л}}{\sqrt{3}} I_\text{ф} \cos\varphi,$$

то

$$I_\text{ф} = \frac{\sqrt{3} P_\text{ф}}{U_\text{л} \cos\varphi} = \frac{\sqrt{3} \cdot 1000}{380 \cdot \cos 30^\circ} = 5{,}26 \text{ А}.$$

Таким образом, комплексное активно-индуктивное сопротивление симметричного приемника будет равно:

$$Z_\text{ф} = \frac{U_\text{л}}{\sqrt{3} I_\text{ф}} e^{j30°} = \frac{380}{\sqrt{3} \cdot 5{,}26} e^{j30°} = 41{,}7 e^{j30°} \approx (36 + j21) \text{ Ом}.$$

Задача 4.9. Трехфазный генератор работает на симметричную нагрузку, соединенную звездой (рис. 4.6). Полное сопротивление фазы $Z = 100$ Ом при индуктивном $\cos\varphi = 0{,}8$. Линейное напряжение генератора $U_\text{л} = 380$ В. Определить активную мощность приемника.

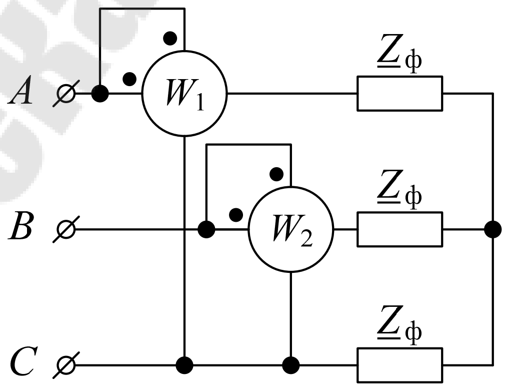


Рис. 4.6

Решение. Фазное напряжение $U_\text{ф} = \dfrac{380}{\sqrt{3}} = 220$ В.

Разность фаз между напряжением и током в фазе симметричного приемника

$$\varphi = \arccos 0{,}8 = 36{,}87°.$$

Режим симметричный, токи в фазах приемника:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}} = \frac{220e^{j0°}}{100e^{j36{,}87°}} = 2{,}2e^{-j36{,}87°} \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A \cdot e^{-j120°} = 2{,}2e^{-j156{,}87°} \text{ А}.$$

Показания ваттметров:

$$P_{W_1} = U_{AC} I_A \cos\varphi_1 = 380 \cdot 2{,}2 \cos[-30° - (-36{,}87°)] = 830 \text{ Вт};$$

$$P_{W_2} = U_{BC} I_B \cos\varphi_2 = 380 \cdot 2{,}2 \cos[-90° - (-156{,}87°)] = 328{,}5 \text{ Вт};$$

Активная мощность приемника

$$P_{\text{пр}} = P_{W1} + P_{W2} = 830 + 328{,}5 = 1158{,}5 \text{ Вт}.$$

Задача 4.10. Определить показания приборов в схеме (рис. 4.7), если $U_{\text{л.г}} = 380\,\text{В}$, $R = X = 25\,\text{Ом}$.

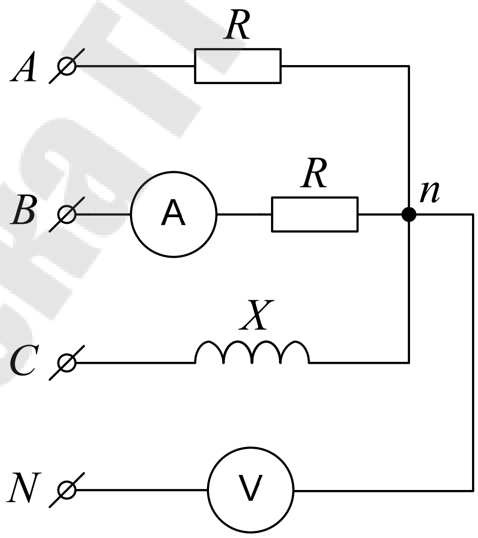


Рис. 4.7

Решение. В заданной цепи амперметр измеряет линейный ток I_B, а вольтметр – напряжение смещения нейтрали. Схема для расчета представлена на рис. 4.8.

Для такой схемы

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_A + \underline{U}_B \underline{Y}_B + \underline{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \tag{1}$$

где $\underline{Y}_A = \dfrac{1}{\underline{Z}_A} = 0{,}04$ См; $\underline{Y}_B = \dfrac{1}{\underline{Z}_B} = 0{,}04$ См; $\underline{Y}_C = \dfrac{1}{\underline{Z}_C} = 0{,}04e^{-j90^\circ}$ См.

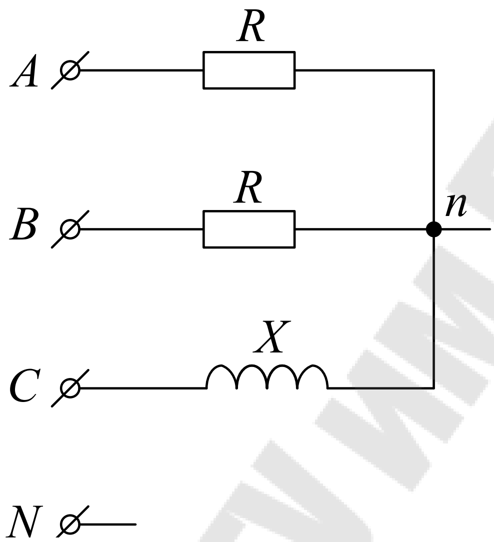


Рис. 4.8

Фазное напряжение генератора

$$U_{\text{ф.г}} = \frac{U_{\text{л.г}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}.$$

Примем

$$\underline{U}_A = U_{\text{ф.г}} e^{j0^\circ} = 220e^{j0^\circ} \text{В}. \tag{2}$$

Тогда

$$\underline{U}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \ \underline{U}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В}. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{220 \cdot 0{,}04 + 220e^{-j120^\circ} \cdot 0{,}04 + 220e^{j120^\circ} \cdot 0{,}04e^{-j90^\circ}}{0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}04e^{-j90^\circ}} = 138{,}5e^{j11{,}6^\circ} \text{В}.$$

Следовательно, $U_V = 138{,}5$ В.

Искомый ток определяем по закону Ома:

$$I_B = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_{nN}}{R} = \frac{220e^{-j120^\circ} - 138{,}5e^{j11{,}6^\circ}}{25} =$$

$$= \frac{-110 - j190{,}5 - 136 - j28}{25} = 13{,}2e^{-j138{,}4^\circ} \text{ А.}$$

Таким образом, показание амперметра составляет 13,2 А.

Задача 4.11. В схеме (рис. 4.9) определить параметры симметричного приемника, соединенного треугольником, если $U_{\text{л}} = 380$ В, $P_{W_A} = 418$ Вт, $P_{W_C} = 836$ Вт.

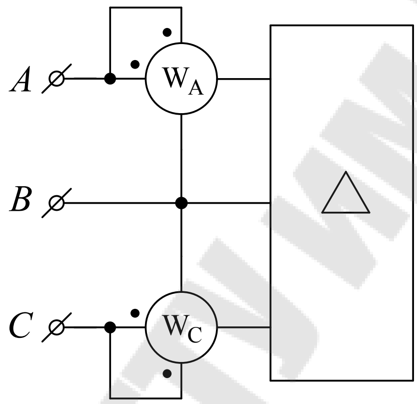


Рис. 4.9

Решение. Активная мощность, потребляемая нагрузкой, равна:

$$P_{\text{нагр}} = P_{WA} + P_{WC}. \qquad (1)$$

Если нагрузка симметричная, то

$$P_{\text{нагр}} = 3P_{\text{ф}}, \qquad (2)$$

где $P_{\text{ф}}$ – активная мощность, потребляемая каждой из трех фаз.

Из (1) и (2) находим:

$$P_{\text{ф}} = \frac{P_{W_A} + P_{W_C}}{3} = \frac{418 + 836}{3} = 418 \text{ Вт.}$$

Воспользуемся тем, что

$$P_{\text{ф}} = U_{\text{ф}} I_{\text{ф}} \cos\varphi_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{ф}}^2}{Z_{\text{ф}}} \cos\varphi_{\text{ф}}; \;\; \varphi_{\text{ф}} = \text{arctg}\frac{Q_{\text{ф}}}{P_{\text{ф}}}.$$

Так как нагрузка симметричная,

$$\varphi_{\text{ф}} = \operatorname{arctg}\frac{Q}{P} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(P_{W_C} - P_{W_A})}{P_{W_A} + P_{W_C}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(836 - 418)}{418 + 836} = 30^{\text{o}}.$$

Поскольку фазы приемника соединены треугольником, $U_{\text{ф}} = U_{\text{л}} = 380$ В.

Следовательно,

$$Z_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{ф}}^2}{P_{\text{ф}}}\cos\varphi_{\text{ф}} = \frac{380^2}{418}\cos 30° = 299 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{\text{ф}} = Z_{\text{ф}} e^{j\varphi_{\text{ф}}} = 299 e^{30°} = (259 + j149{,}5) \text{ Ом}.$$

Так как $\varphi > 0$, фаза приемника имеет активно-индуктивный характер, а параметры ее последовательной схемы замещения:

$$R = \operatorname{Re} Z_{\text{ф}} = 259 \text{ Ом}, \ X_{\text{ф}} = I_m Z_{\text{ф}} = 149{,}5 \text{ Ом}.$$

Задача 4.12. Определить показание второго ваттметра в схеме (рис. 4.10), если $U_{\text{л}}$ = 380 В, P_{W1} = –1560 Вт, ждая фаза симметричной звезды нагрузки имеет коэффициент мощности $\cos\varphi_{\text{ф}} = 0{,}174$.

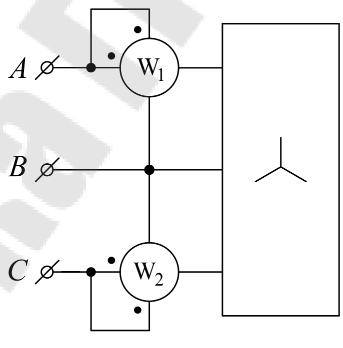


Рис. 4.10

Решение. По условию $\varphi_{\text{ф}} = \arccos 0{,}174 = \pm 80°$.

Воспользуемся тем, что

$$P_{W_1} = U_{AB} I_A \cos(\psi_{u_{AB}} - \psi_{i_A}), \qquad (1)$$

где $\psi_{u_{AB}}$ – начальная фаза напряжения U_{AB}; ψ_{i_A} – начальная фаза тока i_A. Примем

$$\psi_{u_{AB}} = 30^{\circ}, \tag{2}$$

т. е. положим

$$\underline{U}_{AB} = U_{\text{л}} e^{j30^{\circ}} = 380 e^{j30^{\circ}} \text{ В}.$$

Тогда

$$\underline{U}_{A} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\sqrt{3}} e^{-j30^{\circ}} = 220 e^{j0^{\circ}} \text{ В}. \tag{3}$$

Так как нагрузка симметричная, из (3) следует, что

$$\underline{I}_{A} = I_{A} e^{\mp j\varphi_{\text{ф}}}, \text{ т. е. } \varphi_{i_A} = \mp\varphi_{\text{ф}} = \mp 80^{\circ}. \tag{4}$$

В выражениях (4) верхний знак соответствуют случаю

$$\varphi_{\text{ф}} = 80^{\circ}, \tag{5}$$

а нижний знак – случаю

$$\varphi_{\text{ф}} = -80^{\circ}. \tag{6}$$

Подставляя (2) и (4) в (1), получим для случая (5):

$$P_{W_1} = 380 I_{\text{A}} \cos(30^{\circ} - (-80^{\circ})) = 380 I_{\text{A}} \cos 110^{\circ} < 0, \tag{7}$$

а для случая (6):

$$P_{W_1} = 380 I_{\text{A}} \cos(30^{\circ} - 80^{\circ}) = 380 I_{\text{A}} \cos 50^{\circ} > 0. \tag{8}$$

По условию $P_{W_1} < 0$, следовательно, варианты (6) и (8) должны быть исключены. На этом основании делаем вывод, что

$$\varphi_{\text{ф}} = 80^{\circ}, \varphi_{i_A} = -80^{\circ},$$

т. е.

$$I_{A} = \frac{P_{W_1}}{U_{AB} \cos(\psi_{u_{AB}} - \psi_{i_A})} = \frac{-1560}{380 \cos 110^{\circ}} = 12 \text{ А}, \ \underline{I}_{A} = 12 e^{-j80^{\circ}};$$

$$\underline{Z}_{\text{ф}} = \frac{\underline{U}_{\text{ф}}}{\underline{I}_{\text{ф}}} = \frac{\underline{U}_{A}}{\underline{I}_{A}} = \frac{220 e^{j0^{\circ}}}{12 e^{-j80^{\circ}}} = 18{,}33 e^{j80^{\circ}} = (3{,}2 + j18{,}1) \text{ Ом};$$

$$R_{\text{ф}} = \operatorname{Re} Z_{\text{ф}} = 3{,}2 \text{ Ом}, \ X_{\text{ф}} = \operatorname{Im} Z_{\text{ф}} = 18{,}1 \text{ Ом}.$$

Находим показания второго ваттметра:

$$P_{W_2} = P'_{W_1} = U_{CB} I_C \cos(\varphi_{u_{CB}} - \varphi_{i_C});$$

$$\underline{U}_{CB} = -\underline{U}_{BC} = -380e^{-j90^\circ} = 380e^{j90^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_A e^{j120^\circ} = 12e^{j40^\circ} \text{ А},$$

следовательно,

$$\varphi_{u_{CB}} = 90^\circ; \ \varphi_{i_C} = 40^\circ;$$

$$P_{W_2} = 380 \cdot 12\cos(90^\circ - 40^\circ) = 2931 \text{ Вт}.$$

4.2. Трехфазная нагрузка несимметричная

Задача 4.13. В трехфазной электрической цепи (рис. 4.11) $U_{\text{ф.г}} = U_{\text{л.г}} = 220$ В.

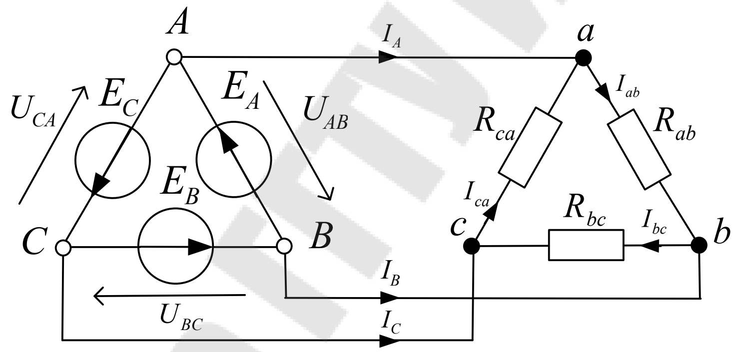


Рис. 4.11

Необходимо рассчитать фазные и линейные токи для следующих несимметричных режимов:

а) сопротивления фаз приемника активные и разные:

$$\underline{Z}_{ab} = R_{ab} = 40 \text{ Ом}; \ \underline{Z}_{bc} = R_{bc} = 50 \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{ca} = R_{ca} = 25 \text{ Ом};$$

б) сопротивления те же; отключена фаза *ab*;

в) сопротивления те же; оборван линейный провод *Aa*.

По данным расчета построить топографическую векторную диаграмму напряжений источника и векторные диаграммы токов для каждого из перечисленных режимов.

Решение. Предварительно примем $\underline{U}_A = 220$ В.

Режим а. Фазные токи определим по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_A}{R_{ab}} = \frac{220}{40} = 5{,}5 \text{ А}; \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_B}{R_{bc}} = \frac{220e^{-j120°}}{50} = 4{,}4e^{-j120°} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_C}{R_{ca}} = \frac{220e^{j120°}}{25} = 8{,}8e^{j120°} \text{ А.}$$

Далее, по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 5{,}5 - 8{,}8e^{j120°} = 12{,}5e^{-j37{,}6°} \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = 4{,}4e^{-j120°} - 5{,}5 = 8{,}6e^{-j153{,}7°} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 8{,}8e^{j120°} - 4{,}4e^{-j120°} = 11{,}6e^{j100{,}9°} \text{ А.}$$

Векторные диаграммы напряжений источника и токов несимметричного приемника приведены на рис. 4.12.

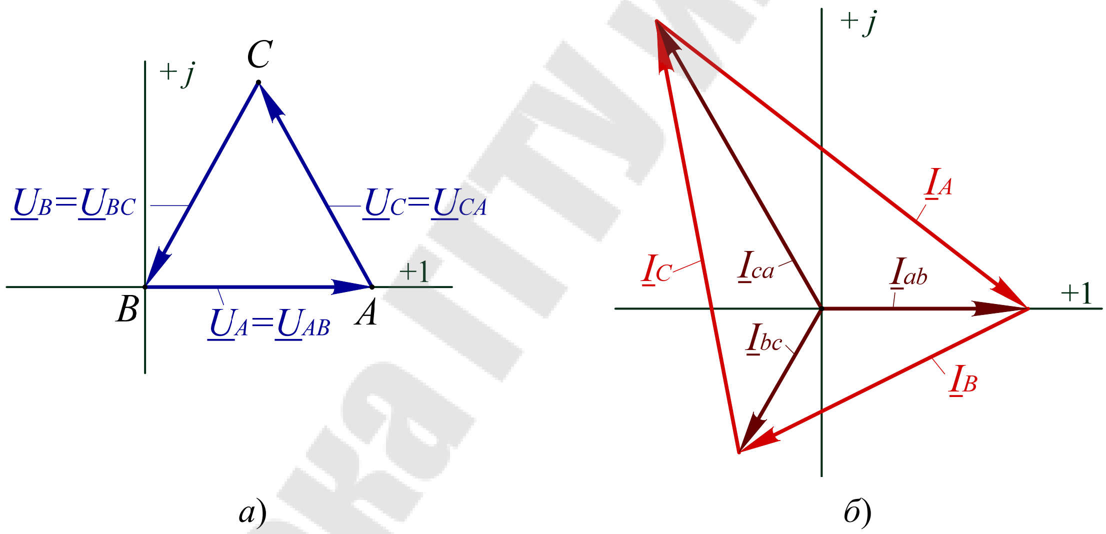


Рис. 4.12

Режим б. Отключена фаза *аб*.

Схема замещения исходной цепи при отключении фазы *ab* приведена на рис. 4.13.

Замечание. Определение данного режима как «аварийного» не всегда оправдано, так как режим работы оставшихся фаз не изменяется (что скорее является достоинством несимметричного приемника, фазы которого соединены «треугольником»). Уменьшатся лишь токи в линейных проводах *Aa* и *Bb*.

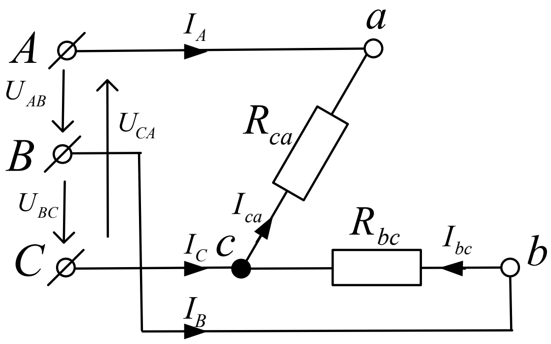


Рис. 4.13

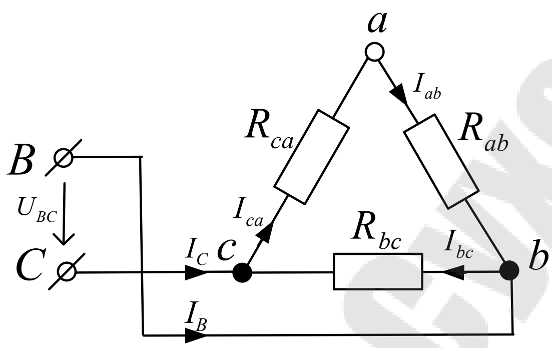


Рис. 4.14

Токи в фазах bc и ca останутся такими же, как и в предыдущем режиме, т. е.

$$\underline{I}_{bc} = 4{,}4e^{-120^{\circ}} \text{ А}; \quad \underline{I}_{ca} = 8{,}8e^{j120^{\circ}} \text{ А}; \ \underline{I}_{ab} = 0; \quad \underline{I}_A = -\underline{I}_{ca} = 8{,}8e^{-60^{\circ}} \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} = 4{,}4e^{-120^{\circ}} \text{ А}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 8{,}8e^{-60^{\circ}} - 4{,}4e^{-120^{\circ}}.$$

Векторная диаграмма токов, соответствующая данному режиму, приведена на рис. 4.15.

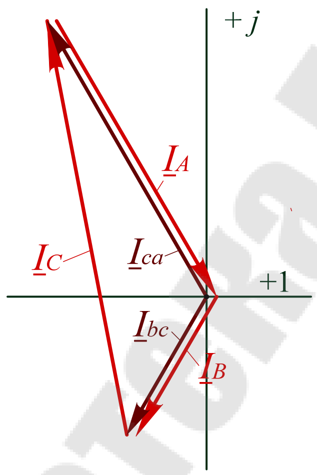


Рис. 4.15

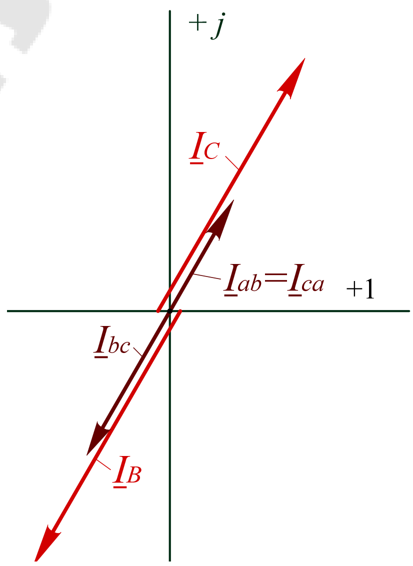


Рис. 4.16

Режим в. Оборван линейный провод Aa.

Из рис. 4.14 следует, что после обрыва линейного провода Aa режим работы фазы bc не изменится. Что касается фаз ca и ab, то они окажутся соединенными последовательно. Поэтому при неизменном линейном напряжении увеличится их суммарное сопротивление, уменьшится ток в ветви *cab* и напряжение на фазах и ухудшится режим работы каждой из них.

Ток в фазе *bc* по-прежнему останется равен:

$$\underline{I}_{bc} = 4{,}4e^{-120^{\circ}} \text{ А.}$$

В фазах ab и ca будет протекать ток

$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{ca} = -\frac{\underline{U}_{BC}}{R_{ab} + R_{ca}} = -\frac{220e^{-120^{\circ}}}{40 + 25} = 3{,}4e^{j60^{\circ}} \text{ А,}$$

а в линейных проводах Bb и Cc:

$$\underline{I}_{B} = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = 4{,}4e^{-j120^{\circ}} - 3{,}4e^{j60^{\circ}} = 7{,}8e^{-j120^{\circ}} \text{ А}$$

и

$$\underline{I}_{C} = -\underline{I}_{B} = 7{,}8e^{j60^{\circ}} \text{ А.}$$

Векторная диаграмма токов, соответствующая обрыву линейного провода Aa, приведена на рис. 4.16.

Задача 4.14. В цепи (рис. 4.17) фазное напряжение генератора $U_{\text{ф.г}} = 220$ В (рис. 4.18). Комплексные сопротивления фаз приемника:

$$\underline{Z}_{ab} = R_{ab} + jX_{ab} = 40 + j30 = 50e^{j36{,}9^{\circ}} \text{ Ом;} \quad \underline{Z}_{bc} = R_{bc} = 50 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_{ca} = R_{ca} - jX_{ca} = 25 - j43{,}3 = 50e^{-j60^{\circ}} \text{ Ом.}$$

Необходимо рассчитать фазные и линейные токи в заданной цепи в следующих режимах:

1) нагрузка несимметричная равномерная;

2) отключена фаза *bc*;

3) оборван линейный провод Aa.

По данным расчета построить топографическую векторную диаграмму напряжений источника и векторные диаграммы токов для каждого из перечисленных выше режимов.

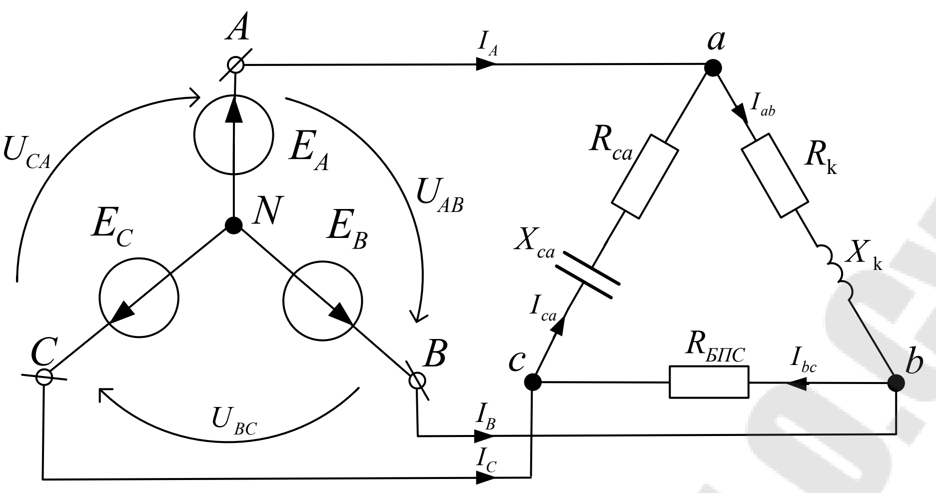


Рис. 4.17

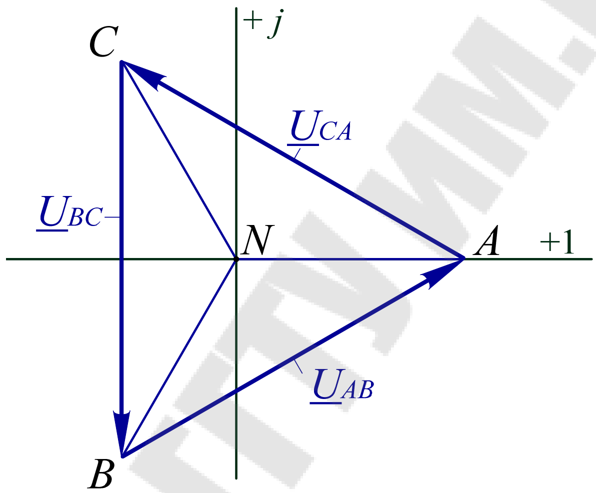


Рис. 4.18

Решение. Предварительно примем $\underline{U}_A = 220$ В.

Тогда напряжения на фазах приемника будут равны:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{AB} = 220\sqrt{3}e^{j30^\circ} = 380e^{j30^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC} = 380e^{-j90^\circ} \text{ В}; \qquad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA} = 380e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

Режим 1. Нагрузка несимметричная равномерная.

В случае равномерной нагрузки фазные токи треугольника, рассчитанные по закону Ома, будут равны по модулю:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{380e^{30^\circ}}{40 + j30} = 7{,}6e^{-j7^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{BC}}{\underline{Z}_{bc}} = \frac{380e^{-j90°}}{50} = 7{,}6e^{-j90°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{380e^{j150°}}{25 - j43{,}3} = 7{,}6e^{-j150°}\ \text{А}.$$

Линейные токи могут быть определены из уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для узлов a, b и c (см. рис. 4.17):

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca} = 7{,}6e^{-j7°} - 7{,}6e^{-j150°} = 14{,}4e^{j11{,}6°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = 7{,}6e^{-j90°} - 7{,}6e^{-j7°} = 10e^{-j138{,}2°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} = 7{,}6e^{-j150°} - 7{,}6e^{-j90°} = 7{,}6e^{j150°}\ \text{А}.$$

Режим 2. Отключена фаза *bc*.

После отключения фазы *bc* приемника токи в фазах *ab* и *ca* не изменятся, так как изменение режима одной из фаз не отражается на режиме других фаз. Останется прежней и величина линейного тока $\underline{I}_A$.

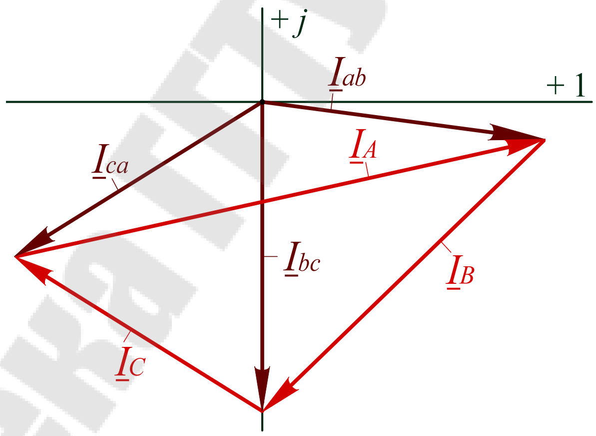


Рис. 4.19

Линейные токи $\underline{I}_B$ и $\underline{I}_C$ окажутся равными соответствующим фазным токам $\underline{I}_{ab}$ и $\underline{I}_{ca}$, т. е.

$$\underline{I}_B = -\underline{I}_{ab} = -7{,}6e^{-j7°} = 7{,}6e^{j173°}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{ca} = 7{,}6e^{-j150°}\ \text{А}.$$

Векторная диаграмма токов приведена на рис. 4.20.

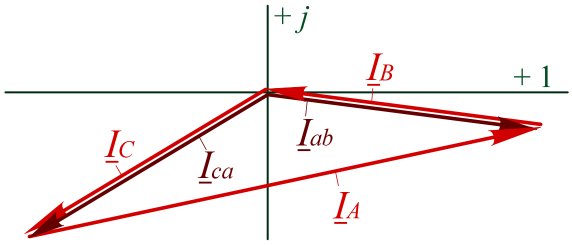


Рис. 4.20

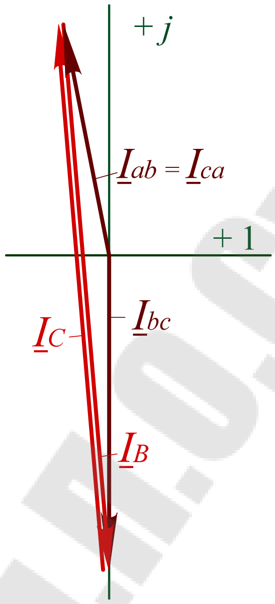


Рис. 4.21

Режим 3. Оборван линейный провод *Aa*.

При обрыве линейного провода *Aa* ток $\underline{I}_{bc}$ останется таким же, как и в первом режиме, т. е. $\underline{I}_{bc} = 7{,}6e^{-j90^\circ}$ А.

Фазы приемника $\underline{Z}_{ab}$ и $\underline{Z}_{ca}$ окажутся соединенными последовательно.

В соответствии с законом Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \underline{I}_{ca} = -\frac{\underline{U}_{BC}}{R_{ab} + jX_{ab} + R_{ca} - jX_{ca}} = -\frac{380e^{-j90^\circ}}{40 + j30 + 25 - j43{,}3} =$$

$$= -1{,}15 + j5{,}6 = 5{,}7e^{j101{,}6^\circ} \text{ А.}$$

Линейные токи $\underline{I}_B$ и $\underline{I}_C$, в свою очередь, будут равны:

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab} = 7{,}6e^{-j90^\circ} - 5{,}7e^{j101{,}6^\circ} = -1{,}15 - j13{,}2 = 13{,}3e^{-j85^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_C = -\underline{I}_B = 13{,}3e^{j95^\circ} \text{ А.}$$

Следовательно, в случае соединения фаз несимметричного приемника треугольником фазы источника будут нагружены неравномерно, о чем свидетельствуют векторные диаграммы токов, приведенные на рис 4.19–4.21.

Задача 4.15. В цепи (рис. 4.22) фазное напряжение генератора $U_{\text{ф.г}} = 220$ В. Сопротивление нейтрального провода $Z_{nN} = 0$.

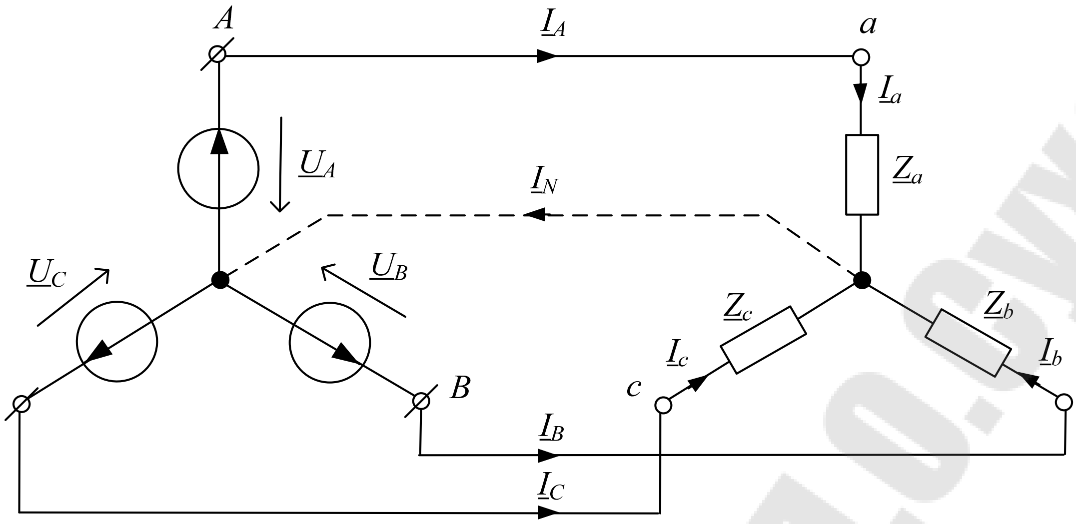


Рис. 4.22

Необходимо рассчитать фазные и линейные токи в заданной цепи в следующих режимах:

1) Y–Y с nN, нагрузка симметричная: $R_a = R_b = R_c = 40$ Ом;

2) Y–Y без nN, нагрузка симметричная: $R_a = R_b = R_c = 40$ Ом;

3) Y–Y с nN, нагрузка несимметричная: $R_a = R_b = 40$ Ом; $R_c = 85$ Ом;

4) Y–Y без nN, нагрузка несимметричная: $R_a = R_b = 40$ Ом; $R_c = 85$ Ом;

5) Y–Y с nN, оборвана фаза *b*: $R_a = 40$ Ом; $R_c = 85$ Ом;

6) Y–Y без nN, оборвана фаза *b*: $R_a = 40$ Ом; $R_c = 85$ Ом;

7) Y–Y без nN, короткое замыкание фазы *a*: $R_b = 40$ Ом, $R_c = 85$ Ом.

По данным расчета построить топографические векторные диаграмму напряжений источника и приемника, а также векторные диаграммы токов для каждого из перечисленных режимов.

Решение

Режим 1

В четырехпроводной трехфазной цепи нейтральный провод с сопротивлением $\underline{Z}_{nN} = 0$ обеспечивает равенство фазных напряжений генератора и соответствующих фазных напряжений приемника, т. е.

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A, \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B, \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C.$$

Линейные токи $\underline{I}_A, \underline{I}_B$ и $\underline{I}_C$, в свою очередь, будут равны соответствующим фазным токам $\underline{I}_a, \underline{I}_b$ и $\underline{I}_c$, так как приемник единственный.

Если положить, что $\underline{U}_A = 220$ В, то

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_A}{R_a} = \frac{220}{40} = 5{,}5 \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_A \cdot e^{-j120^\circ} = 5{,}5e^{-j120^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_A \cdot e^{j120^\circ} = 5{,}5e^{j120^\circ} \text{ А}.$$

Так как токи $\underline{I}_A, \underline{I}_B$ и $\underline{I}_C$ одинаковы по величине и сдвинуты по фазе друг относительно друга на 120°, их сумма будет равна нулю:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0,$$

т. е. ток в нейтральном проводе отсутствует.

Очевидно, будет равна нулю и разность потенциалов между точками N и n (независимо от величины сопротивления нейтрального провода). Таким образом, при симметричной нагрузке нейтральный провод может быть отключен без изменения режима работы цепи и трехфазная цепь при этом окажется трехпроводной.

Режим 2

Поскольку в трехпроводной цепи напряжение между нейтралями источника и приемника $\underline{U}_{nN} = 0$, порядок расчета токов останется таким же, как в режиме 1.

Отличие между расчетными и экспериментальными значениями токов может иметь место, например, из-за небольшой несимметрии фазных напряжений трехфазного источника.

Режим 3

При изменении величины сопротивления одной из фаз (в данном примере, фазы c), трехфазный приемник окажется несимметричным. Ток в этой фазе станет равным:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{R_c} = \frac{220e^{j120^\circ}}{85} = 2{,}6e^{j120^\circ} \text{ А}.$$

Токи в фазах a и b не изменятся, т. е. останутся такими же, как и в режиме 1:

$$\underline{I}_A = 5{,}5 \text{ А}; \quad \underline{I}_B = 5{,}5e^{-j120^\circ} \text{ А}.$$

При этом появится ток в нейтральном проводе, равный:

$$\underline{I}_N = 5{,}5 + 5{,}5e^{-j120^\circ} + 2{,}6e^{j120^\circ} = 2{,}9e^{-j60^\circ} \text{ А.}$$

Векторные диаграммы напряжений и токов, соответствующие первым трем режимам, приведены на рис. 4.23.

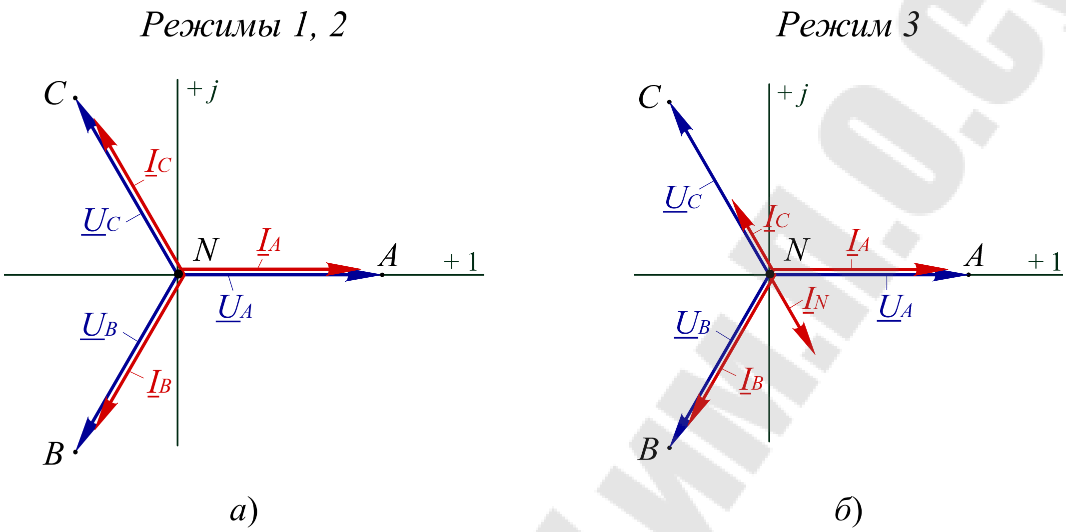


Рис. 4.23

Режим 4

При несимметричном приемнике и отсутствии нейтрального провода появится напряжение смещения нейтрали, равное

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \cdot \underline{Y}_a + \underline{U}_B \cdot \underline{Y}_b + \underline{U}_C \cdot \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c} =$$

$$= \frac{220 \cdot 0{,}025 + 220e^{-j120^\circ} \cdot 0{,}025 + 220e^{j120^\circ} \cdot 0{,}0118}{0{,}025 + 0{,}025 + 0{,}0118} = \frac{2{,}9e^{-j60^\circ}}{0{,}0618} =$$

$$= 23{,}5 - j40{,}7 = 47e^{-j60^\circ} \text{ В,}$$

где $\underline{Y}_a = \dfrac{1}{R_a} = \dfrac{1}{40} = 0{,}025$ См $= \underline{Y}_b$; $\underline{Y}_c = \dfrac{1}{R_c} = \dfrac{1}{85} = 0{,}0118$ См.

Напряжения на фазах приемника:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = 220 - 47e^{-j60^\circ} = 196{,}5 + j40{,}7 = 200{,}7e^{j11{,}7^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = 220e^{-j120^\circ} - 47e^{-j60^\circ} = 200{,}7e^{-j131{,}7^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = 220e^{j120^\circ} - 47e^{-j60^\circ} = 267e^{j120^\circ} \text{ В.}$$

Линейные (фазные) токи:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_a}{R_a} = \frac{200{,}7e^{j11{,}7^\circ}}{40} = 4{,}9 + j1{,}0 = 5e^{j11{,}5^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_b}{R_b} = \frac{200{,}7e^{-j131{,}7^\circ}}{40} = -3{,}3 - j3{,}7 = 5e^{-j131{,}7^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_c}{R_c} = \frac{267e^{j120^\circ}}{85} = -1{,}57 + j2{,}72 = 3{,}14e^{j120^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 5e^{j11{,}5^\circ} + 5e^{-j131{,}7^\circ} + 3{,}14e^{j120^\circ} = 0\,.$$

Последнее равенство является проверкой правильности расчета токов в данном режиме.

Режим 5

При обрыве фазы *b* приемник по-прежнему будет несимметричным. Ток $\underline{I}_B$ в этой фазе будет равен нулю.

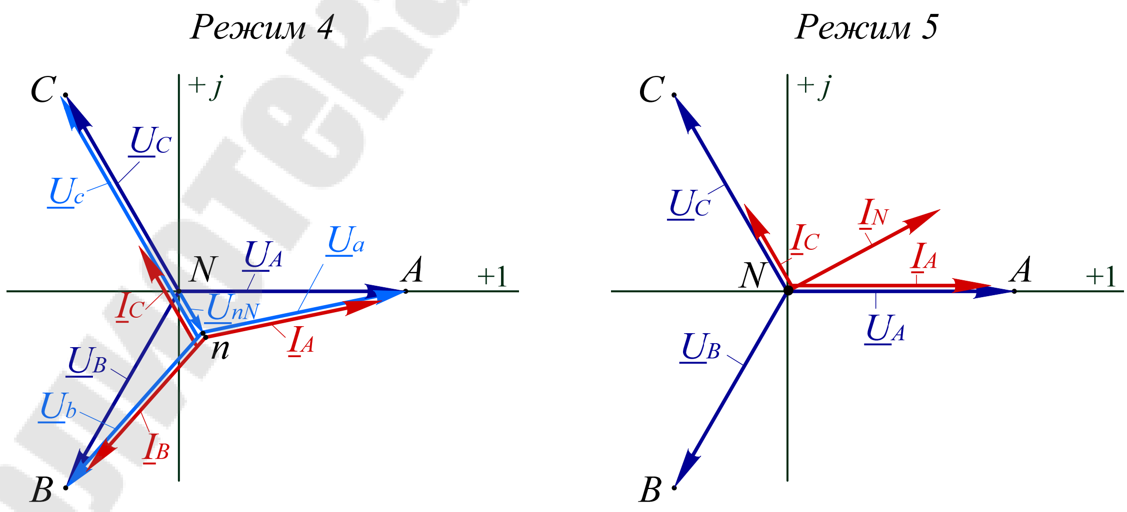
Токи $\underline{I}_A$ и $\underline{I}_C$ останутся такими же, как в режиме 3, т. е.

$$\underline{I}_A = 5{,}5\ \text{А}; \qquad \underline{I}_C = 2{,}6e^{j120^\circ}\ \text{А}.$$

Следовательно, ток в нейтральном проводе будет равен:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_C = 5{,}5 + 2{,}6e^{j120^\circ} = 4{,}2 + j2{,}25 = 4{,}8e^{j28{,}2^\circ}\ \text{А}.$$

Векторные диаграммы, соответствующие режимам 4 и 5, приведены на рис. 4.24.



а) *б)*

Рис. 4.24

Режим 6

При отсутствии нейтрального провода трехфазный приемник остается несимметричным, так как $\underline{Z}_a = R_a = 40$ Ом, $\underline{Z}_c = R_c = 85$ Ом и $\underline{Z}_b = \infty$. Напряжение смещения нейтрали $\underline{U}_{nN}$ изменится (по сравнению с режимом 4) и будет равно:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_c} = \frac{220 \cdot 0{,}025 + 220 e^{j120^\circ} \cdot 0{,}0118}{0{,}025 + 0{,}0118} =$$

$$= 115 + j61{,}6 = 130 e^{j28{,}2^\circ} \text{ В.}$$

Напряжения на фазах приемника:

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{nN} = 220 - 130 e^{j28{,}2^\circ} = 122 e^{-j30^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = 220 e^{-j120^\circ} - 130 e^{j28{,}2^\circ} = 337{,}9 e^{-j131{,}7^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = 220 e^{j120^\circ} - 130 e^{j28{,}2^\circ} = 259{,}3 e^{150^\circ} \text{ В.}$$

Линейные (фазные) токи:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_a}{R_a} = \frac{122 e^{-j30^\circ}}{40} = 2{,}64 - j1{,}54 = 3{,}05 e^{-j30^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_c}{R_c} = \frac{259{,}3 e^{j150^\circ}}{85} = -2{,}65 + j1{,}52 = 3{,}05 e^{j150^\circ} \text{ А.}$$

Очевидно, токи в фазах a и c должны быть одинаковы по величине и сдвинуты по фазе друг относительно друга на 180°, так как при обрыве фазы b и отсутствии нейтрального провода трехфазная цепь становится однофазной с линейным напряжением $\underline{U}_{AC}$ на ее входе.

Учитывая это, токи $\underline{I}_A$ и $\underline{I}_C$ можно рассчитать иначе:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{AC}}{R_a + R_c} = \frac{380 e^{-j30^\circ}}{40 + 85} = 3{,}04 e^{-j30^\circ} \text{ А;} \quad \underline{I}_C = -\underline{I}_A = 3{,}04 e^{j150^\circ} \text{ А.}$$

Режим 6

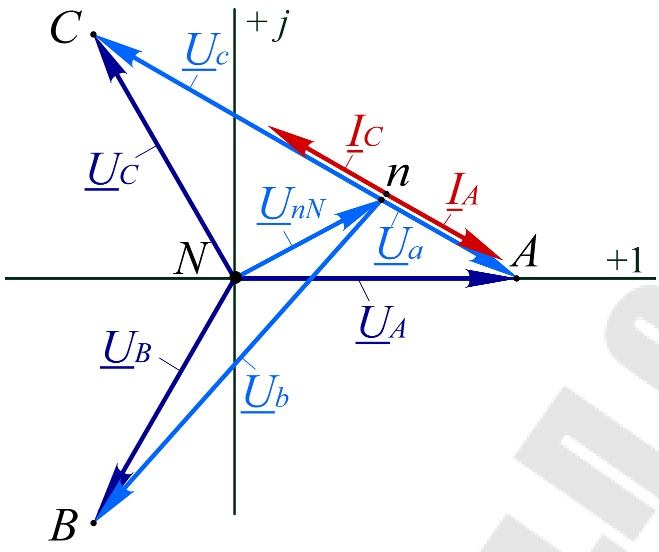


Рис. 4.25

Режим 7

При коротком замыкании фазы a и отсутствии нейтрального провода $\underline{U}_a = 0$, напряжение смещения нейтрали $\underline{U}_{nN} = \underline{U}_A = 220$ В.

Следовательно, напряжения на фазах b и c приемника будут равны:

$$\underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{nN} = \underline{U}_B - \underline{U}_A = \underline{U}_{BA} = 380e^{-j150^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{nN} = \underline{U}_C - \underline{U}_A = \underline{U}_{CA} = 380e^{j150^\circ} \text{ В}.$$

В свою очередь, линейные токи:

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{U}_b}{R_b} = \frac{380e^{-j150^\circ}}{40} = 9{,}5e^{-j150^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_c}{R_c} = \frac{380e^{j150^\circ}}{85} = 4{,}47e^{j150^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_A = -(\underline{I}_B + \underline{I}_C) = -(9{,}5e^{-j150^\circ} + 4{,}47e^{j150^\circ}) = 12{,}4e^{j12^\circ} \text{ А}.$$

Топографические векторные диаграммы напряжений источника и приемника, а также векторные диаграммы токов для режимов 6 и 7 приведены на рис. 4.25 и 4.26.

Режим 7

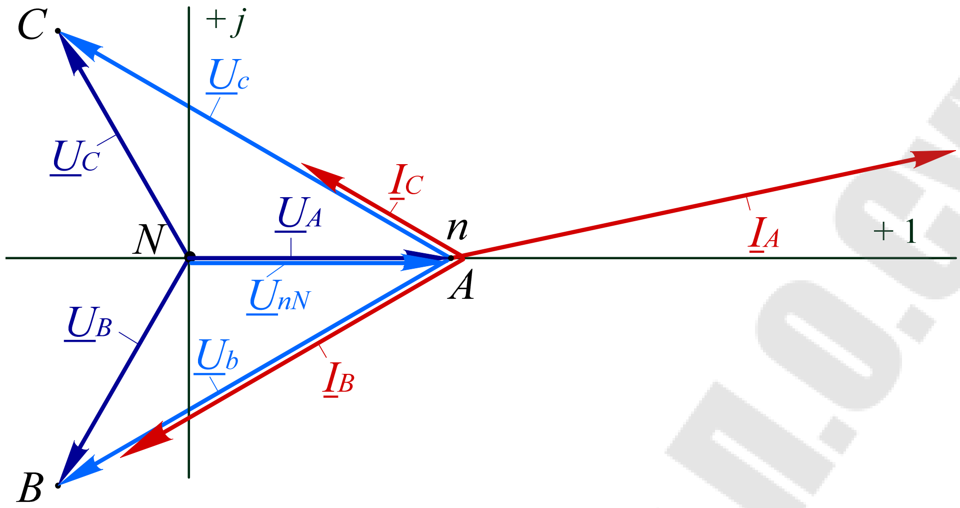


Рис. 4.26

Задача 4.16. В цепи (рис. 4.27) фазное напряжение источника $U_{ф.г} = 127$ В. Определить показание вольтметра в двух случаях:

– 1-й случай: параметры элементов цепи известны и равны:

$$X_L = X_C = 173 \text{ Ом}, \quad R = 100 \text{ Ом};$$

– 2-й случай: известно, что $X_L = X_C = \sqrt{3}R$, но величина сопротивлений не задана.

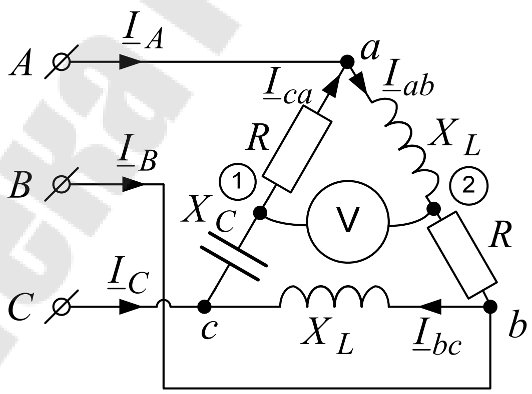


Рис. 4.27

Замечание. При решении данной и подобных ей задач с измерительными приборами последние часто считают идеальными, не влияющими на распределение токов в цепи.

Решение. В задаче, очевидно, необходимо определить напряжение между точками 1 и 2 (рис. 4.28).

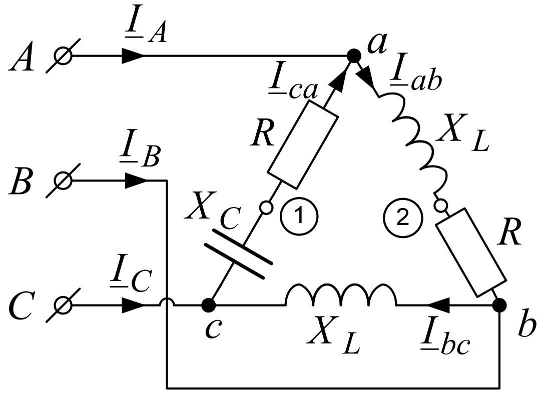


Рис. 4.28

Искомое напряжение в соответствии со вторым законом Кирхгофа будет равно:

$$\underline{U}_{12} = jX_L \underline{I}_{ab} + R\underline{I}_{ca}. \qquad (1)$$

Неизвестные токи $\underline{I}_{ab}$ и $\underline{I}_{ca}$ выразим по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}} = \frac{\underline{U}_{AB}}{\underline{Z}_{ab}}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}} = \frac{\underline{U}_{CA}}{\underline{Z}_{ca}}. \qquad (2)$$

Линейное напряжение генератора

$$U_{\text{л.г}} = \sqrt{3}U_{\text{ф.г}} = \sqrt{3} \cdot 127 = 220\,\text{В}.$$

Если

$$\underline{U}_{\text{AB}} = \text{U}_{\text{л.г}} e^{j0^\circ} = 220e^{j0^\circ}\,\text{В}, \qquad (3)$$

то

$$\underline{U}_{CA} = 220e^{j120^\circ}\,\text{В}. \qquad (4)$$

Сопротивления фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_{ab} = R + jX_L = (100 + j173)\ \text{Ом}; \qquad (5)$$

$$\underline{Z}_{ca} = R - jX_C = (100 - j173)\ \text{Ом}. \qquad (6)$$

Подставляя (3)–(6) в (2), находим:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{220e^{j0^\circ}}{100 + j173} = 1{,}1e^{-j60^\circ}\ \text{А}; \quad \underline{I}_{ca} = \frac{220e^{j120^\circ}}{100 - j173} = 1{,}1e^{j180^\circ}\ \text{А}.$$

Возвращаясь к (1), получим:

$$\underline{U}_{12} = j173 \cdot 1{,}1e^{-j60°} + 100 \cdot 1{,}1e^{j180°} = 55 + j95{,}3 = 110e^{j60°} \text{ В}.$$

Следовательно,

$$U_V = 110 \text{ В}.$$

Векторная диаграмма напряжений представлена на рис. 4.29

$$m_U = 30 \text{ В/см}, \ m_I = 0{,}2 \text{ А/см}.$$

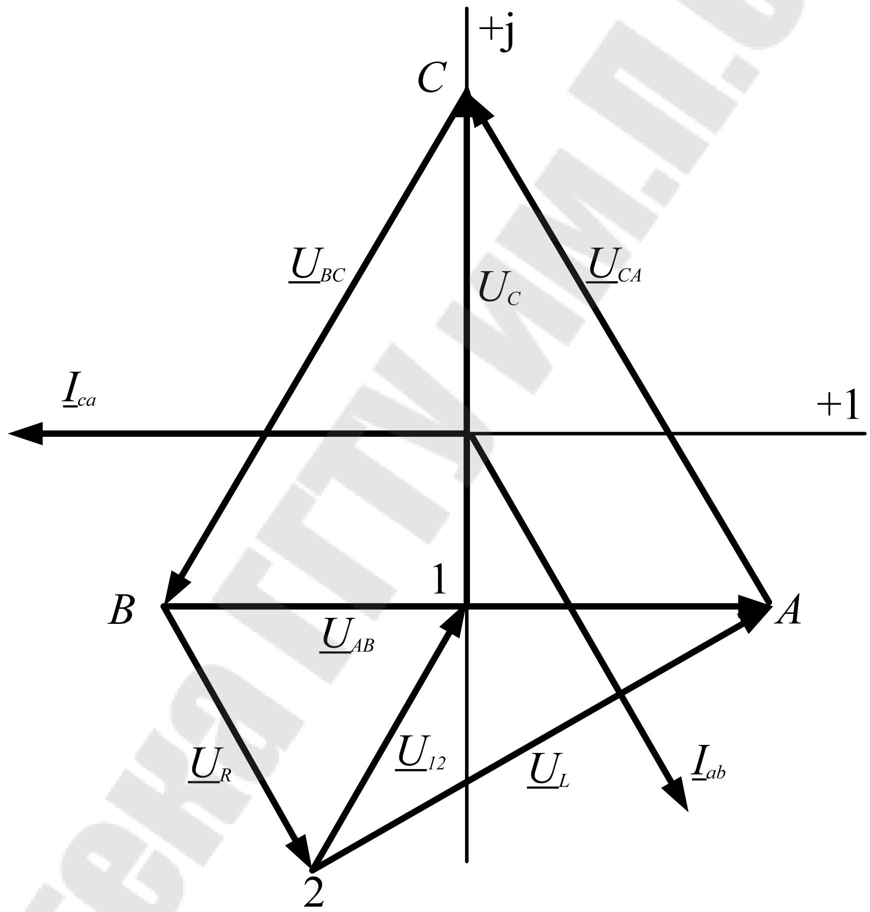


Рис. 4.29

При отсутствии данных о параметрах элементов сопротивления цепи могут быть определены в виде:

$$\underline{Z}_{ab} = R + jX_L = R + j\sqrt{3}R = R(1 + j\sqrt{3}) = 2R \cdot e^{j60°} \text{ Ом}; \qquad (7)$$

$$\underline{Z}_{ca} = R - jX_C = R - j\sqrt{3}R = R(1 - j\sqrt{3}) = 2R \cdot e^{-j60°} \text{ Ом}. \qquad (8)$$

Подставляя (3), (4), (7) и (8) в (2), получим:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{220e^{j0^\circ}}{2R\cdot e^{j60^\circ}} = \frac{110}{R}e^{-j60^\circ}\ \text{A};\quad \underline{\mathrm{I}}_{\mathrm{ca}} = \frac{220e^{j120^\circ}}{2R\cdot e^{-j60^\circ}} = \frac{110}{\mathrm{R}}e^{j180^\circ}\ \text{A}.$$

Возвращаясь к (1), получим:

$$\underline{U}_{12} = R\frac{110}{R}(j\sqrt{3}e^{-j60^\circ} + e^{j180^\circ}) = 55 + j95{,}3 = 110e^{j60^\circ}\ \text{B}.$$

Следовательно,

$$U_V = 110\ \text{B}.$$

Задача 4.17. Определить показания приборов электромагнитной системы в цепи (рис. 4.30), если $U_{\text{л.г}} = 380\,\text{B}$, $R = X = 25\,\text{Ом}$.

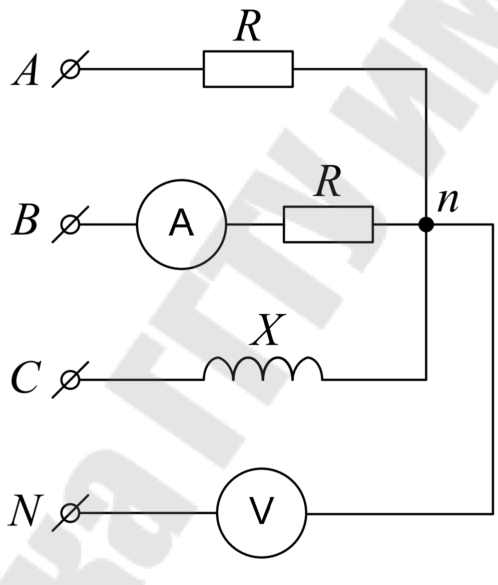


Рис. 4.30

Решение. В заданной цепи амперметр измеряет линейный ток I_B, а вольтметр – напряжение смещения нейтрали. Схема для расчета представлена на рис. 4.31.

Для такой схемы

$$\underline{U}_V = \underline{U}_{nN} = \frac{\underline{U}_A\underline{Y}_A + \underline{U}_B\underline{Y}_B + \underline{U}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}, \tag{1}$$

где $\underline{Y}_A = \dfrac{1}{\underline{Z}_A} = 0{,}04$ См; $\underline{Y}_B = \dfrac{1}{\underline{Z}_B} = 0{,}04$См; $\underline{Y}_C = \dfrac{1}{\underline{Z}_C} = 0{,}04e^{-j90^\circ}$ См.

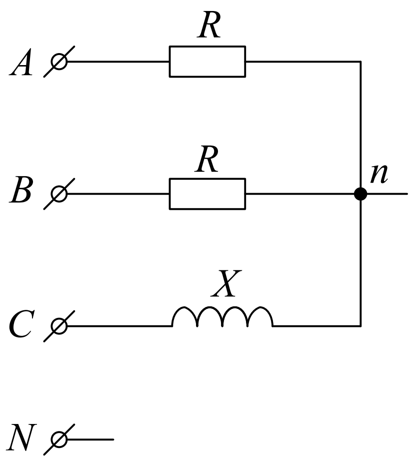


Рис. 4.31

Фазное напряжение генератора

$$U_{\text{ф.г}} = \frac{U_{\text{л.г}}}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} = 220 \text{ В}.$$

Если

$$\underline{U}_A = U_{\text{ф.г}}\, e^{j0^\circ} = 220 e^{j0^\circ} \text{ В}, \tag{2}$$

то

$$\underline{U}_B = 220 e^{-j120^\circ} \text{ В}, \quad \underline{U}_C = 220 e^{j120^\circ} \text{ В}. \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{220 \cdot 0{,}04 + 220 e^{-j120^\circ} \cdot 0{,}04 + 220 e^{j120^\circ} \cdot 0{,}04 e^{-j90^\circ}}{0{,}04 + 0{,}04 + 0{,}04 e^{-j90^\circ}} = 138{,}5 e^{j11{,}6^\circ} \text{ В}.$$

Следовательно, $U_V = 138{,}5$ В.

Искомый ток определяем по закону Ома:

$$I_B = \frac{\underline{U}_b}{\underline{Z}_B} = \frac{\underline{U}_B - \underline{U}_{nN}}{R} = \frac{220 e^{-j120^\circ} - 138{,}5 e^{j11{,}6^\circ}}{25} =$$

$$= \frac{-110 - j190{,}5 - 136 - j28}{25} = 13{,}2 e^{-j138{,}4^\circ} \text{ А}.$$

Таким образом, показание амперметра составляет 13,2 А.

Задача 4.18. В схеме (рис. 4.32) определить параметры симметричного приемника, соединенного треугольником, если $U_л = 380$ В, $P_{W_A} = 418$ Вт, $P_{W_C} = 836$ Вт.

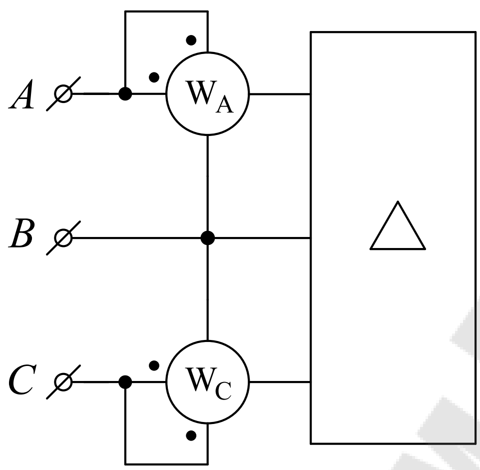


Рис. 4.32

Решение. Активная мощность, потребляемая нагрузкой, равна:

$$P_{нагр} = P_{W_A} + P_{W_C}. \qquad (1)$$

Если нагрузка симметричная, то

$$P_{нагр} = 3P_ф, \qquad (2)$$

где $P_ф$ – активная мощность, потребляемая каждой из трех фаз.

Из (1) и (2) находим:

$$P_ф = \frac{P_{W_A} + P_{W_C}}{3} = \frac{418 + 836}{3} = 418 \text{ Вт}.$$

Воспользуемся тем, что

$$P_ф = U_ф I_ф \cos\varphi_ф = \frac{U_ф^2}{Z_ф}\cos\varphi_ф; \;\; \varphi_ф = \operatorname{arctg}\frac{Q_ф}{P_ф}.$$

Так как нагрузка симметричная:

$$\varphi_ф = \operatorname{arctg}\frac{Q}{P} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(P_{W_C} - P_{W_A})}{P_{W_A} + P_{W_C}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(836 - 418)}{418 + 836} = 30^\circ.$$

Поскольку фазы приемника соединены треугольником,

$$U_{\text{ф}} = U_{\text{л}} = 380 \text{ В}.$$

Следовательно,

$$Z_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{ф}}^2}{P_{\text{ф}}} \cos\varphi_{\text{ф}} = \frac{380^2}{418} \cos 30° = 299 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_{\text{ф}} = Z_{\text{ф}} e^{j\varphi_{\text{ф}}} = 299 e^{30°} = (259 + j149{,}5) \text{ Ом}.$$

Так как $\varphi > 0$, фаза приемника имеет активно-индуктивный характер, а параметры ее последовательной схемы замещения:

$$R = \operatorname{Re} Z_{\text{ф}} = 259 \text{ Ом}; \; X_{\text{ф}} = \operatorname{Im} Z_{\text{ф}} = 149{,}5 \text{ Ом}.$$

Задача 4.19. Два асинхронных двигателя с помощью трехфазного кабеля подключены к сети с линейным напряжением $U = 220$ В частотой 50 Гц. Фазные обмотки первого двигателя соединены *треугольником*; потребляемая им мощность $P_1 = 3{,}6$ кВт при $\cos\varphi_1 = 0{,}85$. Обмотки второго двигателя соединены *звездой*; потребляемая им мощность $P_2 = 2{,}2$ кВт при $\cos\varphi_2 =$ 0,7. Определить линейные токи в жилах кабеля. Рассчитать компенсирующую емкость (на одну фазу), которую необходимо подключить к двигателям, чтобы на входе кабеля коэффициент мощности был равен 0,95. Как после подключения батареи компенсирующих конденсаторов изменится ток в кабеле?

Решение. Фазный ток первого двигателя

$$I_{\text{ф}1} = \frac{P_1}{\sqrt{3} U \cos\varphi_1} = \frac{3600}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0{,}85} = 6{,}42 \text{ А}.$$

Линейный ток треугольника

$$I_{\text{л}1} = I_{\text{ф}1}\sqrt{3} = 6{,}42\sqrt{3} = 11{,}12 \text{ А}.$$

Фазный ток второго двигателя

$$I_{\text{ф}2} = \frac{P_2}{\sqrt{3}\, U_{\text{ф}1} \cos\varphi_2} = \frac{2200}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0{,}7} = 8{,}25 \text{ А}.$$

Согласно заданию углы сдвига между напряжением и током в фазах двигателей:

$$\varphi_1 = \arccos 0{,}85 \approx 31{,}79° \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \arccos 0{,}7 \approx 45{,}57°.$$

Следовательно, при $\underline{U}_{AB} = 220e^{j30°}$ В ток в жиле A кабеля будет равен:

$$\underline{I}_A = I_{л1}e^{-j\varphi_1} + I_{ф2}e^{-j\varphi_2} = 11{,}12e^{-j31{,}79°} + 8{,}25e^{-j45{,}57°} = 19{,}23e^{-j37{,}65°}\ \text{А}.$$

В силу симметрии нагрузки токи в остальных жилах кабеля:

$$I_B = 19{,}23e^{-j157{,}65°}\ \text{А} \quad \text{и} \quad \underline{I}_C = 19{,}23e^{j82{,}35°}\ \text{А}.$$

Из расчета токов следует, что коэффициент мощности эквивалентной трехфазной нагрузки будет равен:

$$\cos\varphi_{экв} = \cos 37{,}65° \approx 0{,}792.$$

С учетом того, что суммарная активная мощность двигателей после подключения батареи компенсирующих конденсаторов должна оставаться неизменной, т. е.

$$P_\Sigma = P_1 + P_2 = 3{,}6 + 2{,}2 = 5{,}8\ \text{кВт} = 5800\ \text{Вт},$$

реактивную мощность батареи можно определить в виде:

$$Q_C = Q_{дв} - Q_{0{,}95} = P_\Sigma\left[\operatorname{tg}\varphi_{экв} - \operatorname{tg}(\arccos 0{,}95)\right] =$$

$$= 5800(0{,}7715 - 0{,}3287) = 2568{,}3\ \text{вар} = 3\frac{U_л^2}{X_C},$$

откуда сопротивление фазы конденсаторов

$$X_C = 3\frac{220^2}{2568{,}3} = 56{,}5\ \text{Ом}$$

и соответствующая емкость

$$C_ф = \frac{1}{X_C\omega} = \frac{1}{56{,}5\cdot 314} = 56{,}4\cdot 10^{-6}\ \text{Ф} = 56{,}4\ \text{мкФ}.$$

Ток в жиле кабеля после подключения батареи компенсирующих конденсаторов станет равным:

$$I_A = \frac{P_\Sigma}{\sqrt{3}U_л\cdot 0{,}95} = \frac{5800}{\sqrt{3}\cdot 220\cdot 0{,}95} = 16\ \text{А},$$

т. е. ток в кабеле уменьшится на 16,8 %, а потери мощности в линии – приблизительно на 30,8 %.

4.3. Расчет трехфазных цепей методом симметричных составляющих

Задача 4.20. Симметрия ЭДС генератора с фазным напряжением $U_{ф.г} = 220$ В нарушена, так как обмотка фазы *a* подключена к нейтральной точке не тем концом.

Симметричная нагрузка соединена звездой с нейтральным проводом, сопротивление которого $\underline{Z}_N = j0{,}025$ Ом. Сопротивление токам нулевой, прямой и обратной последовательностей таково: для фазы генератора $\underline{Z}_{г_0} = j0{,}5$ Ом, $\underline{Z}_{г_1} = j9$ Ом, $\underline{Z}_{г_2} = j1$ Ом; для линии $\underline{Z}_{л_0} = j2$ Ом, $\underline{Z}_{л_1} = \underline{Z}_{л_2} = j1$ Ом; для фазы нагрузки $\underline{Z}_0 = j0{,}5$ Ом, $\underline{Z}_1 = j4$ Ом, $\underline{Z}_2 = j1$ Ом.

Определить симметричные составляющие токов.

Решение. Приняв исходную систему фазных напряжений:

$$\underline{U}_A = -220 \text{ В}; \ \underline{U}_B = 220e^{-j120^\circ} \text{ В}; \ \underline{U}_C = 220e^{j120^\circ} \text{ В},$$

находим векторы нулевой, прямой и обратной последовательностей:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_A + \underline{U}_B + \underline{U}_C}{3} = \frac{-220 + 220e^{-j120^\circ} + 220e^{j120^\circ}}{3} = -146{,}67 \text{ В};$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_A + a\underline{U}_B + a^2\underline{U}_C}{3} = \frac{-220 + e^{j120^\circ} \cdot 220\,e^{-j120^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 220\,e^{j120^\circ}}{3} =$$

$$= 73{,}3 \text{ В};$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_A + a^2\underline{U}_B + a\underline{U}_C}{3} = \frac{-220 + e^{-j120^\circ} \cdot 220\,e^{-j120^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 220\,e^{j120^\circ}}{3} =$$

$$= -146{,}67 \text{ В}.$$

Находим симметричные составляющие токов:

$$\underline{I}_{A0} = \underline{I}_{B0} = \underline{I}_{C0} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_{г_0} + \underline{Z}_{л_0} + \underline{Z}_0 + 3\underline{Z}_N} = \frac{-146{,}67}{j0{,}5 + j2 + j0{,}5 + j0{,}25} =$$

$$= j117{,}2 \text{ А};$$

$$\underline{I}_{A_1} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{г_1} + \underline{Z}_{л_1} + \underline{Z}_1} = \frac{73{,}3}{j9 + j1 + j4} = -j5{,}24 = 5{,}24e^{-j90^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{B_1} = \underline{I}_{A_1} e^{-j120^\circ} = 5{,}24 e^{-j90^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 5{,}24 e^{j150^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{C_1} = \underline{I}_{A_1} e^{j120^\circ} = 5{,}24 e^{-j90^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 5{,}24 e^{j30^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{A_2} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{\text{г}_2} + \underline{Z}_{\text{л}_2} + \underline{Z}_2} = \frac{-146{,}67}{j1 + j1 + j1} = j48{,}8 = 48{,}8 e^{j90^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{B_2} = \underline{I}_{A_2} e^{j120^\circ} = 48{,}8 e^{j90^\circ} \cdot e^{j120^\circ} = 48{,}8 e^{-j150^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{C_2} = \underline{I}_{A_2} e^{-j120^\circ} = 48{,}8 e^{j90^\circ} \cdot e^{-j120^\circ} = 48{,}8 e^{-j30^\circ} \text{ А.}$$

Задача 4.21. Трехпроводная трехфазная сеть с линейными напряжениями $\underline{U}_{AB} = 220 e^{j0^\circ}$В, $\underline{U}_{BC} = 220 e^{-j90^\circ}$В, $\underline{U}_{CA} = 311 e^{j135^\circ}$В питает электродвигатель, фазы которого соединены звездой и имеют сопротивление $\underline{Z}_1 = 4 e^{j45^\circ}$Ом для токов прямой последовательности и $\underline{Z}_2 = 2 e^{j60^\circ}$Ом для токов обратной последовательности. Найти токи в фазах двигателя.

Решение. Находим комплексы векторов нулевой, прямой и обратной последовательностей для заданной системы линейных напряжений:

$$\underline{U}_0 = \frac{\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA}}{3} = \frac{220 e^{j0^\circ} + 220 e^{-j90^\circ} + 311 e^{j135^\circ}}{3} = 0 \text{ В;}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{U}_{AB} + a\underline{U}_{BC} + a^2 \underline{U}_{CA}}{3} =$$

$$= \frac{220 e^{j0^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 220 e^{-j90^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 311 e^{j135^\circ}}{3} =$$

$$= 245 e^{j15^\circ} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_{AB} + a^2 \underline{U}_{BC} + a\underline{U}_{CA}}{3} = \frac{220 e^{j0^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 220 e^{-j90^\circ}}{3} +$$

$$+ \frac{e^{j120^\circ} \cdot 311 e^{j135^\circ}}{3} = 66 e^{-j105^\circ} \text{ В.}$$

Тогда заданные линейные напряжения:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_0 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 245e^{j15^\circ} + 66e^{-j105^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{BC} = \underline{U}_0 + a^2\underline{U}_1 + a\underline{U}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 245e^{j15^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 66e^{-j105^\circ} =$$

$$= 245e^{-j105^\circ} + 66e^{j15^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{CA} = \underline{U}_0 + a\underline{U}_1 + a^2\underline{U}_2 = e^{j120^\circ} \cdot 245e^{j15^\circ} + e^{-j120^\circ} \cdot 66e^{-j105^\circ} =$$

$$= 245e^{j135^\circ} + 66e^{j135^\circ} = 311e^{j135^\circ} \text{ В}.$$

Чтобы найти симметричные составляющие фазных напряжений генератора $\underline{U}_{\text{ф.г}_1}$ и $\underline{U}_{\text{ф.г}_2}$, воспользуемся соотношениями между фазными и линейными напряжениями в симметричных системах прямой и обратной последовательностей:

$$\underline{U}_{\text{ф.г}_1} = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = \frac{245e^{j15^\circ}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 141{,}5e^{-j15^\circ} \text{ В};$$

$$\underline{U}_{\text{ф.г}_2} = \frac{\underline{U}_2}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = \frac{66e^{-j105^\circ}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = 38e^{-j75^\circ} \text{ В}.$$

При этом составляющую $\underline{U}_{\text{ф.г}_0}$ в данной задаче определять не нужно, так как из-за отсутствия нейтрального провода $\underline{I}_0 = 0$.

Симметричные составляющие токов находим по закону Ома:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{\text{ф.г}_1}}{\underline{Z}_1} = \frac{141{,}5e^{-j15^\circ}}{4e^{j45^\circ}} = 35{,}4e^{-j60^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{\text{ф.г}_2}}{\underline{Z}_2} = \frac{38e^{-j75^\circ}}{2e^{j60^\circ}} = 19e^{-j135^\circ} \text{ А}.$$

Находим фазные токи двигателя:

$$\underline{I}_A = \underline{I}_0 + \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 35{,}4e^{-j60^\circ} + 19e^{-j135^\circ} = 44{,}3e^{-j84{,}5^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_B = \underline{I}_0 + a^2\underline{I}_1 + a\underline{I}_2 = e^{-j120^\circ} \cdot 35{,}4e^{-j60^\circ} + e^{j120^\circ} \cdot 19e^{-j135^\circ} =$$

$$= 17{,}7e^{-j164^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_0 + a\underline{I}_1 + a^2\underline{I}_2 = e^{j120^{\circ}} \cdot 35{,}4e^{-j60^{\circ}} + e^{-j120^{\circ}} \cdot 19e^{-j135^{\circ}} =$$

$$= 50{,}7e^{j75{,}5^{\circ}} \text{ А.}$$

4.4. Высшие гармоники в трехфазных цепях

Задача 4.22. Вторичные обмотки трехфазного трансформатора соединены треугольником (рис. 4.33).

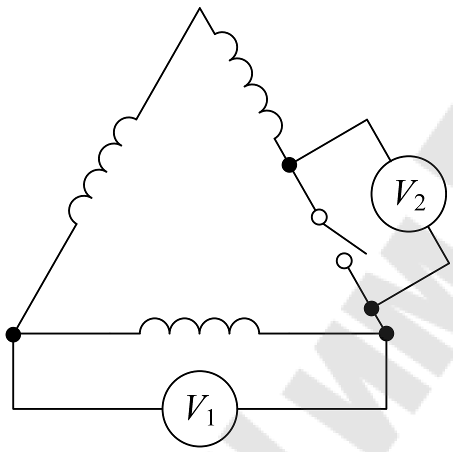


Рис. 4.33

Фазное напряжение известно и равно:

$$u_{\text{ф}} = 120\sqrt{2}\sin\omega t - 50\sqrt{2}\sin 3\omega t + 40\sqrt{2}\sin 5\omega t -$$

$$- 30\sqrt{2}\sin 7\omega t + 20\sqrt{2}\sin 9\omega t \text{ В.}$$

Найти показания вольтметров электромагнитной системы: а) при замкнутом ключе; б) разомкнутом ключе.

Решение. Ключ замкнут:

$$U_{V_1} = \sqrt{120^2 + 40^2 + 30^2} = 130 \text{ В}; \quad U_{V_2} = 0.$$

Ключ разомкнут:

$$U_{V_1} = \sqrt{120^2 + 50^2 + 40^2 + 30^2 + 20^2} = 140{,}7 \text{ В};$$

$$U_{V_2} = \sqrt{(3 \cdot 50)^2 + (3 \cdot 20)^2} = 161{,}6 \text{ В.}$$

Задача 4.23. В цепи (рис. 4.34) фазная ЭДС трехфазного симметричного генератора содержит 1-ю и 3-ю гармоники. Показания электромагнитных вольтметров: $U_{V_1} = 170$ В, $U_{V_2} = 260$ В. Сопротивление фазы симметричного приемника $\omega L = 10$ Ом. Определить показания электромагнитных амперметров I_{A_1} и I_{A_2}.

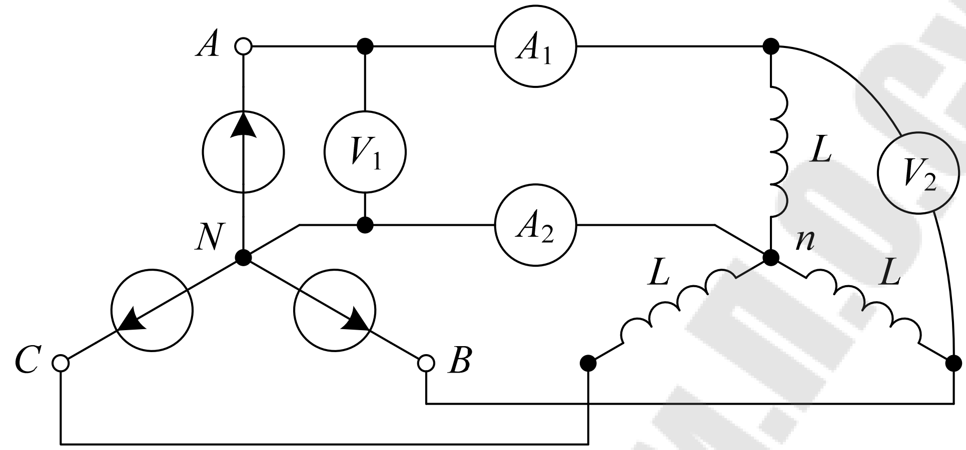


Рис. 4.34

Решение. Согласно условию показание второго вольтметра

$$U_{V_2} = U_{\text{ф.г}(1)}\sqrt{3} = 260 \text{ В},$$

где $U_{\text{ф.г}(1)}$ – действующее значение первой гармоники фазного напряжения генератора.

Следовательно,

$$U_{\text{ф.г}(1)} = \frac{260}{\sqrt{3}} = 150 \text{ В}; \quad U_{\text{ф.г}(3)} = \sqrt{U_{V_1}^2 - U_{\text{ф.г}(1)}^2} = \sqrt{170^2 - 150{,}1^2} = 80 \text{ В}.$$

В свою очередь, первая и третья гармоники линейного тока будут равны:

$$I_{\text{л}(1)} = \frac{U_{\text{ф.г}(1)}}{\omega L} = \frac{150}{10} = 15 \text{ А}; \quad I_{\text{л}(3)} = \frac{U_{\text{ф.г}(3)}}{3\omega L} = \frac{80}{3 \cdot 10} = 2{,}67 \text{ А}.$$

Наконец, показания амперметров определятся в виде:

$$I_{A_1} = \sqrt{I_{\text{л}(1)}^2 + I_{\text{л}(3)}^2} = \sqrt{15^2 + 2{,}67^2} = 15{,}24 \text{ А};$$

$$I_{A_2} = 3I_{\text{л}(3)} = 3 \cdot 2{,}67 = 8 \text{ А}.$$

Задача 4.24. Обмотки симметричного трехфазного генератора соединены звездой. Найти мгновенные значения всех фазных и линейных напряжений и действующие значения фазного и линейного напряжений, если $u_A = 100\sin\omega t + 20\sin 3\omega t + 15\sin 5\omega t$, В.

Решение. Первые гармоники напряжения образуют систему прямой, третьи – нулевой, а пятые – обратной последовательности.

Следовательно,

$$u_B = 100\sin(\omega t - 120^{\text{o}}) + 20\sin 3\omega t + 15\sin(5\omega t + 120^{\text{o}})\ \text{В};$$

$$u_C = 100\sin(\omega t + 120^{\text{o}}) + 20\sin 3\omega t + 15\sin(5\omega t - 120^{\text{o}})\ \text{В}.$$

Линейные напряжения найдем как разность фазных:

$$\underline{U}_{AB_{(1)}} = \frac{100}{\sqrt{2}}e^{j0^\circ} - \frac{100}{\sqrt{2}}e^{-j120^\circ} = \frac{100}{\sqrt{2}}\sqrt{3}e^{j30^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{AB_{(3)}} = \frac{20}{\sqrt{2}}e^{j0^\circ} - \frac{20}{\sqrt{2}}e^{j0^\circ} = 0\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{AB_{(5)}} = \frac{15}{\sqrt{2}}e^{j0^\circ} - \frac{15}{\sqrt{2}}e^{j120^\circ} = \frac{15}{\sqrt{2}}\sqrt{3}e^{-j30^\circ}\ \text{В}.$$

Следовательно,

$$u_{AB} = 173\sin(\omega t + 30^{\text{o}}) + 26\sin(5\omega t - 30^{\text{o}})\ \text{В};$$

$$u_{BC} = 173\sin(\omega t - 90^{\text{o}}) + 26\sin(5\omega t + 90^{\text{o}})\ \text{В};$$

$$u_{CA} = 173\sin(\omega t + 150^{\text{o}}) + 26\sin(5\omega t - 150^{\text{o}})\ \text{В}.$$

Действующие значения:

$$U_{\text{ф}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{100^2 + 20^2 + 15^2} = 72{,}9\ \text{В};\ \ U_{\text{л}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{173^2 + 26^2} = 123{,}1\ \text{В}.$$

Задача 4.25. Фазное напряжение генератора содержит первую и третью гармоники. Найти амплитуды гармоник, если при измерении вольтметром были получены значения $U_{\text{ф.г}} = 125$ В, $U_{\text{л.г}} = 210$ В.

Решение. Как известно,

$$U_{\text{ф.г}} = \sqrt{\frac{U_{(1)}^2}{2} + \frac{U_{(3)}^2}{2}}; \tag{1}$$

$$U_{\text{л.г}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{U_{(1)}^2}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}U_{(1)}. \tag{2}$$

Из (2) находим амплитуду первой гармоники:

$$U_{m(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}}U_{\text{л.г}} = \sqrt{\frac{2}{3}}210 = 171{,}5 \text{ В}.$$

Подставляя результат в (1), находим амплитуду третьей гармоники:

$$U_{m(3)} = \sqrt{2U_{\text{ф.г}}^2 - U_{(1)}^2} = \sqrt{2 \cdot 15625 - 29412{,}25} = 42{,}87 \text{ В}.$$

Задача 4.26. Найти мгновенные значения токов и показания приборов (рис. 4.35), если $e_A = 120\sin\omega t + 30\sin 3\omega t + 20\sin 5\omega t$ В, сопротивление проводов линии $R_\text{л} = 10$ Ом, $R = 60$ Ом, $\omega L = 30$ Ом.

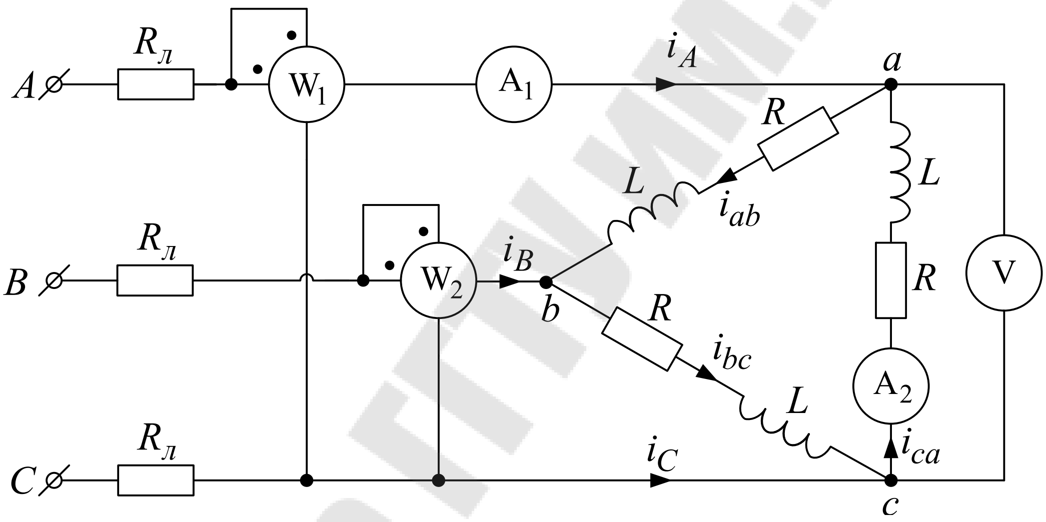


Рис. 4.35

Решение. Третьи гармоники образуют систему нулевой последовательности, которая проявляется только в четырёхпроводных цепях. Поэтому расчет ведем для 1-й и 5-й гармоник.

При этом учитываем, что

$$\underline{Z}_{(1)} = R + j\omega L = (60 + j30) \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_{(5)} = R + j5\omega L = (60 + j150) \text{ Ом}.$$

Преобразуем сопротивления нагрузки, соединенные треугольником, в эквивалентную звезду:

$$\underline{Z}'_{(1)} = \frac{\underline{Z}_{(1)}}{3} = (20 + j10) = 22{,}4e^{j26{,}35^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z'}_{(5)} = \frac{\underline{Z}_{(5)}}{3} = (20 + j50) = 53{,}9e^{j68{,}10^\circ} \text{ Ом.}$$

Линейные токи:

$$\underline{I}_{A_{(1)}} = \frac{\underline{E}_{A_{(1)}}}{\underline{Z'}_{(1)} + R_{\text{л}}} = \frac{120e^{j0^\circ}}{\sqrt{2}(30 + j10)} = 2{,}68e^{-j18{,}20^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{A_{(5)}} = \frac{\underline{E}_{A_{(5)}}}{\underline{Z'}_{(5)} + R_{\text{л}}} = \frac{120e^{j0^\circ}}{\sqrt{2(30 + j50)}} = 0{,}243e^{-j59^\circ} \text{ А.}$$

Амперметр A_1 показывает действующее значение линейного тока $I_1 = \sqrt{2{,}68^2 + 0{,}243^2} = 2{,}69$ А. Мгновенное значение тока в линейном проводе A:

$$i_A = 3{,}79\sin(\omega t - 18{,}20^\circ) + 0{,}343\sin(5\omega t - 59^\circ) \text{ А.}$$

Учитывая, что

$$\underline{I}_{B_{(1)}} = a^2 \underline{I}_{A_{(1)}};\ \underline{I}_{C_{(1)}} = a\underline{I}_{A_{(1)}};\ \underline{I}_{B_{(5)}} = a\underline{I}_{A_{(5)}};\ \underline{I}_{C_{(5)}} = a^2 \underline{I}_{A_{(5)}},$$

где $a = e^{j120^\circ}$, получим:

$$i_B = 3{,}79\sin(\omega t - 138{,}20^\circ) + 0{,}343\sin(5\omega t + 61^\circ) \text{ А;}$$

$$i_C = 3{,}79\sin(\omega t + 101{,}40^\circ) + 0{,}343\sin(5\omega t - 179^\circ) \text{ А.}$$

Из равенства

$$i_A = i_{ab} - i_{bc}$$

вытекает, что при симметричной нагрузке:

$$\underline{I}_{A_{(1)}} = \underline{I}_{ab_{(1)}}\sqrt{3}e^{-j30^\circ},\ \underline{I}_{A_{(5)}} = \underline{I}_{ab_{(5)}}\sqrt{3}e^{j30^\circ}.$$

Следовательно,

$$\underline{I}_{ab_{(1)}} = \frac{\underline{I}_{A_{(1)}}}{\sqrt{3}} e^{j30^\circ} = 1{,}55e^{j11{,}40^\circ} \text{ А;}$$

$$\underline{I}_{ab_{(5)}} = \frac{\underline{I}_{A_{(5)}}}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 0{,}140e^{-j89^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенные значения токов:

$$i_{ab} = 2{,}19\sin(\omega t + 11{,}40^{\circ}) + 0{,}198\sin(5\omega t - 89^{\circ})\ \text{А};$$

$$i_{bc} = 2{,}19\sin(\omega t - 108{,}2^{\circ}) + 0{,}198\sin(5\omega t + 31^{\circ})\ \text{А};$$

$$i_{ca} = 2{,}19\sin(\omega t + 131{,}4^{\circ}) + 0{,}198\sin(5\omega t + 151^{\circ})\ \text{А}.$$

Амперметр A_2 показывает действующее значение фазного тока:

$$I_2 = \sqrt{1{,}55^2 + 0{,}14^2} = 1{,}56\ \text{А}.$$

Показания ваттметров:

$$P_{W_1} = \operatorname{Re}(\underline{U}_{ac_{(1)}} \overset{*}{\underline{I}}_{A_{(1)}}) + \operatorname{Re}(\underline{U}_{ac_{(5)}} \overset{*}{\underline{I}}_{A_{(5)}});$$

$$P_{W_2} = \operatorname{Re}(\underline{U}_{bc_{(1)}} \overset{*}{\underline{I}}_{B_{(1)}}) + \operatorname{Re}(\underline{U}_{bc_{(5)}} \overset{*}{\underline{I}}_{B_{(5)}}),$$

где

$$\underline{U}_{ac_{(1)}} = -\underline{Z}_{(1)}\underline{I}_{ca_{(1)}} = 104e^{-j21{,}45^{\circ}}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{ac_{(5)}} = -\underline{Z}_{(5)}\underline{I}_{ca_{(5)}} = 22{,}6e^{j40{,}10^{\circ}}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{bc_{(1)}} = \underline{U}_{ac_{(1)}} e^{-j60^{\circ}} = 104e^{-j81{,}45^{\circ}}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{bc_{(5)}} = \underline{U}_{ac_{(5)}} e^{j60^{\circ}} = 22{,}6e^{j100{,}10^{\circ}}\ \text{В}.$$

Следовательно,

$$P_{W_1} = 104\cdot 2{,}68\cos(-24{,}45^{\circ} + 18{,}25^{\circ}) + 22{,}6\cdot 0{,}243\cos(40{,}10^{\circ} + 59^{\circ}) = 227\ \text{Вт};$$

$$P_{W_2} = 104\cdot 2{,}68\cos 56{,}35^{\circ} + 22{,}6\cdot 0{,}243\cos 43{,}10^{\circ} = 157\ \text{Вт}.$$

Баланс активных мощностей:

$$P_{W_1} + P_{W_2} = P;$$

$$P_{W_1} + P_{W_2} = 434\ \text{Вт};\ \ P = 3(RI_2^2) = 3\cdot 1{,}56^2\cdot 60 = 432\ \text{Вт}.$$

Задача 4.27. Фазное напряжение генератора, соединенного треугольником, задано: $u_{\text{ф}} = 254{,}6\sin\omega t + 84{,}9\sin 3\omega t + 50{,}9\sin 5\omega t$, В.

Найти фазные и линейные токи нагрузки, соединенной треугольником, в двух случаях:

1) нагрузка симметричная (рис. 4.36), $R = 5$ Ом, $\dfrac{1}{\omega C} = 25$ Ом;

2) нагрузка равномерная (рис. 4.37), $R = \omega L = \dfrac{1}{\omega C} = 20$ Ом.

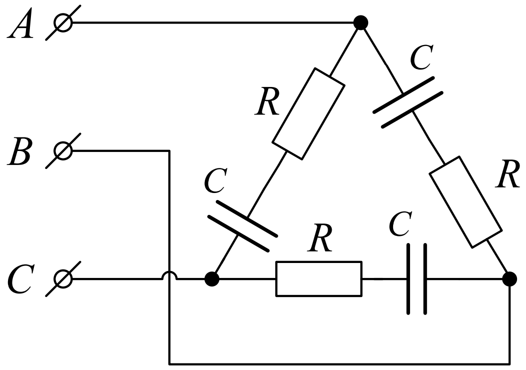


Рис. 4.36

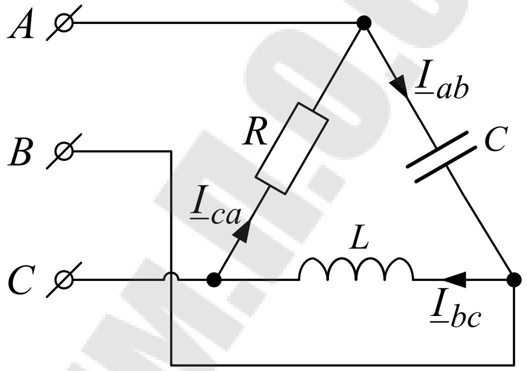


Рис. 4.37

Каждую фазу нагрузки питает линейное напряжение генератора, содержащее только некратные трем гармоники:

$$U_{AB} = 254{,}6 \sin \omega t + 50{,}9 \sin 5\omega t, \text{ В};$$

$$U_{BC} = 254{,}6 \sin(\omega t - 120^{\circ}) + 50{,}9 \sin(5\omega t + 120^{\circ}), \text{ В};$$

$$U_{CA} = 254{,}6 \sin(\omega t + 120^{\circ}) + 50{,}9 \sin(5\omega t - 120^{\circ}), \text{ В}.$$

Первый случай

На первой гармонике:

$$I_{\text{ф}_{(1)}} = \frac{U_{\text{л}_{(1)}}}{Z_{\text{ф}_{(1)}}} = \frac{\frac{254{,}6}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{254{,}6}{\sqrt{2}\sqrt{5^2 + 25^2}} = 7{,}06 \text{ А};$$

$$I_{\text{л}_{(1)}} = \sqrt{3} I_{\text{ф}_{(1)}} = \sqrt{3} \cdot 7{,}06 = 12{,}23 \text{ А}.$$

На пятой гармонике:

$$I_{\text{ф}_{(5)}}=\frac{U_{\text{л}_{(5)}}}{Z_{\text{ф}_{(5)}}}=\frac{\dfrac{50{,}9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{5\omega C}\right)^2}}=\frac{50{,}9}{\sqrt{2}\sqrt{5^2+5^2}}=5{,}09\ \text{А};$$

$$I_{\text{л}_{(5)}}=\sqrt{3}I_{\text{ф}_{(5)}}=\sqrt{3}\cdot 5{,}09=8{,}82\ \text{А}.$$

Следовательно,

$$I_{\text{ф}}=\sqrt{I^2_{\text{ф}_{(1)}}+I^2_{\text{ф}_{(5)}}}=\sqrt{7{,}06^2+5{,}09^2}=8{,}7\ \text{А};$$

$$I_{\text{л}}=\sqrt{I^2_{\text{л}_{(1)}}+I^2_{\text{л}_{(5)}}}=\sqrt{12{,}23^2+8{,}82^2}=15{,}09\ \text{А}.$$

Второй случай

На первой гармонике:

$$\underline{I}_{ab_{(1)}}=\frac{\underline{U}_{AB_{(1)}}}{\underline{Z}_{ab_{(1)}}}=\frac{\dfrac{254{,}6}{\sqrt{2}}e^{j0^\circ}}{20e^{-j90^\circ}}=9e^{j90^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{bc_{(1)}}=\frac{\underline{U}_{BC_{(1)}}}{\underline{Z}_{bc_{(1)}}}=\frac{\dfrac{254{,}6}{\sqrt{2}}e^{-j120^\circ}}{20e^{j90^\circ}}=9e^{j150^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{ca_{(1)}}=\frac{\underline{U}_{CA_{(1)}}}{\underline{Z}_{ca_{(1)}}}=\frac{\dfrac{254{,}6}{\sqrt{2}}e^{j120^\circ}}{20}=9e^{j120^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{A_{(1)}}=\underline{I}_{ab_{(1)}}-\underline{I}_{ca_{(1)}}=9e^{j90^\circ}-9e^{j120^\circ}=4{,}5+j1{,}2=4{,}66e^{j12^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{B_{(1)}}=\underline{I}_{bc_{(1)}}-\underline{I}_{ab_{(1)}}=9e^{j150^\circ}-9e^{j90^\circ}=-7{,}8-j4{,}5=9e^{-j150^\circ}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{C_{(1)}}=\underline{I}_{ca_{(1)}}-\underline{I}_{bc_{(1)}}=9e^{j120^\circ}-9e^{j150^\circ}=3{,}3+j3{,}3=4{,}67e^{j45^\circ}\ \text{А}.$$

На пятой гармонике:

$$\underline{I}_{ab_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{AB_{(5)}}}{\underline{Z}_{ab_{(5)}}} = \frac{\dfrac{50,9}{\sqrt{2}}e^{j0^{\circ}}}{\dfrac{20}{5}e^{-j90^{\circ}}} = 9e^{j90^{\circ}}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{bc_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{BC(5)}}{\underline{Z}_{bc_{(5)}}} = \frac{\dfrac{50,9}{\sqrt{2}}e^{j120^{\circ}}}{5\cdot 20e^{j90^{\circ}}} = 0,36e^{j30^{\circ}}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{ca_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{CA_{(5)}}}{\underline{Z}_{ca_{(5)}}} = \frac{\dfrac{50,9}{\sqrt{2}}e^{-j120^{\circ}}}{20} = 1,8e^{-j120^{\circ}}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{A_{(5)}} = \underline{I}_{ab_{(5)}} - \underline{I}_{ca_{(5)}} = 9e^{j90^{\circ}} - 1,8e^{j120^{\circ}} = 0,9 + j10,56 = 10,6e^{j85,13^{\circ}}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{B_{(5)}} = \underline{I}_{bc_{(5)}} - \underline{I}_{ab_{(5)}} = 0,36e^{j30^{\circ}} - 9e^{j90^{\circ}} = 0,31 - j8,82 = 8,83e^{-j88^{\circ}}\ \text{А};$$

$$\underline{I}_{C_{(5)}} = \underline{I}_{ca_{(5)}} - \underline{I}_{bc_{(5)}} = 1,8e^{-j120^{\circ}} - 0,36e^{j30^{\circ}} = -1,21 - j1,74 = 2,12e^{-j55,2^{\circ}}\ \text{А}.$$

Фазные и линейные токи:

$$I_{ab} = \sqrt{I_{ab_{(1)}}^2 + I_{ab_{(5)}}^2} = \sqrt{9^2 + 9^2} = 12,73\ \text{А};$$

$$I_{bc} = \sqrt{I_{bc_{(1)}}^2 + I_{bc_{(5)}}^2} = \sqrt{9^2 + 0,36^2} = 9,01\ \text{А};$$

$$I_{ca} = \sqrt{I_{ca_{(1)}}^2 + I_{ca_{(5)}}^2} = \sqrt{9^2 + 1,8^2} = 9,18\ \text{А};$$

$$I_{A} = \sqrt{I_{A_{(1)}}^2 + I_{A_{(5)}}^2} = \sqrt{4,66^2 + 10,6^2} = 11,6\ \text{А};$$

$$I_{B} = \sqrt{I_{B_{(1)}}^2 + I_{B_{(5)}}^2} = \sqrt{9^2 + 8,83^2} = 12,6\ \text{А};$$

$$I_{C} = \sqrt{I_{C_{(1)}}^2 + I_{C_{(5)}}^2} = \sqrt{4,67^2 + 2,12^2} = 5,13\ \text{А}.$$

Задача 4.28. К источнику, фазы которого соединены звездой, подключен приемник, фазы которого также соединены звездой. Фазное напряжение источника $u_{\text{ф}} = 254,6\sin\omega t + 84,9\sin 3\omega t + 50,9\sin 5\omega t$.

Между нейтральными точками источника и приемника включают сначала вольтметр, а затем амперметр. Определить показания каждого из приборов и линейный ток I_B в двух случаях:

1) нагрузка симметричная: $\underline{Z}_{ф} = R + j\omega L = (10 + j2)$ Ом;

2) нагрузка равномерная: $\underline{Z}_a = R,\ \underline{Z}_b = j\omega L,\ \ \underline{Z}_c = \dfrac{-j}{\omega C};$

$$R = \omega L = \frac{1}{\omega C} = 12\,\text{Ом}.$$

Вольтметр, включенный между нейтральными точками источника и приемника, измеряет напряжение смещения нейтрали.

Амперметр, включенный между теми же точками, превращает трехпроводную цепь в четырехпроводную и измеряет силу тока в нейтральном проводе.

Первый случай

При симметричной нагрузке смещение нейтрали обусловлено гармониками, кратными трем.

В нашем случае

$$U_{nN} = U_{nN_{(3)}} = U_V = \frac{84{,}9}{\sqrt{2}} = 60\ \text{В}.$$

На первой гармонике

$$I_{ф_{(1)}} = \frac{U_{ф_{(1)}}}{Z_{ф_{(1)}}} = \frac{\dfrac{254{,}6}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10^2 + 2^2}} = 17{,}65\ \text{А}. \tag{1}$$

На пятой гармонике

$$I_{ф_{(5)}} = \frac{U_{ф_{(5)}}}{Z_{ф_{(5)}}} = \frac{\dfrac{50{,}9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10^2 + (5\cdot 2)^2}} = 2{,}55\ \text{А}. \tag{2}$$

Отсюда

$$I_B = I_{л} = \sqrt{I^2_{ф_{(1)}} + I^2_{ф_{(5)}}} = \sqrt{17{,}65^2 + 2{,}55^2} = 17{,}83\ \text{А}. \tag{3}$$

При наличии нейтрального провода фазные токи приемника содержат не только первую и пятую [см. формулы (1) и (2)], но и третью гармонику:

$$I_{ф_{(3)}} = \frac{U_{ф_{(3)}}}{Z_{ф_{(3)}}} = \frac{\frac{84,9}{\sqrt{2}}}{\sqrt{10^2 + (3 \cdot 2)^2}} = 5,15 \text{ А.}$$

В этом случае вместо (3) будем иметь:

$$I_B = I_л = \sqrt{I^2_{ф_{(1)}} + I^2_{ф_{(3)}} + I^2_{ф_{(5)}}} = \sqrt{17,65^2 + 5,15^2 + 2,55^2} = 18,56 \text{ А.}$$

При этом в нейтральном проводе протекает ток

$$I_N = 3I_{ф_{(3)}} = 3 \cdot 5,15 = 15,45 \text{ А.}$$

Следовательно, показание амперметра составляет 15,45 А.

Второй случай

При несимметричной нагрузке, в отсутствие нейтрального провода, смещение нейтрали создают все имеющиеся гармоники:

$$\underline{U}_{nN_{(1)}} = \frac{\underline{U}_{A_{(1)}} \underline{Y}_{A_{(1)}} + \underline{U}_{B_{(1)}} \underline{Y}_{B_{(1)}} + \underline{U}_{C_{(1)}} \underline{Y}_{C_{(1)}}}{\underline{Y}_{A_{(1)}} + \underline{Y}_{B_{(1)}} + \underline{Y}_{C_{(1)}}}; \qquad (4)$$

$$\underline{U}_{nN_{(3)}} = 60 \text{ В (см. первый случай);}$$

$$\underline{U}_{nN_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{A_{(5)}} \underline{Y}_{A_{(5)}} + \underline{U}_{B_{(5)}} \underline{Y}_{B_{(5)}} + \underline{U}_{C_{(5)}} \underline{Y}_{C_{(5)}}}{\underline{Y}_{A_{(5)}} + \underline{Y}_{B_{(5)}} + \underline{Y}_{C_{(5)}}}; \qquad (5)$$

$$\underline{U}_{A_{(1)}} = \frac{254,6}{\sqrt{2}} e^{j0^{\circ}} = 180 e^{j0^{\circ}} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{B_{(1)}} = 180 e^{-j120^{\circ}} \text{ В;} \quad \underline{U}_{C_{(1)}} = 180 e^{j120^{\circ}} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{A_{(5)}} = \frac{50,9}{\sqrt{2}} e^{j0^{\circ}} = 36 e^{j0^{\circ}} \text{ В;}$$

$$\underline{U}_{B_{(5)}} = 36 e^{j120^{\circ}} \text{ В,} \ \underline{U}_{C_{(5)}} = 36 e^{-j120^{\circ}} \text{ В;}$$

$$\underline{Y}_{A_{(1)}} = \underline{Y}_{A_{(5)}} = \frac{1}{R} = \frac{1}{12} = 0,083 \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{B_{(1)}} = \frac{-j}{\omega L} = 0,083 e^{-j90^{\circ}} \text{ См;} \ \underline{Y}_{C_{(1)}} = j\omega C = 0,083 e^{j90^{\circ}} \text{ См;}$$

$$\underline{Y}_{B(5)} = \frac{-j}{5\omega L} = 0{,}017e^{-j90^{\circ}} \text{ См}; \; \underline{Y}_{C(5)} = j5\omega C = 0{,}417e^{j90^{\circ}} \text{ См}.$$

После подстановки в (4) и (5) получаем:

$$\underline{U}_{nN_{(1)}} = \frac{14{,}94e^{j0^{\circ}} + 14{,}94e^{j150^{\circ}} + 14{,}94e^{-150^{\circ}}}{0{,}083e^{j0^{\circ}}} = \frac{-10{,}93}{0{,}083e^{j0^{\circ}}} = 131{,}68e^{j180^{\circ}} \text{В};$$

$$\underline{U}_{nN_{(5)}} = \frac{2{,}988 + 0{,}61e^{j30^{\circ}} + 15{,}01e^{-j30^{\circ}}}{0{,}41e^{j78{,}27^{\circ}}} = \frac{18{,}0e^{-j23{,}55^{\circ}}}{0{,}41e^{j78{,}27^{\circ}}} = 44{,}14e^{-j101{,}52^{\circ}} \text{ В}.$$

В итоге имеем:

$$\underline{U}_{nN} = \underline{U}_{nN_{(1)}} + \underline{U}_{nN_{(3)}} + \underline{U}_{nN_{(5)}} = 131{,}68e^{j180^{\circ}} + 60 + 44{,}14e^{-j101{,}52^{\circ}} =$$
$$= 91{,}56e^{-j151{,}54^{\circ}} \text{ В}.$$

Следовательно, $U_V = 91{,}56$ В.

Линейные токи содержат только некратные трем гармоники. В частности:

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{B_{(1)}} + \underline{I}_{B_{(5)}};$$

$$\underline{I}_{B(1)} = (\underline{U}_{B(1)} - \underline{U}_{nN(1)})\underline{Y}_{B(1)} = 13{,}39\, e^{-j165{,}03^{\circ}} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{B(5)} = (\underline{U}_{B(5)} - \underline{U}_{nN(5)})\underline{Y}_{B(5)} = 1{,}27e^{j6{,}86^{\circ}} \text{ А},$$

откуда

$$\underline{I}_B = 13{,}39e^{-j165{,}03^{\circ}} + 1{,}27e^{j6{,}86^{\circ}} = 12{,}13e^{-j164{,}18^{\circ}} \text{ А}.$$

При наличии нейтрального провода линейные (фазные) токи содержат все имеющиеся гармоники.

На первой гармонике:

$$I_{\text{ф}_{(1)}} = \frac{U_{\text{ф}_{(1)}}}{Z_{\text{ф}_{(1)}}} = \frac{\frac{254{,}6}{\sqrt{2}}}{12} = 15 \text{ А};$$

$$\underline{I}_{A_{(1)}} = 15e^{j0^{\circ}} \text{ А}, \; \underline{I}_{B_{(1)}} = I_{\text{ф}_{(1)}} e^{-j120^{\circ}} e^{-j90^{\circ}} = 15e^{j150^{\circ}} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{C_{(1)}} = I_{\text{ф}_{(1)}} e^{j120^{\circ}} e^{j90^{\circ}} = 15e^{-j150^{\circ}} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{N_{(1)}} = \underline{I}_{A_{(1)}} + \underline{I}_{B_{(1)}} + \underline{I}_{C_{(1)}} = 15 + 15e^{j150°} + 15e^{-j150°} = -11 \text{ А.}$$

На третьей гармонике:

$$\underline{I}_{A_{(3)}} = \frac{\underline{U}_{A_{(3)}}}{\underline{Z}_{a_{(3)}}} = \frac{\frac{84{,}9}{\sqrt{2}}}{12} = 5 \text{ А}; \quad \underline{I}_{B_{(3)}} = \frac{\underline{U}_{B_{(3)}}}{\underline{Z}_{b_{(3)}}} = \frac{\frac{84{,}9}{\sqrt{2}}}{3 \cdot 12e^{j90°}} = 1{,}67e^{-j90°} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{C_{(3)}} = \frac{\underline{U}_{C_{(3)}}}{\underline{Z}_{c_{(3)}}} = \frac{\frac{84{,}9}{\sqrt{2}}}{\frac{12}{3}e^{-j90°}} = 15e^{j90°} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{N_{(3)}} = \underline{I}_{A_{(3)}} + \underline{I}_{B_{(3)}} + \underline{I}_{C_{(3)}} = 5 + 1{,}67e^{-j90°} + 15e^{j90°} = 14{,}2e^{j69{,}4°} \text{ А.}$$

На пятой гармонике:

$$\underline{I}_{A_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{A_{(5)}}}{\underline{Z}_{a_{(5)}}} = \frac{36e^{j0°}}{12} = 3 \text{ А}; \quad \underline{I}_{B_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{B_{(5)}}}{\underline{Z}_{b_{(5)}}} = \frac{36e^{j120°}}{5 \cdot 12e^{j90°}} = 0{,}6e^{j30°} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{C_{(5)}} = \frac{\underline{U}_{C_{(5)}}}{\underline{Z}_{c_{(5)}}} = \frac{36e^{-j120°}}{\frac{12}{5}e^{-j90°}} = 15e^{-j30°} \text{ А};$$

$$\underline{I}_{N_{(5)}} = \underline{I}_{A_{(5)}} + \underline{I}_{B_{(5)}} + \underline{I}_{C_{(5)}} = 3 + 0{,}6e^{j30°} + 15e^{-j30°} = 18e^{-j23{,}6°}, \text{ А.}$$

В итоге:

$$\underline{I}_B = \underline{I}_{B_{(1)}} + \underline{I}_{B_{(3)}} + \underline{I}_{B_{(5)}} = 15e^{j150°} + 1{,}67e^{-j90°} + 0{,}6e^{j30°} = 13{,}89e^{j153{,}82°}, \text{ А};$$

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{N_{(1)}} + \underline{I}_{N_{(3)}} + \underline{I}_{N_{(5)}} = -11 + 14{,}2e^{j69{,}4°} + 18e^{-j23{,}6°} = 22{,}9e^{j78{,}54°}, \text{ А.}$$

Показание амперметра составляет 22,9 А.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.29. В симметричной трехфазной цепи (рис. 4.38) $I_{ab} = I_{bc} = I_{ca} = 10$ А. Определить линейные токи при обрыве линейного провода А.

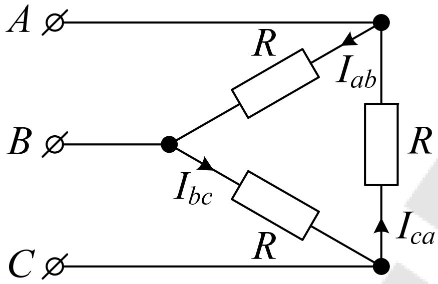


Рис. 4.38

Задача 4.30. В симметричной трехфазной цепи (рис. 4.38) линейные токи одинаковы и равны 15 А. Как изменятся линейные токи после увеличения сопротивления в фазе «bc» в 2 раза?

Задача 4.31. В симметричной трехфазной цепи (рис. 4.39) $I_A = I_B = I_C = 10$ А. Как изменятся токи после: 1) обрыва фазы «а»; 2) короткого замыкания в фазе «a»; 3) увеличения сопротивления в фазе «a» в 2 раза?

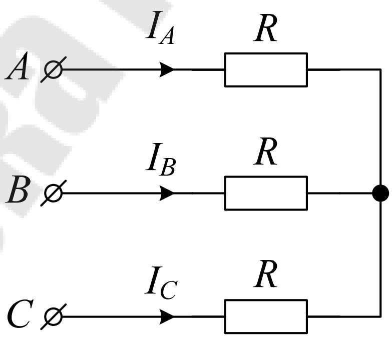


Рис. 4.39

Задача 4.32. К трехфазной сети с линейным напряжением 220 В подключен симметричный приемник, сопротивление каждой фазы которого $\underline{Z}_ф = (8 + j6)$ Ом. Определить линейные токи и активную мощность, потребляемую приемником, при соединении его фаз: а) звездой; б) треугольником. Построить векторные диаграммы.

Задача 4.33. Симметричная нагрузка с сопротивлением фазы $\underline{Z}_{ф} = (1{,}2 + j5)$ Ом соединена звездой и подключена к трехфазному источнику с помощью линии, сопротивление фазы которой $\underline{Z}_{л} = (1{,}2 + j0{,}5)$ Ом. Определить напряжение источника, при котором линейное напряжение приемника равно $U_{ном} = 380$ В.

Задача 4.34. Симметричный трехфазный приемник подключен к генератору, линейное напряжение которого $U_{л} = 380$ В. Фазы приемника с сопротивлением $\underline{Z}_{ф} = (210 + j165)$ Ом соединены треугольником. Сопротивление каждого из линейных проводов $\underline{Z}_{л} = (10 + j5)$ Ом. Определить напряжение на фазах приемника.

Задача 4.35. В обычном режиме трехфазный электродвигатель работает при соединении обмоток треугольником. На время пуска в ход его обмотки соединяют звездой. Во сколько раз благодаря этому уменьшится пусковой ток: а) в подводящих проводах; б) в фазе двигателя.

Задача 4.36. Трехфазный двигатель, нормально работающий при напряжении $U = 210$ В, имеет обмотку, соединенную треугольником, причем сопротивление фазы обмотки $Z = 30$ Ом. Как изменится потребляемая мощность, если обмотку двигателя переключить с треугольника на звезду.

Задача 4.37. Обмотка трехфазного двигателя мощностью (на валу) $P_{в}$ и напряжением U соединена треугольником и работает с известными КПД η и $\cos\varphi$. Определить токи в подводящих проводах и в обмотке двигателя, а также потребляемую им мощность, если $U = 120$ В, $P_{в} = 7{,}36$ кВт, $\eta = 84\,\%$, $\cos\varphi = 0{,}82$.

Задача 4.38. Какими были бы ток и мощность в предыдущей задаче, если бы двигатель имел соединение обмоток звездой?

Задача 4.39. На какое напряжение нужно включить двигатель задачи 4.36, чтобы при соединении его обмоток звездой ток в них оставался таким же, как и при соединении треугольником? Как при этом изменится ток в подводящих проводах и мощность электродвигателя?

Задача 4.40. Каждая фаза приемника энергии, соединенного треугольником, имеет сопротивление $\underline{Z}_{ф} = (21 + j15)$ Ом, а сопротивление каждого провода линии передачи $\underline{Z}_{л} = (1 + j1)$ Ом. Определить фазные и линейные токи, если известно, что напряжение на входе линии $U = 3300$ В.

Задача 4.41. Три одинаковых группы ламп соединены треугольником и получают питание от трехфазного трансформатора, вторичная обмотка которого соединена звездой. Сопротивление каждой группы ламп 11 Ом, а фазная ЭДС трансформатора 127 В. Определить токи в обмотке трансформатора и в фазах приемника.

Задача 4.42. Симметричный активно-индуктивный трехфазный приемник потребляет мощность $P = 20$ кВт при $\cos\varphi = 0{,}5$. Линейное напряжение сети 380 В, частота $f = 50$ Гц. Рассчитать емкость конденсаторов одной фазы, необходимых для повышения коэффициента мощности цепи до 0,92 при соединении их: а) звездой; б) треугольником.

Задача 4.43. Система линейных напряжений цепи (рис. 4.40) симметрична; $R = X$. Токи в фазах «*a*» и «*c*» одинаковы и равны 10 А. Аналитически и графически (с помощью векторной диаграммы) определить ток в фазе «*b*».

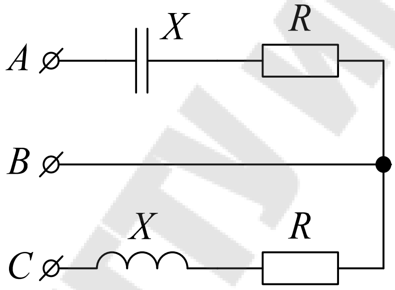


Рис. 4.40

Задача 4.44. Система линейных напряжений цепи (рис. 4.41) симметрична. $U_л = 220$ В, $R = X_L = X_C$. Определить напряжения на фазах приемника.

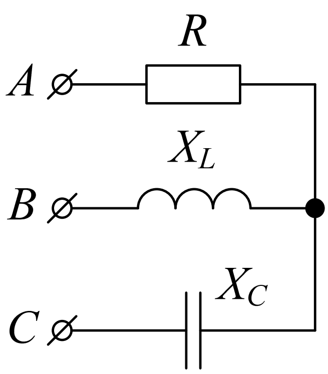


Рис. 4.41

Задача 4.45. Две группы ламп накаливания подключены к трехфазной линии с напряжением $U_л = 220$ В согласно схеме (рис. 4.42). Определить токи в проводах линии, если мощности, потребляемые группами ламп, равны: $P_1 = 200$ Вт, $P_2 = 300$ Вт.

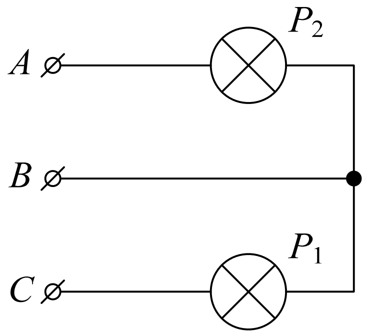


Рис. 4.42

Задача 4.46. Система линейных напряжений цепи (рис. 4.43), симметрична. Ток в линейном проводе B равен 20 А. Определить токи в линейных проводах A и C.

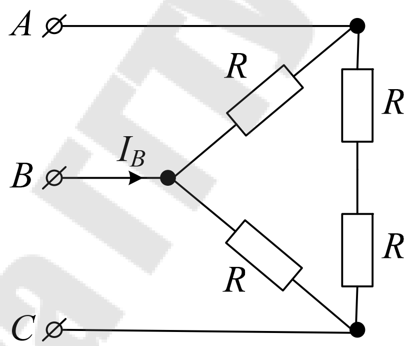


Рис. 4.43

Задача 4.47. В трехфазную цепь с линейным напряжением 380 В включен симметричный приемник (рис. 4.44), сопротивление фазы которого $\underline{Z} = (8 + j6)$ Ом. Найти активную и реактивную мощности приемника по показаниям ваттметров. Сравнить найденные мощности с расчетными значениями.

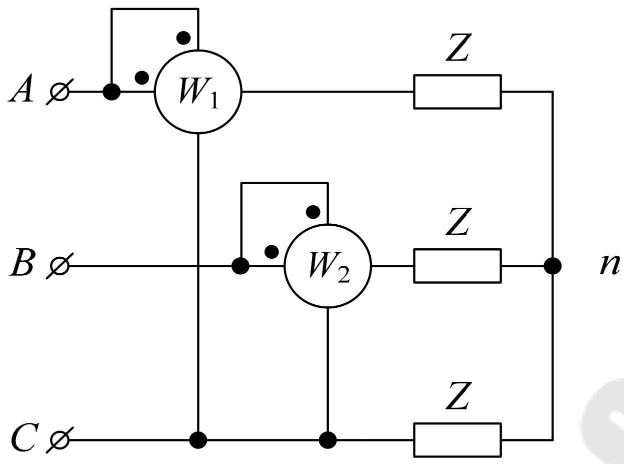


Рис. 4.44

Задача 4.48. В симметричной трехфазной цепи (рис. 4.45) $U_{л} = 380$ В. Определить сопротивления фазы приемника, если показания ваттметров известны и равны: $P_{W_1} = 1000$ Вт, $P_{W_2} = 2000$ Вт.

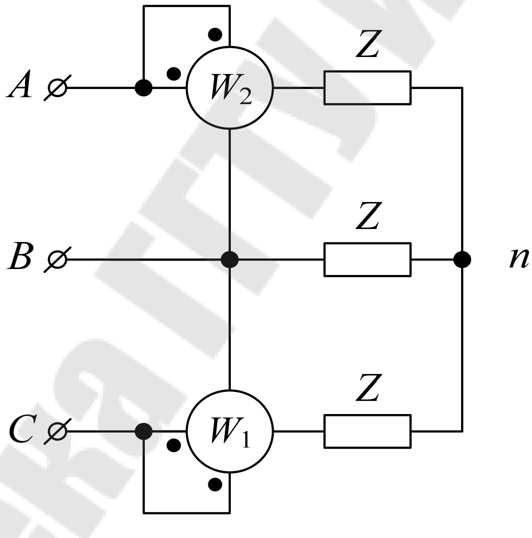


Рис. 4.45

Задача 4.49. Определить показания ваттметров в симметричной трехфазной цепи (рис. 4.46), если $U_{л} = 220$ В, а сопротивление фазы приемника $\underline{Z}_{ф} = jX = j8$ Ом.

Задача 4.50. Сопротивления фаз приемника в цепи (рис. 4.45) известны и равны: $\underline{Z}_a = 16$ Ом, $\underline{Z}_b = j16$ Ом, $\underline{Z}_c = -j16$ Ом. Линейное напряжение симметричного источника $U_{л} = 380$ В. Определить показания ваттметров для случаев: 1) нормальный режим; 2) обрыв фазы «b»; 3) короткое замыкание в фазе «a».

Задача 4.51. В симметричной трехфазной цепи (рис. 4.46) показания приборов известны и равны: $U_V = 173$ В, $I_A = 10$ А, $P_W = 1500$ Вт. Определить активную и реактивную мощности приемника.

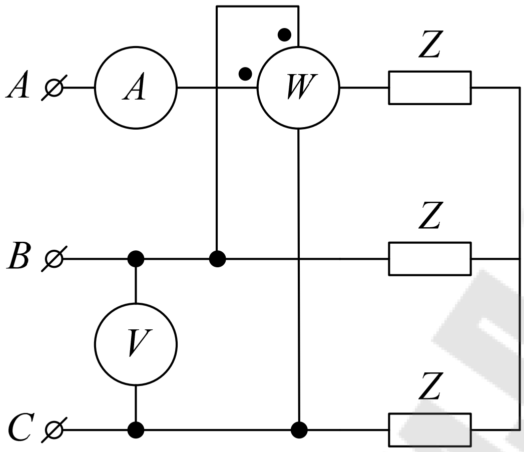


Рис. 4.46

Задача 4.52. В симметричной трехфазной цепи (рис. 4.47) показания приборов известны и равны: $U_V = 173$ В, $I_A = 10$ А, $P_W = 867$ Вт. Определить возможные значения активного и реактивного сопротивлений фазы приемника.

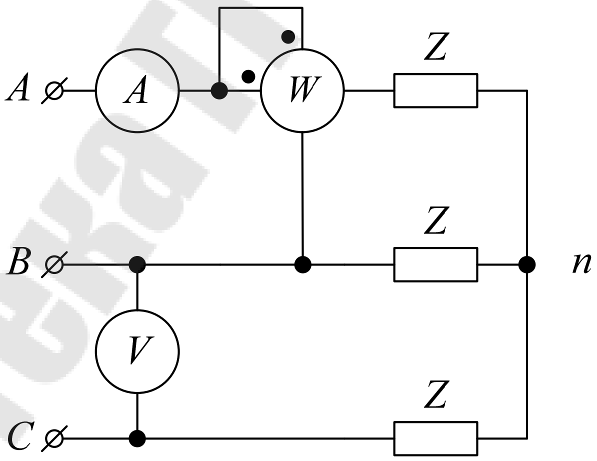


Рис. 4.47

Задача 4.53. В симметричную трехфазную цепь с линейным напряжением $U_л$ = 380 В включен электродвигатель. Потребляемая им мощность определяется по схеме двух ваттметров (рис. 4.48), показания которых равны: P_{W1} = 800 Вт и P_{W2} = 1600 Вт. Определить полное, активное и реактивное сопротивления фазы двигателя.

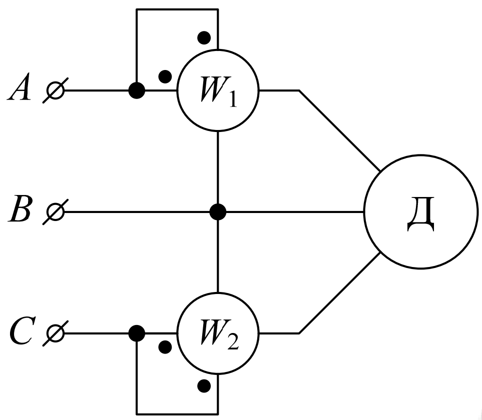


Рис. 4.48

Задача 4.54. В цепь электродвигателя *Д* (рис. 4.49) включено два одинаковых ваттметра, показания которых равны: P_{W1} = 398 Вт, P_{W2} = 2670 Вт. Определить активное и реактивное сопротивления каждой фазы электродвигателя, если $U_л$ = 380 В.

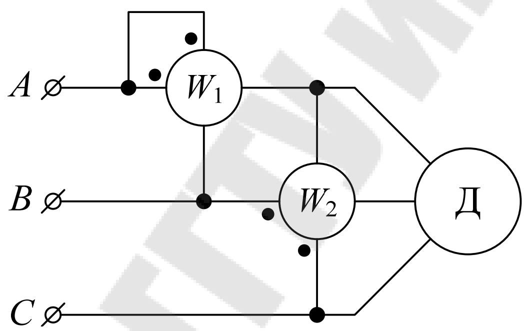


Рис. 4.49

Задача 4.55. В цепи (рис. 4.44) показания ваттметров известны и равны: P_{W1} = 2900 Вт, P_{W2} = 400 Вт. Линейное напряжение трехфазного источника $U_л$ = 380 В. Определить: 1) мощность и сопротивление фазы симметричного трехфазного приемника; 2) определить мощность приемника и показания ваттметров: *а*) при обрыве одной из фаз; б) при коротком замыкании одной из фаз приемника.

Задача 4.56. В симметричном трехфазном приемнике с линейным напряжением $U_л$ = 380 В измерена мощность методом двух ваттметров (рис. 4.41): P_{W1} = 1800 Вт, P_{W2} = 600 Вт. Определить коэффициент мощности приемника.

Глава 5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

ВВОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Переходный процесс, коммутация, начальные условия. Переходный процесс – процесс в электрической цепи, возникающий при переходе от одного установившегося режима к другому. Причиной процесса обычно является коммутация – одномоментное изменение параметров или топологической структуры цепи. На электрической схеме процесс коммутации отображается замыканием (рис. 1, *а*) или размыканием (рис. 1, *б*) ключа.

В задачах расчета переходных процессов полагается, что коммутация происходит в момент времени $t = 0$. Поскольку токи и напряжения элементов цепи в момент коммутации могут изменяться скачкообразно, то условно сам момент коммутации $t = 0$ разбивается на два момента: момент $t = 0_-$, непосредственно предшествующий замыканию (или размыканию) ключа, и момент $t = 0_+$, непосредственно следующий за замыканием (или размыканием) ключа.

а) *б*)

Рис. 1

Значения токов и напряжений элементов в момент $t = 0_+$ называют начальными условиями переходного процесса, которые подразделяют на независимые начальные условия (токи индуктивных элементов и напряжения емкостных элементов) и зависимые начальные условия (токи резистивных, емкостных элементов, источников ЭДС и напряжения резистивных, индуктивных элементов и источников тока).

Законы коммутации, определение начальных условий. Согласно законам коммутации в момент коммутации значения напряжений емкостных элементов и токов индуктивных элементов не меняются. Таким образом, для независимых начальных условий справедливо:

$$u_C(0_+) = = u_C(0_-) \text{ и } i_L(0_+) = i_L(0_-).$$

Исключение составляют случаи, когда в результате коммутации образуются новые – особые контуры, состоящие только из емкостных элементов, или новые – особые разрезы, состоящие только из индуктивных элементов [11]. В момент коммутации для каждого узла k схемы, состоящей только из элементов особых контуров, остается неизменным суммарный заряд, а для каждого контура $\underline{k}$ схемы, состоящей только из элементов особых разрезов, – суммарное потокосцепление. Такие коммутации часто называют некорректными.

Независимые начальные условия для элементов особых контуров и особых разрезов определяются по уравнениям Кирхгофа с учетом дополнительных уравнений. Так, для независимых начальных условий двух параллельно соединенных емкостей (рис. 2) имеем:

$$u_1(0_+) = u_2(0_+) = u(0_+), \quad (\mathrm{C}_1 + C_2)u(0_+) = C_1u_1(0_-) + C_2u_2(0_-),$$

а для независимых начальных условий двух последовательно соединенных индуктивных элементов (рис. 3):

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = i(0_+), \quad (L_1 + L_2)i(0_+) = L_1i_1(0_-) + L_2i_2(0_-).$$

Иногда для определения зависимых начальных условий целесообразно составить и рассчитать чисто резистивную эквивалентную схему цепи для момента времени $t = 0_+$, в которой по теореме компенсации все емкостные элементы с напряжениями $u_k(0_+)$ заменены источниками ЭДС $E_k = u_k(0_+)$, а все индуктивные элементы с токами $i_k(0_+)$ – источниками тока $J_k = i_k(0_+)$.

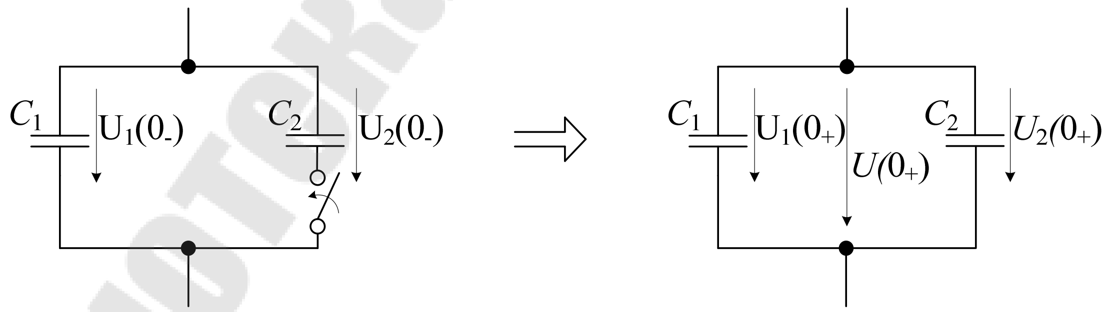


Рис. 2

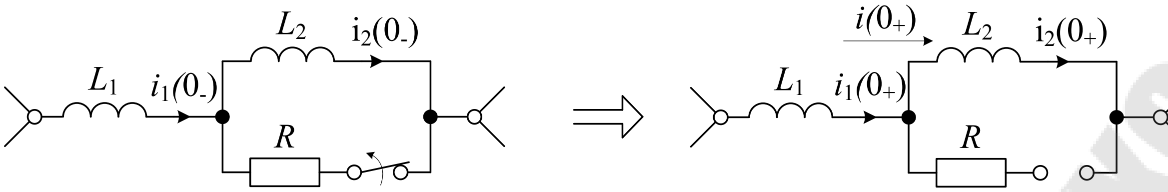


Рис. 3

Классический метод расчета переходных процессов и методика его применения. Согласно классическому методу искомая переменная, например ток $i = i(t)$ в некоторой ветви, представляется в виде суммы принужденной и свободной составляющих:

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}},$$

которые затем находятся по отдельности. Рекомендуется следующая методика расчета переходных процессов в линейных электрических цепях классическим методом [8], [11]:

1) из расчета цепи до коммутации определяют ток в индуктивности $i_L(0_-)$ или напряжение на емкости $u_C(0_-)$; далее по законам коммутации определяют независимые начальные условия $i_L(0_+)$ или $u_C(0_+)$;

2) составляют необходимые уравнения по законам Кирхгофа и закону Ома для цепи в момент времени $t = 0_+$, решая которые с учетом $i_L(0_+)$ или $u_C(0_+)$ определяют зависимые начальные условия искомых переходных величин;

3) в соответствии с классическим методом расчета искомые переходные величины представляют в виде суммы принужденной и свободной составляющих;

4) из расчета установившегося режима в цепи после коммутации определяют принужденные составляющие искомых переходных величин;

5) составляют характеристическое уравнение и определяют его корень, постоянную времени цепи τ и длительность переходного процесса;

6) составляют уравнения для определения постоянных интегрирования;

7) определяют постоянные интегрирования с учетом начальных условий, найденных ранее в п. 1 и 2;

8) искомые переходные величины записывают в виде суммы принужденных и свободных составляющих.

Составление характеристического уравнения:

1. Для цепи после коммутации записывают систему уравнений Кирхгофа для мгновенных значений. Разрешив эту систему относи-

тельно искомой величины (или какой либо другой переменной), получают дифференциальное уравнение относительно этой величины. Характеристическое уравнение получится после замены символов дифференцирования $\frac{d}{dt}$ символами p в соответствующем однородном дифференциальном уравнении и приравнивания полученного алгебраического уравнения к нулю.

2. В цепи после коммутации разрывают ветвь с искомой величиной (или какую-либо другую ветвь). Записывают входное комплексное сопротивление $\underline{Z}(j\omega)$ относительно точек разрыва. Характеристическое уравнение получится после замены символов $j\omega$ на p и приравнивания входного сопротивления к нулю:

$$Z(p) = 0. \tag{1}$$

Решение для свободных составляющих, например тока, записывают по-разному в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

Если корни $p_1, p_2, ...$ действительные, отрицательные и различные, то

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + ... \tag{2}$$

Если корни $p_1, p_2, ...$ действительные, отрицательные и одинаковые, т. е. $p_1 = p_2 = p_3 = ... = p$, то

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{pt} + A_2 t e^{pt} + A_3 t^2 e^{pt} + ... \tag{3}$$

В случае пары комплексных сопряженных корней $p_1 = -\delta + j\omega_{\text{св}}$ и $p_2 = -\delta - j\omega_{\text{св}}$, свободная составляющая

$$i_{\text{св}} = A_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{св}} t + \alpha). \tag{4}$$

В этом случае постоянными интегрирования являются A и α.

Начальные значения (при $t = 0_+$) свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости после коммутации находятся из выражений:

$$i_{L\text{св}}(0_+) = i_L(0_+) - i_{L\text{пр}}(0_+); \tag{5}$$

$$u_{C\text{св}}(0_+) = u_C(0_+) - u_{C\text{пр}}(0_+). \tag{6}$$

В (5) и (6) значения тока в индуктивности $i_L(0_+)$ и напряжения на емкости $u_C(0_+)$ определяются по законам коммутации, т. е.

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = i_L(0); \tag{7}$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = u_C(0). \tag{8}$$

Все остальные начальные значения (зависимые начальные условия) определяются по законам Кирхгофа для момента времени $t = 0_+$.

Операторный метод расчета переходных процессов и методика его применения. Так как решение дифференциального уравнения (или системы уравнений) сводится к решению алгебраического характеристического уравнения, естественно стремление сразу представить систему исходных уравнений цепи в алгебраической форме. Такое представление и осуществляется в операторном методе расчета.

Сущность операторного метода состоит в том, что некоторой однозначной ограниченной функции времени $f(t)$, удовлетворяющей условиям Дирихле на любом конечном промежутке времени и равной нулю при $t < 0$ и называемой *оригиналом*, сопоставляется функция $F(p)$ комплексного переменного $p = s + j\omega$, называемая *изображением*. Это сопоставление производится по формуле

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \tag{9}$$

которая представляет собой *прямое преобразование Лапласа* функции $f(t)$ и обозначается в виде:

$$F(p) = L[f(t)], \tag{10}$$

где $F(p)$ называют операторным изображением по Лапласу функции $f(t)$.

Согласно операторному методу вместо описания процессов интегро-дифференциальными уравнениями во временной области используется их описание более простыми алгебраическими уравнениями в операторной области (области изображений Лапласа). Решение таких уравнений позволяет найти операторные изображения искомых переходных токов и напряжений (оригиналов). Переход от изображений к оригиналам завершает решение задачи расчета переходных процессов.

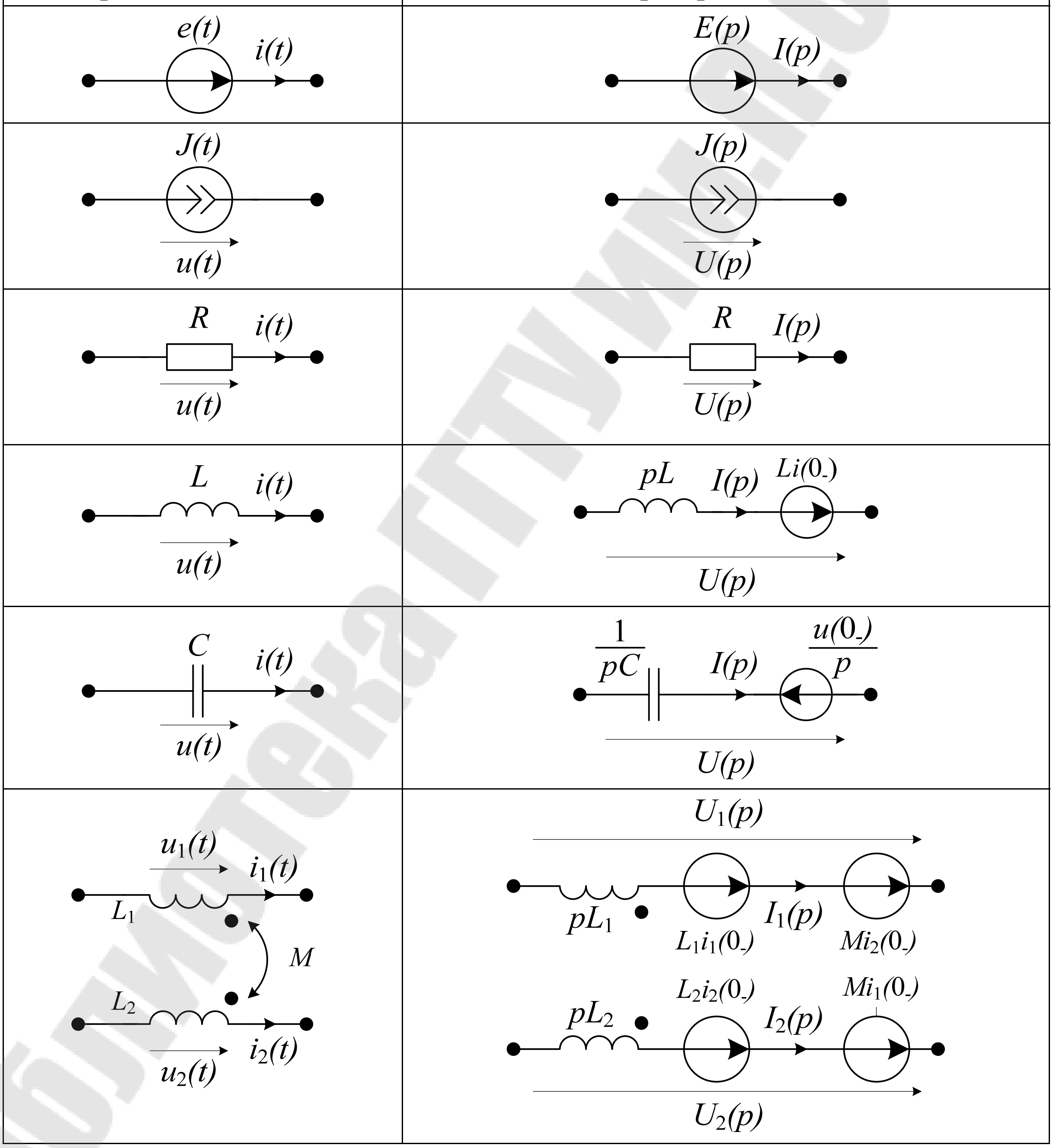
Рекомендуется следующая методика решения данной задачи операторным методом:

1. Рассчитывается режим в цепи, предшествующий коммутации; в результате определяются значения напряжений емкостных элементов и токов индуктивных элементов для момента $t = 0\_$.

2. По известной топологии цепи, ее параметрам, найденным значениям токов $i_L(0\_)$ и напряжений $i_C(0\_)$ с помощью соответствующих схем замещения элементов цепи во временной и операторной областях (табл. 1) составляется операторная схема замещения цепи.

Таблица 1

Временная область	**Операторная область**



3. По операторной схеме с использованием известных методов расчета цепей находятся операторные токи и напряжения искомых переменных. Отметим, что эти операторные функции можно найти и без составления операторной схемы замещения по интегродифференциальным уравнениям, составленным для их оригиналов во временной области, путем отображения их в операторную область.

4. По найденным изображениям находятся оригиналы – переходные токи и изображения во временной области.

Для перехода от изображения искомой функции $F(p)$ к ее оригиналу $f(t)$ можно использовать следующие три способа:

1. Непосредственное определение $f(t)$ по таблице соответствия оригиналов и изображений.

2. Представление рациональной дроби изображения

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \ldots + b_1 p + b_0} \tag{11}$$

в виде:

$$F(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \ldots + \frac{A_n}{p - p_n},$$

где A_k – так называемые неопределенные коэффициенты в случае $n > m$ и различия всех корней $p_{k,}$ $k = 1, 2, \ldots, n$ полинома $F_2(p)$. При этом искомая функция-оригинал будет иметь вид:

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \ldots + A_n e^{p_n t}.$$

3. Использование теоремы разложения, согласно которой в случае различия всех корней p_k полинома $F_2(p)$ оригинал изображения $F(p)$ (11) имеет вид:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}, \text{ где } F_2'(p_k) = \frac{dF_2(p_k)}{dp}. \tag{12}$$

Если при этом один из корней $F_2(p)$, для определенности первый, равен нулю, т. е. $F_2(p) = pF_3(p)$, то

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=2}^{n} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_3'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{13}$$

Если $F_2(p)$ имеет $\dfrac{n}{2}$ пар комплексно-сопряженных корней (здесь n – четное число), то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n/2} 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t}\right]. \qquad (14)$$

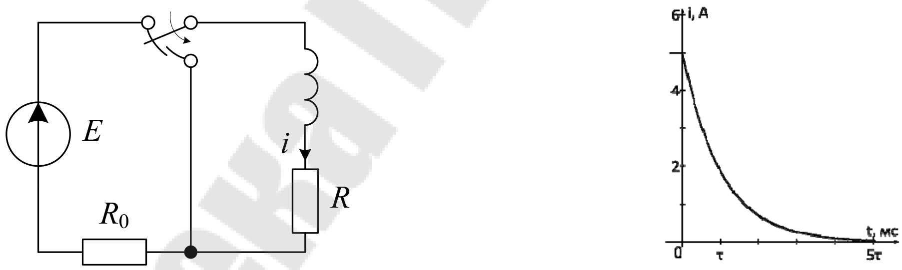
При наличии нулевого корня, т. е. $F_2(p) = pF_3(p)$:

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_3(0)} + \sum_{k=2}^{n/2} 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}\right]. \qquad (15)$$

Задачи с решениями

5.1. Переходные процессы в цепях первого порядка

Задача 5.1. Обмотка возбуждения электрической машины отключается от источника с ЭДС $E = 200$ В и внутренним сопротивлением $r_0 = 20$ Ом и закорачивается без разрыва цепи (рис. 5.1, *а*). Активное сопротивление и индуктивность обмотки соответственно равны $R = 20$ Ом и $L = 200$ мГн. Рассчитать и построить график зависимости тока $i(t)$.



а) *б*)

Рис. 5.1

Решение. Ток в обмотке до коммутации

$$i(0_-) = \frac{E}{(R + r_0)} = \frac{200}{(20 + 20)} = 5 \text{ А}.$$

По закону коммутации в момент времени $t = 0_+$ независимое начальное условие $i(0_+) = i(0_-) = 5$ А.

Дифференциальное уравнение для тока после коммутации

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0. \qquad (1)$$

Характеристическое уравнение

$$Lp+R=0$$

имеет один корень

$$p=\frac{-R}{L}=\frac{-20}{0{,}2}=-100\ \text{с}^{-1}.$$

Установившегося значения тока после коммутации нет, так как дифференциальное уравнение (1) однородное. Поэтому

$$i(t)=Ae^{pt}. \qquad (2)$$

Для вычисления постоянной интегрирования A запишем решение (2) для $t=0_+$, т. е. $i(0_+)=A=5$ А.

Таким образом, ток в обмотке возбуждения

$$i(t)=5e^{-100t}\ \text{А}.$$

График переходного тока $i(t)$ представлен на рис. 5.1, *б*.

Задача 5.2. Для ускорения процесса спада тока в обмотке возбуждения электрической машины с параметрами R и L ее присоединяют без разрыва цепи к резистору R_1 (рис. 5.2). Найти ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$ на обмотке, если известно, что $E=40$ В, $L=1$ Гн, $R=1$ Ом, $R_1=10$ Ом. Вычислить время t_1 спада тока до значения, равного 5 % начального; сравнить его с временем t_2 спада в случае $R_1=0$.

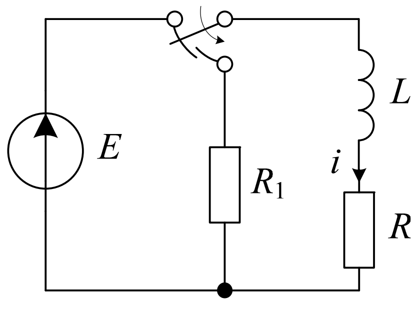


Рис. 5.2

Решение. Ток в обмотке возбуждения до коммутации

$$i(0_-) = \frac{E}{R} = \frac{40}{1} = 40 \text{ А}.$$

Следовательно, независимое начальное условие

$$i(0_+) = i(0_-) = 40 \text{ А}.$$

Дифференциальное уравнение для тока после коммутации

$$L\frac{di}{dt} + (R + R_1)i = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$Lp + (R + R_1) = 0$$

имеет корень:

$$p = -\frac{(R + R_1)}{L} = -\frac{(1+10)}{1} = -11 \text{ с}^{-1}.$$

Решение однородного дифференциального уравнения, как и в задаче 5.1, имеет вид:

$$i(t) = Ae^{pt}.$$

В момент коммутации справедливо равенство $i(0_+) = A = 40$ А. Ток и напряжение на обмотке возбуждения соответственно будут равны:

$$i(t) = 40e^{-11t} \text{ А}; \; u(t) = -R_1 i(t) = -10 \cdot 40e^{-11t} = -400e^{-11t} \text{ В}.$$

Время спада тока до значения, равного 5 % начального, найдем из уравнения

$$0{,}05 \cdot 40 = 40e^{-11t_1},$$

откуда $t_1 = -\dfrac{\ln 0{,}05}{(-11)} = 0{,}272$ с.

При $R_1 = 0$ корень характеристического уравнения $p = -1 \text{ с}^{-1}$ и ток $i(t) = 40e^{-1t}$ А. Время спада тока получим из уравнения

$$0{,}05 \cdot 40 = 40e^{-1t_2},$$

откуда $t_2 = -\ln 0{,}05 = 2{,}99$ с.

Таким образом, чем больше сопротивление R_1, тем быстрее спадает ток. Однако чрезмерно увеличивать это сопротивление нельзя, поскольку начальное напряжение на обмотке $u(0) = -R_1 i(0_+)$ может быть больше допустимой величины и произойдет пробой изоляции обмотки.

Задача 5.3. Для измерения сопротивления $R_к$ обмотки индуктивной катушки постоянному току собрана цепь по рис. 5.3. Показание приборов: амперметра – 2 А; вольтметра – 5 В. Определить начальное напряжение на вольтметре $u_V(0_+)$ при размыкании ключа, если сопротивление вольтметра $r_V = 1500$ Ом.

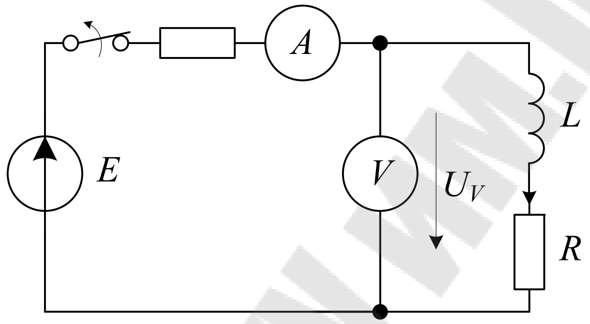


Рис. 5.3

Решение. В установившемся режиме до размыкания ключа сопротивление индуктивной катушки и ток в ней соответственно равны:

$$R_к = \frac{U_V}{I_A} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ Ом}; \; I_к = I_A \frac{R_V}{R_Y + R_к} = 2\frac{1500}{1500 + 2{,}5} = 1{,}9967 \text{ А}.$$

В момент размыкания ключа по закону коммутации

$$i_к(0_+) = i_к(0_-) = 1{,}9967 \text{ А}.$$

Следовательно, напряжение на вольтметре в момент $t = 0_+$:

$$U_V = -R_V i(0_+) = -1500 \cdot 1{,}9967 = -2995 \text{ В}.$$

Задача 5.4. К зажимам обмотки возбуждения генератора постоянного тока, имеющей $R = 50$ Ом и $L = 150$ Гн, подключен вольтметр с сопротивлением $R_V = 2000$ Ом (рис. 5.4). Напряжение сети $U = 250$ В. Во сколько раз увеличится напряжение на зажимах вольтметра, если цепь внезапно отключить от источника?

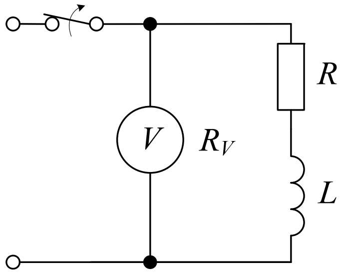


Рис. 5.4

Решение. Ток в цепи после коммутации изменяется по закону

$$i = \frac{U}{R} e^{-t/\tau} = \frac{250}{50} e^{-t/\tau} = 5e^{-t/\tau} \text{ А},$$

где

$$\tau = \frac{L}{(R + R_V)} = \frac{150}{(50 + 2000)} = 0{,}07317 \text{ с}.$$

В момент отключения катушки напряжение на вольтметре (при $t = 0_+$):

$$U_V = R_V i(0_+) = 2000 \cdot 5 = 10\,000 \text{ В},$$

т. е. в 40 раз превышает допустимое для вольтметра значение.

Замечание. Из решения задач 5.3 и 5.4 следует, что при определенных условиях мгновенные значения переходного напряжения на вольтметрах значительно превышают допустимые величины и могут привести к повреждению изоляции приборов. Поэтому перед подобными коммутациями вольтметры следует отсоединять.

Задача 5.5. Найти законы изменения тока $i_1(t)$ и напряжения $u_L(t)$ в цепи (рис. 5.5, *а*), если $R_1 = R_2 = R_3 = 5$ Ом, $L = 10$ мГн, $E = 15$ В. Построить графики рассчитанных функций.

Решение

1. $t = 0_-$, $i_L(0_-) = 0$, независимое начальное условие нулевое: по закону коммутации

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.$$

Следовательно, зависимое начальное условие для искомого тока

$$i_1(0_+) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{15}{5 + 5} = 1{,}5 \text{ А}.$$

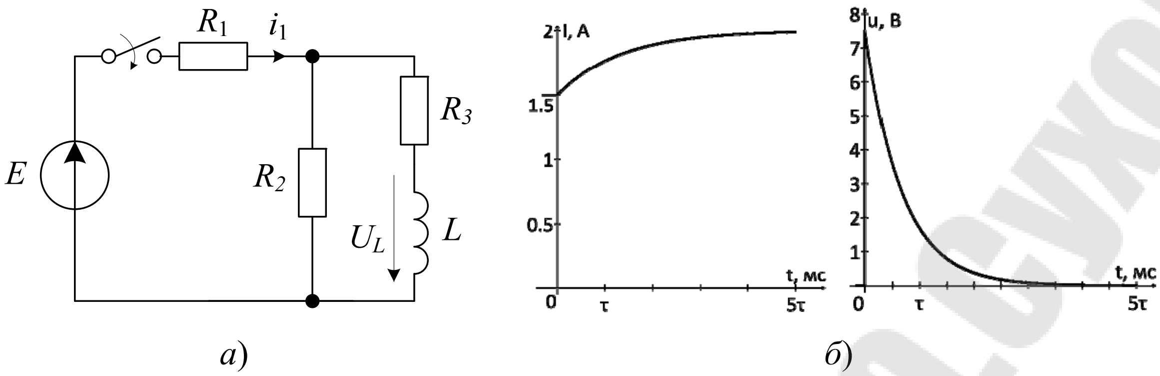


Рис. 5.5

2. В установившемся режиме после коммутации $(t \to \infty)$:

$$i_{1\,\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{15}{5 + \dfrac{5 \cdot 5}{5+5}} = 2\ \text{А};\ u_{L\,\text{пр}} = 0.$$

3. Решение классическим методом:

$$i_1(t) = i_{1\,\text{пр}} + i_{1\,\text{св}} = 2 + Ae^{pt};$$

$$u_L(t) = u_{L\,\text{пр}} + u_{L\,\text{св}} = 0 + Be^{pt}.$$

4. Характеристическое уравнение и его корень:

$$Z(p) = Lp + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 10 \cdot 10^{-3} p + 5 + \frac{5 \cdot 5}{5+5} = 0; \quad p = -750\,1/\text{с}.$$

5. $t \geq 0.$ Уравнения Кирхгофа для цепи после коммутации:

$$i_1(t) - i_2(t) - i_L(t) = 0, \quad R_1 i_1(t) + R_2 i_2(t) = E, \quad u_L(t) = E - R_1 i_1(t) - R_3 i_L(t).$$

В момент $t = 0_+$:

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) + i_L(0_+) = i_2(0_+) + 0;$$

$$E = R_1 i_1(0_+) + R_2 i_2(0_+) = i_1(0_+)(R_1 + R_2) \;\Rightarrow\; i_1(0_+) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 1{,}5\ \text{А};$$

$$u_L(0_+) = E - R_1 i_1(0_+) - R_3 i_l(0_=) = 15 - 5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5\ \text{В}.$$

$$i_1(0_+) = 2 + A = 1{,}5 \;\Rightarrow\; A = -0{,}5;$$

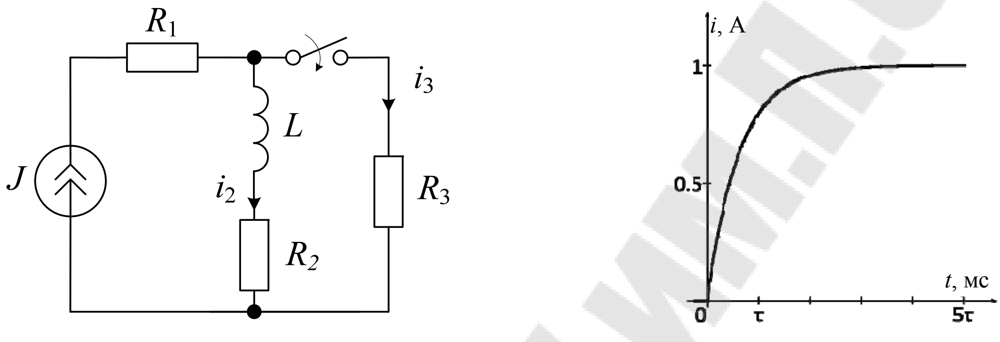
$$u_L(0_+) = 0 + B = 7{,}5 \quad \Rightarrow \quad B = 7{,}5.$$

6. Окончательно:

$$i_1(t) = 2 - 0{,}5e^{-750t}\ \text{А};\ u_L(t) = 7{,}5e^{-750t}\ \text{В}.$$

Графики $i_1(t)$ и $u_L(t)$ приведены на рис. 5.5, *б*.

Задача 5.6. В цепи (рис. 5.6, *а*) $J = 2$ А, $L = 0{,}1$ Гн, $R_1 = R_2 = R_3 = 4$ Ом. Определить ток $i_3(t)$ в цепи после коммутации и построить его график.



а) *б*)

Рис. 5.6

Решение

1. $t = 0_-$. Так как $i_2(0_-) = J$ – независимое начальное условие ненулевое: по закону коммутации

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = J = 2\ \text{А}.$$

2. $t \to \infty$. В установившемся режиме после коммутации:

$$i_{2\text{пр}} = \frac{J}{2} = 1\ \text{А};\ u_{L\text{пр}} = 0.$$

3. Решение классическим методом:

$$i_3(t) = i_{3\,\text{пр}} + i_{3\,\text{св}} = 1 + Ae^{pt}.$$

4. Характеристическое уравнение и его корень:

$$Z(p) = Lp + R_2 + R_3 = 0; \qquad p = -\frac{(R_2 + R_3)}{L} = \frac{-8}{0{,}1} = -80\ \text{с}^{-1}.$$

5. $t \geq 0$. В цепи после коммуникации:

$$J = i_2(t) + i_3(t).$$

В момент $t = 0_+$:

$$J = i_2(0_+) + i_3(0_+) = J + i_3(0_+) \;\; \Rightarrow \;\; i_3(0_+) = 0;$$

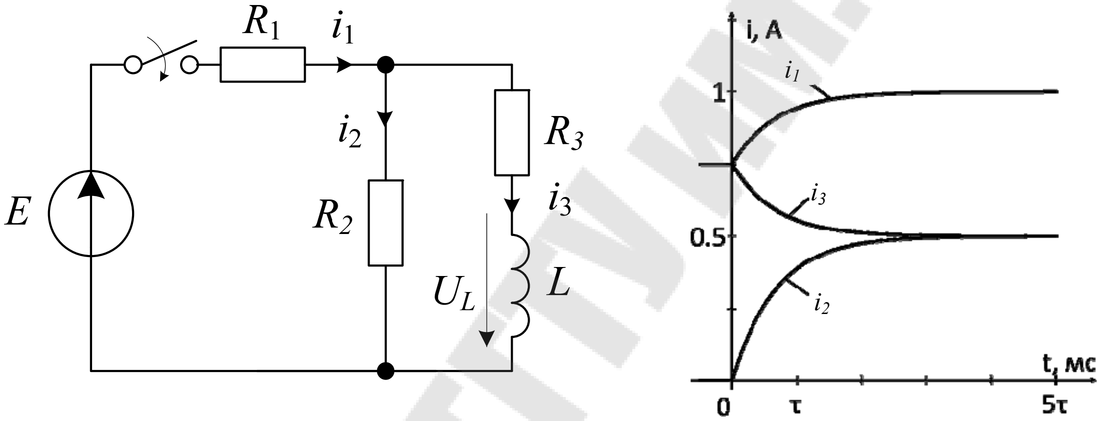
$$i_3(0_+) = 1 + A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -1.$$

6. Окончательно:

$$i_3(t) = 1 - 1e^{-80t} \text{ А.}$$

График $i_3(t)$ приведен на рис. 5.6, *б*.

Задача 5.7. В цепи (рис. 5.7) E = 150 В, $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ Ом, $L = 100$ мГн. Определить переходные токи во всех ветвях цепи после замыкания ключа.



а) *б*)

Рис. 5.7

Решение

1. $t = 0\_$. По закону коммутации независимое начальное условие

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = 0.$$

Начальные условия токов $i_1(0_+)$ и $i_3(0_+)$ – зависимые и равные:

$$i_1(0_+) = i_2(0_+) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{150}{100 + 100} = 0{,}75 \text{ А.}$$

2. Решение будем искать в виде:

$$i_1(t) = i_{1\text{пр}} + i_{1\text{св}}; \; i_2(t) = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}}; \; i_3(t) = i_{3\text{пр}} + i_{3\text{св}}.$$

3. $t \to \infty$. В установившемся режиме после коммутации:

$$i_{1\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{150}{100 + \dfrac{100 \cdot 100}{100 + 100}} = 1 \text{ А};$$

$$i_{2\text{пр}} = i_{1\text{пр}} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 1 \frac{100}{100 + 100} = 0{,}5 \text{ А}; \; i_{3\text{пр}} = i_{1\text{пр}} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0{,}5 \text{ А}.$$

4. Характеристическое уравнение

$$Lp + \left(R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right) = 0$$

имеет один корень (–):

$$p = -\frac{\dfrac{R_2 + R_1 R_3}{(R_1 + R_3)}}{L} = -\frac{\dfrac{100 + 100 \cdot 100}{(100 + 100)}}{0{,}1} = -1500 \text{ с}^{-1},$$

т. е. свободные составляющие токов:

$$i_{1\text{св}} = Ae^{p_1 t}; \; i_{2\text{св}} = Be^{p_1 t}; \; i_{3\text{св}} = Ce^{p_1 t}.$$

При этом токи:

$$i_1(t) = 1 + Ae^{p_1 t}; \; i_2(t) = 0{,}5 + Be^{p_1 t}; \; i_3(t) = 0{,}5 + Ce^{p_1 t}.$$

В частности, при $t = 0_+$ токи:

$$i_1(0) = 1 + A = 0{,}75 \;\Rightarrow\; A = -0{,}25 \text{ А};$$

$$i_2(0) = 0{,}5 + B = 0{,}75 \;\Rightarrow\; B = -0{,}25 \text{ А};$$

$$i_3(0) = 0{,}5 + C = 0 \;\Rightarrow\; C = -0{,}5 \text{ А}.$$

Таким образом, токи:

$$i_1(t) = 1 - 0{,}25e^{-1500t} \text{ А}; \; i_2(t) = 0{,}5 + 0{,}25e^{-1500t} \text{ А};$$

$$i_3(t) = 0{,}5 - 0{,}5e^{-1500t} \text{ А}.$$

Соответствующие зависимости представлены на рис. 5.7, *б*.

Задача 5.8. В схеме (рис. 5.8) $U = 100$ В, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $L = 15$ мГн. Рассчитать переходные токи $i_1(t)$ и $i_L(t)$.

Решение

1. $t = 0_{-}$. По закону коммутации независимое начальное условие

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.$$

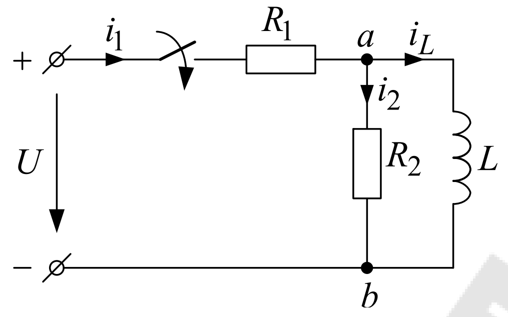


Рис. 5.8

2. Решение будем искать в виде:

$$i_1(t) = i_{1\text{пр}} + i_{1\text{св}};\ i_L(t) = i_{L\text{пр}} + i_{L\text{св}}.$$

3. $t \to \infty$. Поскольку задана цепь постоянного тока, в установившемся режиме участок ab после коммутации закорочен идеальной катушкой: $R_{ab} = 0$. Поэтому принужденные составляющие искомых токов

$$i_{1\text{пр}} = i_{L\text{пр}} = \frac{U}{R_1} = \frac{100}{20} = 5\text{А}.$$

4. Характеристическое уравнение цепи после коммутации, составленное по отношению к воображаемому разрыву в этой цепи ветви с катушкой (рис. 5.9), имеет вид:

$$Z_{b'b''}(p) = pL + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0. \tag{2}$$

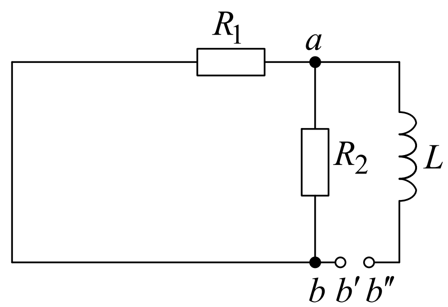


Рис. 5.9

Подставляя числовые данные условия в уравнение (2), получаем:

$$0{,}015p + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 0{,}015p + 12 = 0,$$

откуда

$$p = p_1 = -\frac{12}{0{,}015} = -800\,\text{c}^{-1}.$$

Так как характеристический корень единственный, свободные составляющие всех переходных характеристик цепи имеют вид $A\,e^{p_1 t}$:

$$i_{L_{\text{св}}}(t) = A_L e^{-800t}.$$

Возвращаясь к (1), получаем:

$$i_L(t) = 5 + A_L e^{-800t}. \tag{3}$$

Постоянную интегрирования A_L найдем, воспользовавшись начальным условием. По первому закону коммутации:

$$i_L(-0) = i_L(+0). \tag{4}$$

Рассматривая цепь до коммутации, находим:

$$i_L(-0) = 0. \tag{5}$$

С другой стороны, из (3) получаем:

$$i_L(+0) = 5 + A_L. \tag{6}$$

Используя (4)–(6), находим:

$$A_L = -5,$$

следовательно,

$$i_L(t) = 5(1 - e^{-800t}),\ \text{А}. \tag{7}$$

Тогда

$$i_1 = i_2 + i_L = \frac{U_{ab}}{R} + i_L = \frac{1}{R} L \frac{di_L}{dt} + i_L = 5 - 3e^{-800t},\ \text{А}.$$

Задача 5.9. Определить токи i_1 и i_2 и напряжение u_C после коммутации в схеме (рис. 5.10), если $E = 50$ В, $J = 0{,}5$ А, $R_1 = 200$ Ом, $R_2 = 300$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, $C = 4$ мкФ.

Решение. Полагаем, что:

$$u_C = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}};\ i_1 = i_{1\text{пр}} + i_{1\text{св}};\ i_2 = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}}.$$

В установившемся режиме:

$$i_{1\text{пр}} = J = 0{,}5\ \text{А},\ i_{2\text{пр}} = 0,\ u_{C\text{пр}} = E + JR_1 = 150\ \text{В}.$$

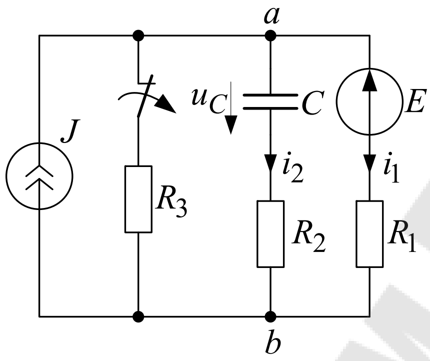


Рис. 5.10

Характеристическое уравнение для цепи после коммутации

$$\frac{1}{Cp} + \left(R_1 + R_2\right) = 0 \Rightarrow C(R_1 + R_2)p + 1 = 0$$

имеет один корень: $p_1 = -500\ \text{с}^{-1}$.

Поэтому свободные составляющие:

$$u_{C\text{св}} = Ae^{p_1 t},\ i_{1\text{св}} = B_1 e^{p_1 t},\ i_{2\text{св}} = B_2 e^{p_1 t},$$

а искомые величины:

$$u_C(t) = 150 + Ae^{p_1 t},\ i_1(t) = 0{,}5 + B_1 e^{p_1 t},\ i_2(t) = B_2 e^{p_1 t}. \quad (1)$$

Для вычисления постоянных интегрирования A, B_1 и B_2 определим начальные условия. Из (1) для $t = 0_+$ имеем:

$$u_C(0_+) = 150 + A;\ i_1(0_+) = 0{,}5 + B_1;\ i_2(0_+) = B_2.$$

Независимым начальным условием является величина

$$u_C(+0) = u_C(-0) = u_{ab}(-0) = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + J}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{\dfrac{50}{200} + 0{,}5}{\dfrac{1}{200} + \dfrac{1}{200}} = 75\ \text{В}.$$

Начальные значения токов в ветвях найдем из уравнений Кирхгофа, записанных для момента времени $t = 0_+$:

$$J = i_1(0_+) + i_2(0_+);\ u_C(0_+) + R_2 i_2(0_+) - R_1 i_1(0_+) = E\,.$$

Таким образом,

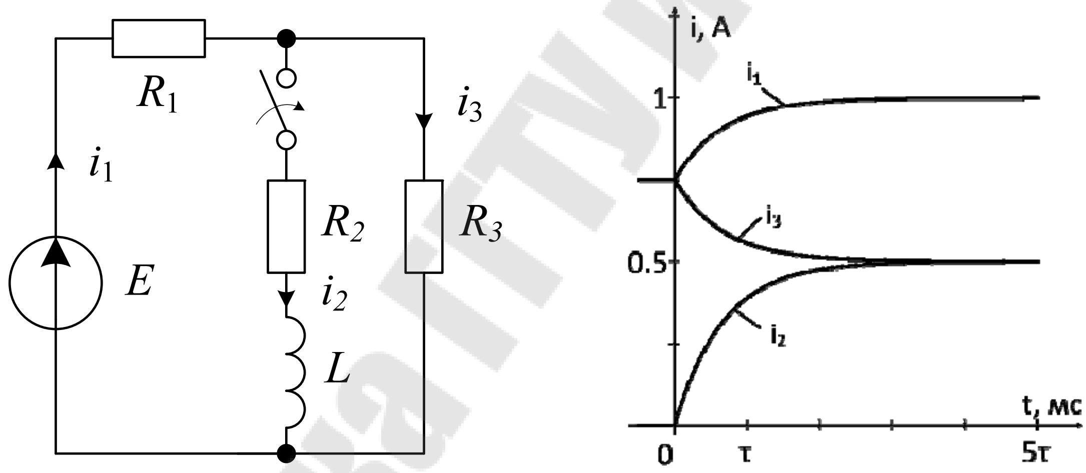
$$i_2(0_+) = 0{,}15\ \text{А};\ i_1(0_+) = 0{,}35\ \text{А},$$

откуда $A = -75$ В; $B_1 = -0{,}15$ А; $B_1 = 0{,}15$ А.

В итоге:

$$u_C = 150 - 75e^{-500t}\ \text{В};\ i_1 = 0{,}5 - 0{,}15e^{-500t}\ \text{А};\ i_2 = 0{,}15e^{-500t}\ \text{А}.$$

Задача 5.10. Определить переходные токи во всех ветвях цепи (рис. 5.11, *а*) при замыкании ключа во второй ветви. Известно, что $E = 150$ В, $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ Ом, $L = 0{,}1$ Гн.



а) *б*)

Рис. 5.11

Решение

1. $t = 0_-$. В установившемся режиме до коммутации:

$$i_2(0_-) = 0\,,\ i_1(0_-) = i_3(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{150}{100 + 100} = 0{,}75\ \text{А}.$$

2. По закону коммутации независимое начальное условие

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = 0\,. \qquad (1)$$

Тогда зависимые начальные условия:

$$i_1(0_+) = i_3(0_+) = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{150}{100 + 100} = 0{,}75\ \text{А}. \qquad (2)$$

3. Решение для каждого из переходных токов в соответствии с классическим методом расчета ищем в виде:

$$i_1(t) = i_{1\text{пр}} + i_{1\text{св}};\ i_2(t) = i_{2\text{пр}} + i_{2\text{св}};\ i_3(t) = i_{3\text{пр}} + i_{3\text{св}}.$$

В установившемся режиме токи:

$$i_{1\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{150}{100 + \dfrac{100 \cdot 100}{100 + 100}} = 1\ \text{А};$$

$$i_{2\text{пр}} = i_{1\text{пр}} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 1\frac{100}{200} = 0{,}5\ \text{А};\ i_{3\text{пр}} = i_{1\text{пр}} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 1\frac{100}{200} = 0{,}5\ \text{А}.$$

4. Характеристическое уравнение

$$Lp + \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right) = 0$$

имеет один корень:

$$p_1 = -\frac{\dfrac{R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_3}}{L} = -1500\ \text{с}^{-1},$$

т. е. свободные составляющие токов:

$$i_{1\text{св}} = Ae^{p_1 t};\quad i_{2\text{св}} = Be^{p_1 t};\quad i_{3\text{св}} = Ce^{p_1 t}.$$

При этом токи:

$$i_1(t) = 1 + Ae^{p_1 t};\ i_2(t) = 0{,}5 + Be^{p_1 t};\ i_3(t) = 0{,}5 + Ce^{p_1 t}.$$

В частности, при $t = 0$ токи:

$$i_1(0) = 1 + A;\ i_2(0) = 0{,}5 + B;\ i_3(0) = 0{,}5 + C.$$

С учетом найденных ранее начальных условий (1) и (2) получим:

$$A = -0{,}25\ \text{А};\ B = -0{,}5\ \text{А};\ \text{C} = 0{,}25\ \text{А}.$$

Таким образом, переходные токи в ветвях цепи (рис. 5.10) будут равны:

$$i_1(t) = 1 - 0{,}25e^{-1500t} \text{ А}; \; i_2(t) = 0{,}5 - 0{,}5e^{-1500t} \text{ А};$$

$$i_3(t) = 0{,}5 + 0{,}25e^{-1500t} \text{ А}.$$

Задача 5.11. В цепи (рис. 5.12) $R_1 = R_2 = 10$ Ом, $L = 0{,}0318$ Гн, $E = 200$ В, $e(t) = 100\sqrt{2}\sin(314t + 150°)$ В.

Рассчитать ток $i_2(t)$ после переключения рубильника из положения *1* в положение *2* в момент $t = 0$ (переключение происходит мгновенно и без разрыва контура, с индуктивным элементом).

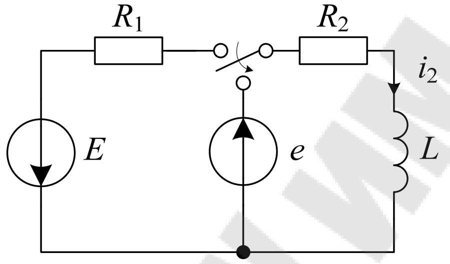


Рис. 5.12

Решение

1. $t = 0_-$. В установившемся режиме до переключения рубильника $i_2(0_-)$ был равен:

$$i_2(0_-) = -\frac{E}{R_1 + R_2} = -\frac{200}{10 + 10} = -10 \text{ А}.$$

По закону коммутации независимое начальное условие

$$i_2(0_+) = i_2(0_-) = -10 \text{ А}. \qquad (1)$$

2. $t \to \infty$. Установившийся режим после коммутации; источник синусоидальный, расчет ведется символическим методом.

Согласно условию:

$$\underline{E}_m = 100\sqrt{2}e^{j150°} \text{В}; \; X_L = \omega L = 314 \cdot 0{,}0318 = 10 \text{ Ом}.$$

$$\underline{I}_{2m} = \frac{\underline{E}_m}{R_2 + JX_L} = \frac{100\sqrt{2}e^{j150°}}{10 + j10} = 10e^{j105°} \text{А}; \; i_{2\text{пр}}(t) = 10\sin(\omega t + 105°) \text{ А}.$$

3. В соответствии с классическим методом расчета

$$i_2(t) = i_{2\text{пр}}(t) + i_{2\text{св}}(t) = 10\sin(\omega t + 105^\circ) + Ae^{pt}.$$

4. Характеристическое уравнение и его корень:

$$Z(p) = R_2 + Lp = 0 \;\Rightarrow\; p = \frac{-R_2}{L} - = \frac{-10}{0{,}0318} = -314{,}5\,1/\text{с}.$$

5. $t \geq 0$. В частности, в момент $t = 0_+$:

$$i_2(0_+) = 10\sin 105^\circ + A = -10; \;\Rightarrow\; A = -10 - 10\sin 105^\circ = -19{,}66\text{ В}.$$

6. Окончательно:

$$i_2(t) = 10\sin(\omega t + 105^\circ) - 19{,}66e^{-j314{,}5t}\text{ А}.$$

Задача 5.12. Найти ток переходного процесса $i(t)$ в индуктивной катушке (рис. 5.13) при $e = 150\sin(2500t + 45^\circ)$, $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 4$ мкФ.

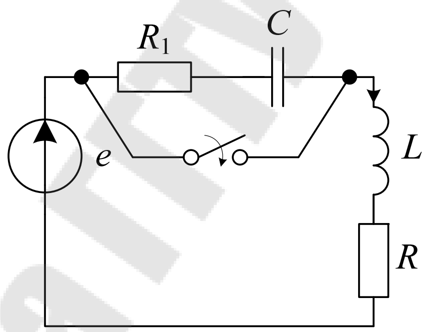


Рис. 5.13

Решение

1. В установившемся режиме до коммутации:

$$X_L = \omega L = 2500 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 100\text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2500} 4 \cdot 10^{-6} = 100\text{ Ом}.$$

Комплексная амплитуда тока

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R_1 + R_2 + jX_L - jX_C} = \frac{150e^{j45^\circ}}{30 + 20 + j100 - j100} = 3e^{j45^\circ}\text{ А}$$

и его мгновенное значение

$$i(t) = 3\sin(\omega t + 45°)\ \text{А}.$$

Следовательно, при $t = 0$ ток $i(0_-) = 3\sin 45° = 2{,}12$ А. Наконец, по закону коммутации $i(0_+) = i(0_-) = 2{,}12$ А.

2. В установившемся режиме после коммутации комплексная амплитуда тока и его принужденное значение будут соответственно равны:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R_2 + jX_L} = \frac{150e^{j45°}}{20 + j100} = 1{,}47e^{-j33{,}7°}\ \text{А};$$

$$i_{\text{пр}} = 1{,}47\sin(\omega t - 33{,}7°)\ \text{А}.$$

3. В соответствии с классическим методом расчета

$$i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t) = 1{,}47\sin(\omega t - 33{,}7°) + Ae^{pt},$$

где p – корень характеристического уравнения $Lp + R_2 = 0$:

$$p = \frac{-R_2}{L} = \frac{-20}{0{,}04} = -500\ 1/\text{с}.$$

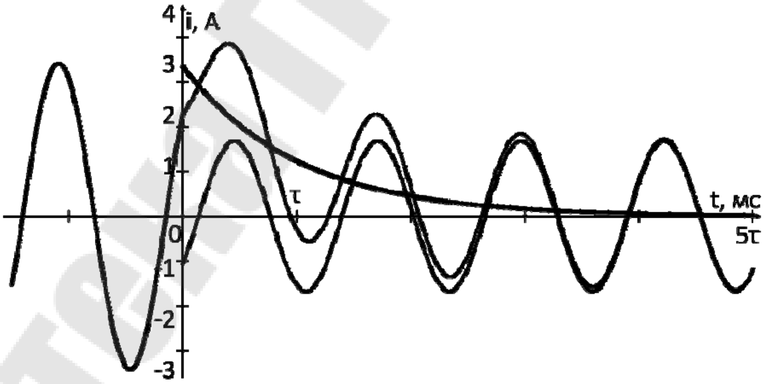


Рис. 5.14

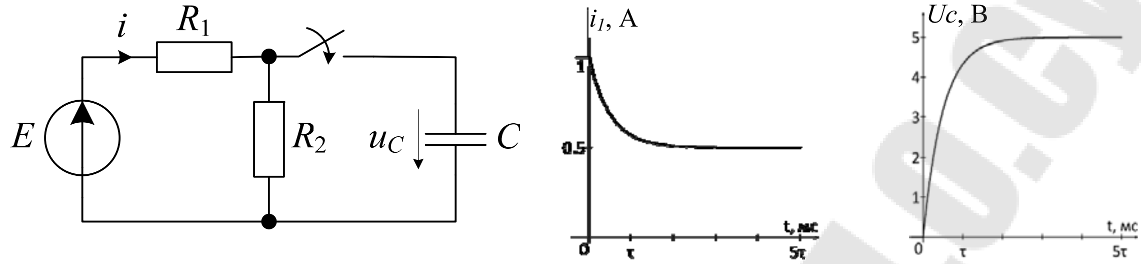
5. В момент $t = 0_+$:

$$i(0_+) = 1{,}47\sin(-33{,}7°) + A = 2{,}12\ \text{А},$$

откуда $A = 2{,}94$ А.

6. Окончательно: $i(t) = 1{,}47\sin(\omega t - 33{,}7°) + 2{,}94e^{-500t}$ А.

Задача 5.13. В цепи (рис. 5.14, *а*) $E = 10$ В, $C = 1$ мкФ, $R_1 = R_2 = 10$ Ом. Конденсатор емкостью C разряжен. Определить ток $i_1(t)$ и напряжение $u_C(t)$ после коммутации и построить графики этих функций.



а) *б*)

Рис. 5.15

Решение

1. $t = 0_-$. В установившемся режиме до коммутации напряжение $u_C(0_-) = 0$. По закону коммутации независимое начальное условие нулевое, т. е.

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0.$$

2. $t \to \infty$, в соответствии со схемой цепи:

$$i_{1\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{10}{10+10} = 0{,}5 \text{ А}; \; u_{C\text{пр}} = i_{1\text{пр}} R_2 = 0{,}5 \cdot 10 = 5 \text{ В}.$$

3. Решение ищем в виде:

$$i_1(t) = i_{1\text{пр}} + i_{1\text{св}} = 0{,}5 + Ae^{pt}; \; u_C(t) = 5 + Be^{pt}.$$

4. Характеристическое уравнение и его корень:

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{pC} + \frac{10 \cdot 10}{10+10} = \frac{1}{pC} + 5 = 0;$$

$$p = \frac{-1}{5C} = -\frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} = -2 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

5. $t \geq 0$. По второму закону Кирхгофа для цепи после коммутации:

$$R_1 i_1(t) + u_C(t) = E, \; \Rightarrow \; i_1(t) = \frac{E - u_C(t)}{R_1}.$$

В момент $t = 0_+$:

$$i_1(0_+) = \frac{E - u_C(0_+)}{R_1} = \frac{10 - 0}{10} = 1 \text{ А}.$$

Постоянные интегрирования:

$$i_1(0_+) = 0{,}5 + A = 1 \Rightarrow A = 0{,}5 \text{ А}; \; u_C(0_+) = 5 + B = 0 \Rightarrow B = -5 \text{ В}.$$

Окончательно:

$$i_1(t) = 0{,}5 + 0{,}5e^{-2\cdot 10^5 t} \text{ А}; \quad u_C(t) = 5 - 5e^{-2\cdot 10^5 t} \text{ В}.$$

Соответствующие кривые приведены на рис. 5.14, *б*.

Задача 5.14. Найти ток $i_1(t)$ после замыкания ключа в цепи (рис. 5.16), если $E = 120$ В, $R_1 = R_2 = 250$ Ом, $R_2 = 500$ Ом, $C = 10$ мкФ.

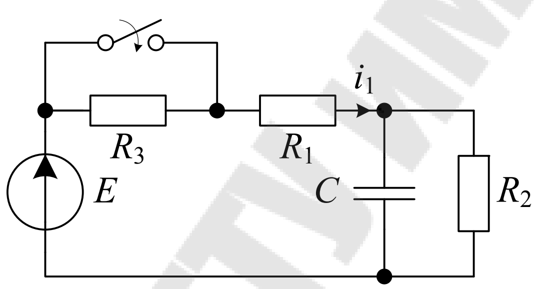


Рис. 5.16

Решение

1. $t = 0_-$. В установившемся режиме до коммутации:

$$u_C(0_-) = R_2 i_1(0_-) = R_2 \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = 250 \frac{120}{250 + 250 + 500} = 30 \text{ В}.$$

Независимое начальное условие:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 30 \text{ В}.$$

2. В установившемся режиме после замыкания ключа $(t \to \infty)$:

$$i_{1\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{120}{250 + 250} = 0{,}24 \text{ А}.$$

3. $i_1(t) = i_{1\text{пр}} + i_{1\text{св}} = 0{,}24 + Ae^{pt}$.

4. Характеристическое уравнение

$$Z(p)=\frac{1}{pC}+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{1}{pC}+\frac{250\cdot 250}{250+250}=\frac{1}{pC}+125=0$$

и его корень:

$$p=-\frac{1}{125C}=-\frac{1}{125\cdot 10\cdot 10^{-6}}=-800\ 1/\text{с}.$$

5. По аналогии с предыдущей задачей:

$$i_1(t)=\frac{E-u_C(t)}{R_1};$$

$$i_1(0_+)=\frac{E-u_C(0_+)}{R_1}=\frac{120-30}{250}=0{,}36\text{ А};$$

$$i_1(0_+)=0{,}24+A=0{,}36 \;\Rightarrow\; A=0{,}12\text{ А}.$$

6. Ответ: $i_1(t)=0{,}24+0{,}12e^{-800t}$ А.

Задача 5.15. Найти закон изменения тока $i_2(t)$ и напряжения $u_C(t)$ в цепи (рис. 5.17) после замыкания ключа, если $E=15$ В, $R_1=5$ Ом, $R_2=R_3=10$ Ом, $R=15$ Ом, $C=100$ мкФ.

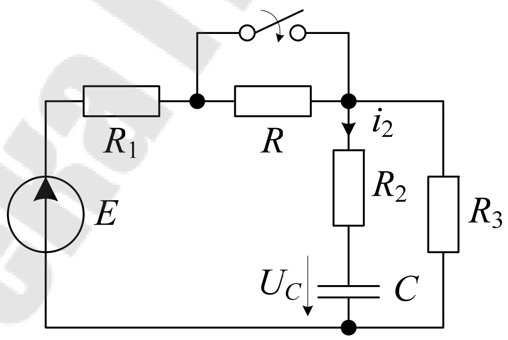


Рис. 5.17

Решение

1. $t=0\_$. В установившемся режиме до коммутации:

$$i_1(0\_)=\frac{E}{R_1+R+R_3}=\frac{15}{5+15+10}=0{,}5\text{ А};$$

$$u_C(0\_)=R_3 i_1(0\_)=10\cdot 0{,}5=5\text{ В}.$$

Независимое начальное условие

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 5 \text{ В}.$$

Зависимое начальное условие $i_2(0_+)$ может быть определено путем решения следующей системы уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа для момента времени $t = 0_+$:

$$\left.\begin{aligned} i_1(0_+) \quad - i_2(0_+) - i_3(0_+) &= 0, \\ R_1 i_1(0_+) + R_2 i_2(0_+) &= E - u_C(0_+), \\ R_1 i_1(0_+) + R_3 i_3(0_+) &= E. \end{aligned}\right\}$$

После подстановки исходных данных и решения получим:

$$i_2(0_+) = 0{,}375 \text{ А}.$$

2. $t \to \infty$. В установившемся режиме после коммутации:

$$i_{1\text{пр}} = i_{3\text{пр}} = \frac{E}{R_1 + R_3} = \frac{15}{5+10} = 1 \text{ А}, \; u_{C\text{пр}} = R_3 i_{3\text{пр}} = 10 \cdot 1 = 10 \text{ В}, \; i_{2\text{пр}} = 0.$$

3. Решение классическим методом:

$$i_2(t) = i_{2\text{св}}(t) = Ae^{pt}; \; u_C(t) = u_{C\text{пр}} + u_{C\text{св}} = 10 + Be^{pt}.$$

4. Корень характеристического уравнения:

$$Z_{\text{вх}}(p) = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{1}{pC} = 0 \;\Rightarrow\; p = -750 \text{ 1/с}.$$

5. Определим постоянные интегрирования:

$$i_2(0_+) = A = 0{,}375 \text{ А}; \; u_C(0_+) = 10 + B = 5 \;\Rightarrow\; B = -5 \text{ В}.$$

6. Таким образом,

$$i_2(t) = 0{,}375e^{-750t} \text{ А}; \; u_C(t) = 10 - 5e^{-750t} \text{ В}.$$

Задача 5.16. В цепи (рис. 5.18) определить закон изменения тока после коммутации, если $R_1 = R_2 = 2$ Ом, $\omega L = 3$ Ом, $e(t) = 127\sin(\omega t - 50°)$ В, $\omega = 314$ рад/с.

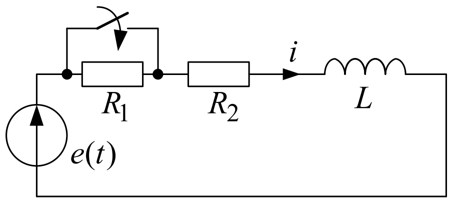


Рис. 5.18

Решение

1. $t = 0_-$ режим до коммутации: ключ разомкнут, режим установившийся. Источник синусоидальный, расчет проводим символическим методом.

Комплексная амплитуда тока

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R_1 + R_2 + j\omega L} = \frac{127e^{-j50^\circ}}{2 + 2 + j3} = 25{,}4e^{-j86{,}9^\circ} \text{ А}.$$

Следовательно, мгновенное значение этого тока до коммутации:

$$i(t) = 25{,}4\sin(\omega t - 86{,}9^\circ) \text{ А}.$$

В момент коммутации (при $t = 0$):

$$i(0_-) = 25{,}4\sin(-86{,}9^\circ) = -25{,}36 \text{ А}.$$

Согласно закону коммутации

$$i(0_-) = i(0_+) = -25{,}36 \text{ А}.$$

2. $t \to \infty$, режим после коммутации: ключ замкнут, режим установившийся. Источник синусоидальный; расчет ведем символическим методом:

$$\underline{I}_{m\text{пр}} = \frac{\underline{E}_m}{R_2 + j\omega L} = \frac{127e^{-j50^\circ}}{2 + j3} = 35{,}2e^{-j106{,}3^\circ} \text{ А};$$

$$i_{\text{пр}}(t) = 35{,}2\sin(\omega t - 106{,}3^\circ) \text{ А}.$$

3. $i(t) = i_{\text{пр}}(t) + i_{\text{св}}(t) = 35{,}2\sin(\omega t - 106{,}3^\circ) + Ae^{pt}$.

4. Характеристическое уравнение цепи после коммутации

$$pL + R_2 = 0,$$

корень которого равен:

$$p = -\frac{R_2}{L} = -\frac{R_2\omega}{\omega L} = -\frac{2 \cdot 314}{3} = -210 \text{ с}^{-1}.$$

5. Определение постоянной интегрирования:

$$i(0_+) = i_{пр}(0_+) + i_{св}(0_+) = 35{,}2\sin(-106{,}3^{\circ}) + A = i(0_-) = -25{,}36;$$

$$-33{,}8 + A = -25{,}36 \text{ А} \Rightarrow \quad A = 8{,}44.$$

6. Ответ: $i(t) = 35{,}2\sin(\omega t - 106{,}3°) + 8{,}44e^{-210t}$ А.

Задача 5.17. Определить напряжения на емкостях в схеме (рис. 5.19), если $e = 123\sin(100t - 43^{\circ})$ В, $R_1 = 500$ Ом, $R_2 = 400$ Ом, $C_1 = 20$ мкФ, $C_2 = 30$ мкФ.

Решение

1. $t = 0_-$, до коммутации в цепи протекал синусоидальный ток, комплексная амплитуда которого равна:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R_1 + R_2 - \dfrac{j}{\omega C'}}, \qquad (1)$$

где $\underline{E}_m = 123e^{-j43^{\circ}}$ В, $C' = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \dfrac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12$ мкФ, $\omega = 100$ рад/с.

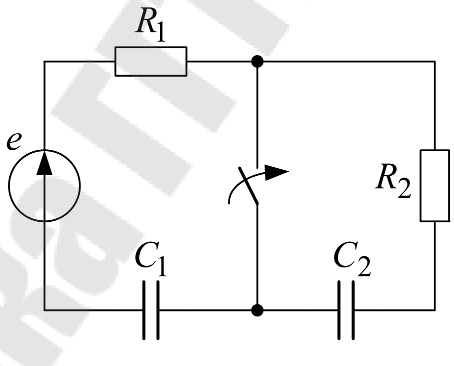


Рис. 5.19

Подставляя в (1) числовые значения, находим:

$$\underline{I}_m = \frac{123e^{-j43^{\circ}}}{500 + 400 - j833{,}3} = \frac{123e^{-j43^{\circ}}}{1226{,}5e^{-j43^{\circ}}} = 0{,}1 \text{ А}.$$

Пользуясь законом Ома, находим комплексные амплитуды напряжений на емкостях:

$$\underline{U}_{C_{1m}} = -jX_{C_1}\underline{I}_m = \frac{-j}{\omega C_1}\underline{I}_m = \frac{-j}{100\cdot 20\cdot 10^{-6}}0{,}1 = -j50 = 50e^{-j90^\circ}\ \text{В};$$

$$\underline{U}_{C_{2m}} = -jX_{C_2}\underline{I}_m = \frac{-j}{\omega C_2}\underline{I}_m = \frac{-j}{100\cdot 30\cdot 10^{-6}}0{,}1 = -j33{,}3 = 33{,}3\text{e}^{-j90^\circ}\text{В}.$$

Следовательно, до коммутации:

$$u_{C_1}(t) = 50\sin(\omega t - 90^\circ),\ \text{В};\ u_{C_2}(t) = 33{,}3\sin(\omega t - 90^\circ),\ \text{В}.$$

Отсюда

$$u_{C_1}(0_-) = -50\ \text{В};\ u_{C_2}(0_-) = -33{,}3\ \text{В}. \qquad (2)$$

После коммутации от цепи отключаются последовательно соединенные элементы R_2 и C_2, образующие при замыкании ключа обособленный контур, в котором разряжается емкость C_2:

$$u_{C_2y} = 0.$$

Через емкость C_1 после коммутации в установившемся режиме протекает ток с амплитудой

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R_1 - \dfrac{j}{\omega C_1}} = \frac{123e^{-j43^\circ}}{500 - j500} = \frac{123e^{-j43^\circ}}{707{,}1e^{-j45^\circ}} = 0{,}174e^{j2^\circ}\,\text{А}.$$

Следовательно,

$$\underline{U}_{C_{1m}} = -\frac{j}{\omega C_1}\underline{I}_m = \frac{-j}{100\cdot 20\cdot 10^{-6}}0{,}174e^{j2^\circ} = 87e^{-j88^\circ}\,\text{В}.$$

Это означает, что в установившемся режиме

$$u_{C_1}(t) = u_{C_{1\text{y}}} = 87\sin(\omega t - 88^\circ),\ \text{В}.$$

Коммутация превращает заданную докоммутационную цепь в две независимые цепи, в которых протекают независимые переходные процессы. Для каждой из послекоммутационных цепей мы составляем свое характеристическое уравнение:

$$\frac{1}{p_1 C_1} + R_1 = 0;\ \frac{1}{p_2 C_2} + R_2 = 0. \qquad (3)$$

Из (3) находим:

$$p_1 = -\frac{1}{R_1C_1} = -\frac{1}{500 \cdot 20 \cdot 10^{-6}} = -100 \text{ с}^{-1};$$

$$p_2 = -\frac{1}{R_2C_2} = -\frac{1}{400 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = -83{,}3 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$u_{C_{1\text{св}}} = A_1 e^{p_1 t} = A_1 e^{-100\,t};\; u_{C_{2\text{св}}} = A_2 e^{p_2 t} = A_2 e^{-83{,}3t},$$

откуда

$$u_{C_1}(t) = A_1 e^{-100\,t} + 87\sin(\omega t - 88^\circ), \text{ В};\; u_{C_2}(t) = A_2 e^{-83{,}3t}. \qquad (4)$$

Чтобы определить постоянные A_1 и A_2, воспользуемся начальными условиями. По второму закону коммутации:

$$u_{C_1}(-0) = u_{C_1}(+0);\;\; u_{C_2}(-0) = u_{C_2}(+0). \qquad (5)$$

Из (4) следует, что

$$u_{C_1}(+0) = A_1 + 87\sin(-88^\circ),\;\; u_{C_2}(+0) = A_2. \qquad (6)$$

Объединяя (2), (4)–(6), находим:

$$A_1 = 37 \text{ В},\;\; A_2 = -33{,}3 \text{ В}.$$

В итоге

$$u_{C_1}(t) = 37e^{-100t} + 87\sin(\omega t - 88^\circ), \text{ В};\;\; u_{C_2}(t) = -33{,}3e^{-83{,}3t}, \text{ В}.$$

5.2. Переходные процессы в цепях второго порядка

Задача 5.18. Определить токи i_1 и i_2 в схеме цепи (рис. 5.20), если $E = 60$ В, $L_1 = 0{,}6$ Гн, $L_2 = 0{,}5$ Гн, $M = 0{,}45$ Гн, $R_1 = 50$ Ом, $R_2 = R_3 = 20$ Ом.

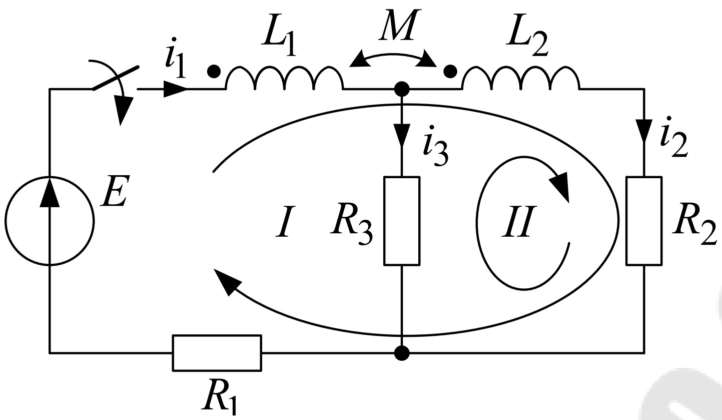


Рис. 5.20

Решение. Докоммутационные токи $i_1(-0) = 0$, $i_2(-0) = 0$. Следовательно,

$$i_1(0) = 0;\ i_2(0) = 0.$$

После коммутации:

$$i_1 = i_{1\text{у}} + i_{1\text{св}};\quad i_2 = i_{2\text{у}} + i_{2\text{св}},$$

где $i_{1\text{у}} = \dfrac{E}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = 1\ \text{А};\ i_{2\text{у}} = i_{1\text{у}}\ \dfrac{R_3}{R_2 + R_3} = 0{,}5\ \text{А}.$

Чтобы получить характеристическое уравнение, составим главный определитель цепи, выбрав контуры *I* и *II*, как показано на рис. 5.19, и заменим $j\omega$ на p:

$$\begin{vmatrix} R_1 + R_2 + p(L_1 + L_2 + 2M) & R_2 + p(L_2 + M) \\ R_2 + p(L_2 + M) & R_2 + R_3 + pL_2 \end{vmatrix}.$$

Приравняв этот определитель нулю, получим характеристическое уравнение

$$p^2 + 790p + 24615 = 0.$$

Оно имеет действительные корни $p_1 = -33\ \text{с}^{-1}$, $p_2 = -757\ \text{с}^{-1}$, поэтому свободные составляющие токов запишем в виде:

$$i_{1\text{св}} = A_1 e^{-33t} + A_2 e^{-757t};\ i_{2\text{св}} = B_1 e^{-33t} + B_2 e^{-757t}.$$

Найдем начальные значения свободных составляющих токов в индуктивностях:

$$i_{1св}(0) = i_1(0) - i_{1у}(0) = -1\ \text{А};\ i_{2св}(0) = i_2(0) - i_{2у}(0) = -0{,}5\ \text{А}.$$

Составим систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$\left.\begin{aligned} & i_{1св}(0) = A_1 + A_2; \\ & \left.\frac{di_{1св}}{dt}\right|_0 = -33A_1 - 757A_2; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} & i_{2св}(0) = B_1 + B_2; \\ & \left.\frac{di_{2св}}{dt}\right|_0 = -33B_1 - 757B_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Уравнения Кирхгофа для свободных составляющих имеют вид:

$$-i_{1св} + i_{2св} + i_{3св} = 0;$$

$$R_1 i_{1св} + L_1\frac{di_{1св}}{dt} + M\frac{di_{2св}}{dt} + R_3 i_{3св} = 0;$$

$$L_2\frac{di_{2св}}{dt} + M\frac{di_{1св}}{dt} + R_2 i_{2св} - R_3 i_{3св} = 0,$$

и, в частности, для начального момента времени ($t = 0$):

$$-i_{1св}(0) + i_{2св}(0) + i_{3св}(0) = 0;$$

$$R_1 i_{1св}(0) + L_1\left.\frac{di_{1св}}{\mathrm{d}t}\right|_0 + M\left.\frac{di_{2св}}{\mathrm{d}t}\right|_0 + R_3 i_{3св}(0) = 0;$$

$$L_2\left.\frac{di_{2св}}{dt}\right|_0 + M\left.\frac{di_{1св}}{dt}\right|_0 + R_2 i_{2св}(0) - R_3 i_{3св}(0) = 0.$$

Отсюда находим зависимые начальные условия:

$$\left.\frac{di_{1св}}{dt}\right|_0 = 308\ \text{А/с};\ \left.\frac{di_{2св}}{dt}\right|_0 = -277\ \text{А/с}.$$

Из систем уравнений (1) и (2) находим: $A_1 = –0{,}62$ А; $A_2 = –0{,}38$ А; $B_1 = –0{,}905$ А; $B_2 = 0{,}405$ А.

Искомые токи:

$$i_1 = 1 - 0{,}62e^{-33t} - 0{,}38e^{-757t} \text{ А; } i_2 = 0{,}5 - 0{,}905e^{-33t} + 0{,}405e^{-757t} \text{ А.}$$

Задача 5.19. Цепь (рис. 5.21) подключается к источнику постоянного напряжения $U = 125$ В. Найти напряжение на конденсаторе для трех случаев: 1) $R = 250$ Ом, $L = 667$ мГн, $C = 2$ мкФ; 2) $R = 100$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 1$ мкФ; 3) $R = 100$ Ом, $L = 40$ мГн, $C = 5$ мкФ.

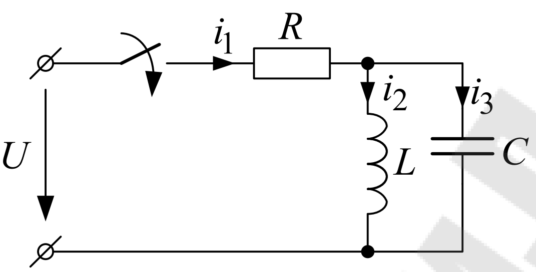


Рис. 5.21

Решение. Напряжение на конденсаторе

$$u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\text{св}}. \tag{1}$$

При этом $u_{C\text{у}} = 0$, так как в послекоммутационной цепи конденсатор коротко замкнут идеальной катушкой.

Характеристическое уравнение цепи

$$Z(p) = R + \frac{pL\dfrac{1}{pC}}{pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2LC + 1} = 0 \tag{2}$$

имеет два корня:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} - \frac{1}{LC}}. \tag{3}$$

Далее задачу решаем в такой последовательности.

Для каждого из трех заданных случаев из (3) определим вид корней и в соответствии с ним найдем $u_{C\text{св}}$. Для определения постоянных интегрирования составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i_2 + i_3, \; U = Ri_1 + u_C. \tag{4}$$

Запишем независимые начальные условия:

$$u_C(-0) = u_C(+0) = 0; \tag{I}$$

$$i_2(-0) = i_2(+0) = 0. \tag{II}$$

Подставим их в уравнения (4) для начального момента времени (после коммутации):

$$i_1(+0) = i_2(+0) + i_3(+0), \quad U = Ri_1(+0) + u_C(+0). \tag{5}$$

Решив их, находим $i_3(+0)$. Затем, используя зависимость $i_3 = C\dfrac{du_C}{dt}$ для момента $t = +0$, получим:

$$i_3(+0) = C\left.\frac{du_C}{dt}\right|_{t=+0}. \tag{6}$$

В завершение определим две неизвестные постоянные интегрирования:

1. Подставим в уравнение (3) числовые значения ***первого случая***:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\cdot 250\cdot 2\cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot 250\cdot 2\cdot 10^{-6}}\right) - \frac{1}{667\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-6}}} =$$

$$= (-1000 \pm 500)\ \text{с}^{-1},\ \text{т. е.}\ p_1 = -500\ \text{с}^{-1};\ p_2 = -1500\ \text{с}^{-1}.$$

Так как корни действительные и различные:

$$u_{C_{\text{св}}} = A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t}. \tag{7}$$

Из уравнения (5) с учетом начальных условий (I) и (II) получим:

$$i_1(+0) = i_2(+0) + i_3(+0) = 0 + i_3(+0);$$

$$U = Ri_1(+0) + u_C(+0) = 250 i_1(+0) + 0 = 125.$$

Решая эту систему уравнений, находим:

$$i_3(+0) = 0{,}5\ \text{А}.$$

Далее записываем:

$$u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\text{св}} = 0 + A_1 e^{-500t} + A_2 e^{-1500t};$$

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt} = 2\cdot 10^{-6}(-500A_1e^{-500t} - 1500A_2e^{-1500t}).$$

Перепишем эти уравнения для момента $t = +0$ и подставим в них $u_C(+0) = 0$ и $i_3(+0) = 0{,}5$ А. Получим:

$$0 = A_1 + A_2;\quad 0{,}5 = -10^{-3}A_1 - 3\cdot 10^{-3}A_2.$$

Отсюда

$$A_1 = -A_2 = 250.$$

Таким образом, по (1) и (7) искомое напряжение

$$u_C = u_{C\text{св}} = (250e^{-500t} - 250e^{-1500t})\ \text{В}. \qquad (8)$$

Теперь вычислим все токи:

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt} = 2\cdot 10^{-6}\frac{d}{dt}(250e^{-500t} - 250e^{-1500t}) =$$
$$= (0{,}75e^{-1500t} - 0{,}25e^{-500t})\ \text{А};$$

$$i_1 = \frac{U - u_C}{R} = \frac{125 - (250e^{-500t} - 250e^{-1500t})}{250} = (0{,}5 - e^{-500t} + e^{-1500t})\ \text{А};$$

$$i_2 = i_1 - i_3 = (0{,}5 - 0{,}75e^{-500t} + 0{,}25e^{-1500t})\ \text{А}.$$

2. Подставим в формулу (3) числовые значения ***второго случая***:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\cdot 100\cdot 1\cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot 100\cdot 1\cdot 10^{-6}}\right) - \frac{1}{40\cdot 10^{-3}\cdot 1\cdot 10^{-6}}} =$$
$$= -5\cdot 10^{3}\ \text{с}^{-1}.$$

Характеристический корень – двукратный, поэтому решение ищем в виде:

$$u_{C\text{св}} = B_1e^{-5000t} + B_2te^{-5000t}. \qquad (9)$$

Как и в первом случае, из уравнения (5) с учетом начальных условий (I) и (II) находим:

$$i_3(+0) = 1{,}25\ \text{А}.$$

Подставив в уравнение (1) и в выражение i_3 уравнение (9), получим:

$$u_C = u_{Cy} + u_{C\text{св}} = 0 + B_1 e^{-5000t} + B_2 t e^{-5000t};$$

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt} = 10^{-6}(B_2 - 5000B_1 - 5000B_2 t)e^{-5000t}.$$

Полагая в этих уравнениях $t = 0$ и подставляя в полученные выражения значения $u_C(0) = 0$ и $i_3(0) = 1{,}25$ А, приходим к уравнениям:

$$0 = B_1;\ 1{,}25 = 10^{-6}(B_2 - 5000B_1).$$

Следовательно, $B_1 = 0$; $B_2 = 1{,}25\cdot 10^6$. Таким образом, искомое напряжение по (1) и (9):

$$u_C = u_{C\text{св}} = 1{,}25\cdot 10^6 t e^{-5000t}\ \text{В}.$$

3. Рассмотрим ***третий случай*** числовых значений.

Подставляя эти значения в уравнение (3), находим:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2\cdot 100\cdot 5\cdot 10^{-6}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot 100\cdot 5\cdot 10^{-6}}\right) - \frac{1}{40\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-6}}} =$$
$$= (-1000 \pm j2000)\ \text{с}^{-1}.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные ($p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$), поэтому свободную составляющую напряжения на конденсаторе следует искать в виде

$$u_{C\text{св}} = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \psi) = Ae^{-1000t}\sin(2000t + \psi). \qquad (10)$$

По аналогии с предыдущими случаями из уравнений (5) с учетом начальных условий (I) и (II) получим: $i_3(0) = 1{,}25$ А.

Подставив в (1) и в выражение i_3 уравнение (10), получим:

$$u_C = u_{C\text{у}} + u_{C\text{св}} = 0 + Ae^{-1000t}\sin(2000t + \psi);$$

$$i_3 = C\frac{du_C}{dt} = 5\cdot 10^{-6} A\left[2000\cos(2000t + \psi) - 1000\sin(2000t + \psi)\right]e^{-1000t}.$$

Переписывая эти уравнения для момента $t = +0$ и подставляя в них значения $u_C(0) = 0$ и $i_3(0) = 1{,}25$ А, получим:

$$0 = 5\cdot 10^{-6} A\sin\psi;\ 1{,}25 = 5\cdot 10^{-6}(2000A\cos\psi - 1000A\sin\psi).$$

Решая их, находим:

$$\psi = 0,\ A = 125.$$

Таким образом, по (1) и (10) искомое напряжение

$$u_C = 125e^{-1000t}\sin 2000t \text{ В}.$$

Задача 5.20. Решить задачу 5.19 операторным методом.

Решение. Поскольку заданная цепь содержит только один источник ЭДС, для ее расчета можно применить закон Ома в операторном виде:

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)},$$

где $U(p)$ – изображение входного напряжения:

$$U(p) = \frac{U}{p}.$$

Найдем операторное сопротивление цепи:

$$Z(p) = R + \frac{pL\dfrac{1}{pC}}{pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{RLCp^2 + Lp + R}{p^2LC + 1}.$$

Тогда

$$I_1(p) = \frac{U(p)}{Z(p)} = \frac{U(p^2LC + 1)}{p(RLCp^2 + Lp + R)}.$$

Изображение напряжения на конденсаторе получим, умножая изображение тока на операторное сопротивление участка с параллельным соединением ветвей:

$$U_C(p) = I_1(p)\frac{pL\dfrac{1}{pC}}{pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{U}{RC\left(p^2 + p\dfrac{1}{RC} + \dfrac{1}{LC}\right)} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \qquad (1)$$

где

$$F_1(p) = \frac{U}{RC},\ F_2(p) = p^2 + \frac{1}{RC}p + \frac{1}{LC} = (p - p_1)(p - p_2). \qquad (2)$$

Уравнение $F_2(p)=0$ имеет корни:

$$p_{1,2}=-\frac{1}{2RC}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2-\frac{1}{LC}}. \qquad (3)$$

1. Решим задачу для ***первого варианта*** числовых значений.

По формулам (2) и (3) определяем:

$$F_1(p)=\frac{125}{(250\cdot 2\cdot 10^{-6})}=0{,}25\cdot 10^6;$$

$$F_2(p)=p^2+p\frac{1}{250\cdot 2\cdot 10^{-6}}+\frac{1}{667\cdot 10^{-3}\cdot 2\cdot 10^{-6}}=p^2+2000p+0{,}75\cdot 10^6.$$

Найдем корни уравнения $F_2(p)=p^2+2000p+0{,}75\cdot 10^6=0$:

$$p_1=-500\ \text{с}^{-1};\ \ p_2=-1500\ \text{с}^{-1}.$$

Вычислим производную $F_2'(p)$ и ее значения при $p=p_1$ и $p=p_2$:

$$F_2'(p)=2p+2000;$$

$$F_2'(p_1)=2(-500)+2000=1000;$$

$$F_2'(p_2)=2(-1500)+2000=-1000.$$

По формуле (1) определяем:

$$U_C(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{0{,}25\cdot 10^6}{p^2+2000p+0{,}75\cdot 10^6}.$$

По формуле разложения

$$U_C(p)=\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}e^{p_2t}=\frac{0{,}25\cdot 10^6e^{-500t}}{1000}+\frac{0{,}25\cdot 10^6e^{-1500t}}{-1000}=$$

$$=250(e^{-500t}-e^{-1500t})\ \text{В}.$$

2. Решим задачу для ***второго варианта*** числовых значений.

По формулам (2) и (3) определяем:

$$F_1(p)=\frac{125}{100\cdot 1\cdot 10^{-6}}=1{,}25\cdot 10^6;\qquad F_2(p)=(p+5000)^2;$$

$$p_1 = p_2 = -5000\ \text{с}^{-1}.$$

Изображение напряжения на конденсаторе:

$$U_C(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{1{,}25\cdot 10^6}{(p+5000)^2}.$$

Так как корни кратные (порядок кратности $m_k = m_1 = 2$):

$$\frac{F_2(p)}{(p-p_1)^{m_k}} = \frac{(p+5000)^2}{(p+5000)^2} = 1.$$

Таким образом,

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \doteq \left[\frac{d}{dp}\frac{F_1(p)e^{pt}}{1}\right]_{p=p_1} = \left[\frac{d}{dp}(1{,}25\cdot 10^6 e^{p_1 t})\right]_{p=p_1} =$$

$$= (1{,}25\cdot 10^6 te^{pt})_{p=p_1} = 1{,}25\cdot 10^6 te^{-5000t} = u_C(t).$$

3. Рассмотрим ***третий вариант*** числовых значений.

По формулам (2) и (3) находим:

$$F_1(p) = \frac{125}{100\cdot 5\cdot 10^{-6}} = 0{,}25\cdot 10^6;\ F_2(p) = p^2 + 2000p + 5\cdot 10^6;$$

$$p_{1,2} = -1000 \pm j2000\ \text{с}^{-1}.$$

Производная от $F_2(p)$ и ее значения при $p = p_1$ и $p = p_2$ равны:

$$F_2'(p) = 2p + 2000;$$

$$F_2'(p_1) = 2(-1000 + j2000) + 2000 = j4000;$$

$$F_2'(p_2) = 2(-1000 - j2000) + 2000 = -j4000.$$

Искомый оригинал имеет вид:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{0{,}25\cdot 10^6}{p^2 + 2000p + 5\cdot 10^6} \doteq \frac{0{,}25\cdot 10^6}{j4000}e^{(-1000+j2000)t} + \frac{0{,}25\cdot 10^6}{-j4000}e^{(-1000-j2000)t} =$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[0{,}25\cdot 10^6 e^{-1000t}\ \frac{e^{j2000t}}{4000e^{j90^\circ}}\right] = \frac{2\cdot 0{,}25\cdot 10^6 e^{-1000t}}{4000}\cos(2000t - 90^\circ) =$$

$$= 125e^{-1000t}\sin 2000t = u_C(t).$$

Задача 5.21. Рассчитать операторным методом ток i_C в схеме (рис. 5.22), если $J = 3$ А, $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 8$ Ом, $C = 100$ мкФ.

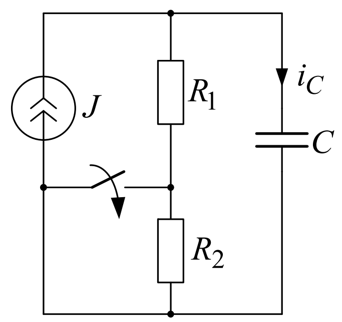


Рис. 5.22

Решение. До коммутации:

$$i_C = 0,$$

$$u_C = (R_1 + R_2)J = (12 + 8)3 = 60 \text{ В}.$$

Следовательно,

$$u_C(+0) = u_C(-0) = 60 \text{ В}.$$

Операторная схема замещения послекоммутационной цепи представлена на рис. 5.23.

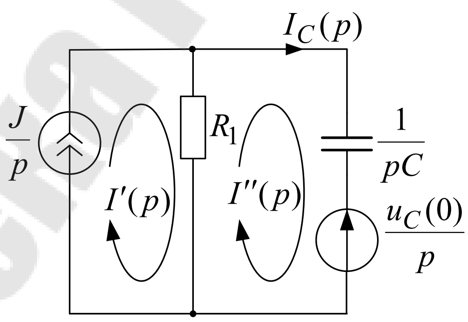


Рис. 5.23

Для этой схемы:

$$\begin{cases} I'(p) = \dfrac{J}{p}, \\ I''(p)\left(R_1 + \dfrac{1}{pC}\right) - R_1 I'(p) = -\dfrac{U_C(0)}{p}. \end{cases}$$

Отсюда

$$I''(p)=\frac{R_1J-U_C(0)}{R_1\left(p+\dfrac{1}{R_1C}\right)}=\frac{12\cdot 3+60}{12\left(p+\dfrac{1}{12\cdot 100\cdot 10^{-6}}\right)}=-\frac{2}{p+833{,}3}.$$

Поскольку

$$i_C(t)\doteq I''(p),$$

окончательно получаем:

$$i_C(t)=-2e^{-833{,}3t},\ \text{А}.$$

Задача 5.22. В схеме (рис. 5.24) происходит замыкание ключа. Определить операторным методом ток i_3, если $E=200$ В, $J=1$ А, $L=0{,}5$ Гн, $C=400$ мкФ, $R_1=100$ Ом, $R_2=100$ Ом.

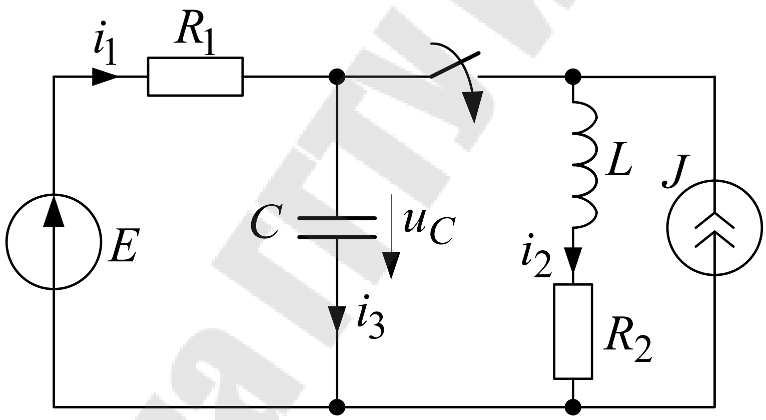


Рис. 5.24

Решение. До коммутации:

$$i_2(-0)=J=1\ \text{А};\ u_C(-0)=E=200\ \text{В}.$$

В установившемся режиме после коммутации токи целесообразно рассчитать методом наложения:

$$i_{1_у}=\frac{E}{R_1+R_2}-J\frac{R_2}{R_1+R_2}=\frac{200}{100+100}-\frac{100}{100+100}=0{,}5\ \text{А};$$

$$i_{2\text{у}} = \frac{E}{R_1 + R_2} + J\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{200}{100+100} + \frac{100}{100+100} = 1{,}5 \text{ А};$$

$$i_{3\text{у}} = 0; \qquad u_{C\text{у}} = R_2 i_{2\text{у}} = 100 \cdot 1{,}5 = 150 \text{ В}.$$

По законам коммутации:

$$i_2(+0) = i_2(-0) = 1 \text{ А}; \quad u_C(+0) = u_C(-0) = 200 \text{ В}.$$

Следовательно, начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости соответственно равны:

$$i_{2\text{св}}(0) = i_2(0) - i_{2\text{у}}(0) = 1 - 1{,}5 = -0{,}5 \text{ А};$$

$$u_{C\text{св}}(0) = u_C(0) - u_{C\text{у}}(0) = 200 - 150 = 50 \text{ В}.$$

Составим эквивалентную операторную схему замещения для свободных составляющих (рис. 5.25).

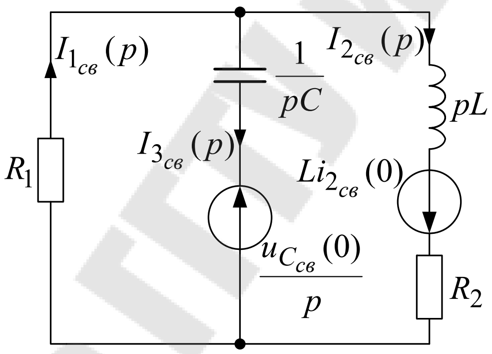


Рис. 5.25

Для этой схемы находим операторное изображение искомого тока:

$$I3_{\text{св}}(p) = \frac{-p\left[R_1 LC i_{2\text{св}}(0) + LC u_{C\text{св}}(0)\right] - (R_1 + R_2) C u_{C\text{св}}(0)}{p^2 R_1 LC + p(R_1 R_2 C + L) + (R_1 + R_2)} =$$

$$= \frac{-4}{p^2 \cdot 0{,}02 + p \cdot 4{,}5 + 200} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Решая уравнение $F_2(p) = 0$, т. е.

$$p^2 \cdot 0{,}02 + p \cdot 4{,}5 + 200 = 0,$$

находим характеристические корни: $p_1 = -61\ \text{с}^{-1}$; $p_2 = -164\ \text{с}^{-1}$.

Оригинал искомого тока найдем по теореме разложения:

$$i_{3\text{св}} = \frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)} e^{p_2 t},$$

где $F_2'(p) = 0{,}04p + 4{,}5$. Имеем:

$$i_3 = i_{3\text{св}} = 1{,}942 e^{-61t} + 1{,}942 e^{-164t},\ \text{А}.$$

Задача 5.23. Операторным методом найти ток i_2 после коммутации в схеме (рис. 5.26), если $J(t) = 2\sin(2500t + 30°)$ А, $C = 1$ мкФ, $L = 0{,}2$ Гн, $R = 100$ Ом.

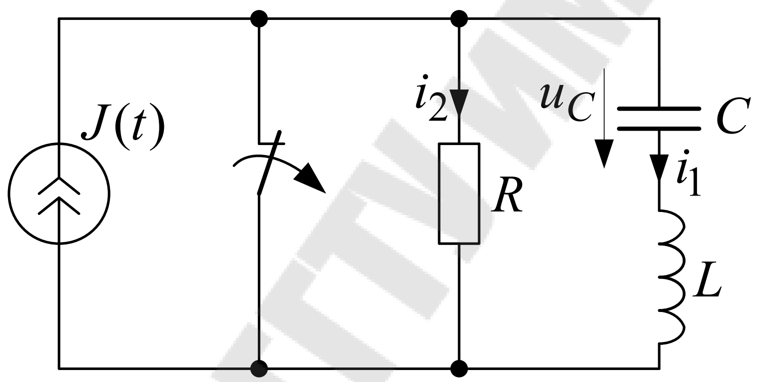


Рис. 5.26

Решение. До коммутации:

$$i_1(-0) = 0;\ u_C(-0) = 0.$$

В установившемся режиме после коммутации комплексы амплитуд искомых величин равны:

$$\underline{I}_{1m} = \underline{J}_m \frac{R}{R + j(X_L - X_C)} = 2e^{j30°} \frac{100}{100 + j(500 - 400)} = 1{,}414 e^{-j15°}\,\text{А};$$

$$\underline{I}_{2m} = \underline{J}_m \frac{j(X_L - X_C)}{R + j(X_L - X_C)} = 2e^{j30°} \frac{j(500 - 400)}{100 + j(500 - 400)} = 1{,}414 e^{j75°}\ \text{А};$$

$$\underline{U}_{Cm} = -jX_C \cdot \underline{I}_{1m} = 400 e^{-j90°} \cdot 1{,}414 e^{-j15°} = 565{,}7 e^{-j105°}\,\text{В}.$$

Следовательно, мгновенные значения искомых величин выражаются равенствами:

$$i_{1\text{у}} = 1{,}414\sin(2500t - 15°),\ \text{А};\ \ i_{2\text{у}} = 1{,}414\sin(2500t + 75°),\ \text{А};$$

$$u_{C\text{у}} = 565{,}7\sin(2500t - 105°),\ \text{А}.$$

По законам коммутации:

$$i_1(0) = i_1(-0) = 0;\ \ u_C(0) = u_C(-0) = 0\,.$$

Следовательно, начальные значения свободных составляющих тока в индуктивности и напряжения на емкости соответственно равны:

$$i_{1\text{св}}(0) = i_1(0) - i_{1\text{у}}(0) = 0 - 1{,}414\sin(-15°) = 0{,}366\ \text{А};$$

$$u_{C\text{св}}(0) = u_C(0) - u_{C\text{у}}(0) = 0 - 565{,}7\sin(-105°) = 546\ \text{В}.$$

Эквивалентная операторная схема для свободных составляющих представлена на рис. 5.27.

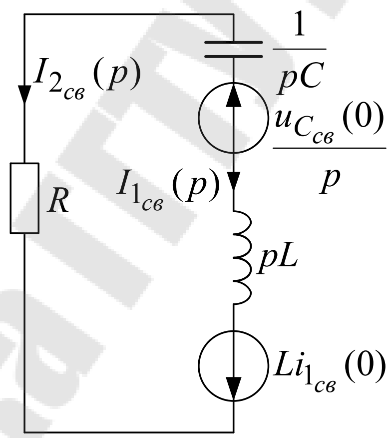


Рис. 5.27

В этой схеме $i_{1\text{св}}(0) = 0{,}366$ А; $u_{C\text{св}}(0) = 546$ В.

Из схемы (рис. 5.27) следует, что

$$I_{2\text{св}}(p) = \frac{\dfrac{u_{C\text{св}}(0)}{p} - Li_{1\text{св}}(0)}{R + pL + \dfrac{1}{pC}} = \frac{-0{,}0732\cdot 10^{-6}\,p + 546\cdot 10^{-6}}{0{,}2\cdot 10^{-6}\,p^2 + 10^{-4}\,p + 1} = \frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Уравнение $F_2(p)=0$, т. е.

$$0{,}2\cdot 10^{-6}p^2+10^{-4}p+1=0,$$

имеет корни: $p_{1,2}=-250\pm j2220\ \text{с}^{-1}$. Оригинал тока $i_{2\text{св}}$ находим по теореме разложения:

$$i_{2\text{св}}=2\,\mathrm{Re}\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1 t},$$

где $F_2'(p_1)=0{,}4\cdot 10^{-6}p+10^{-4}$.

Имеем:

$$i_{2\text{св}}=2\,\mathrm{Re}\frac{-0{,}0732\cdot 10^{-6}(-250+j2220)+546\cdot 10^{-6}}{0{,}4\cdot 10^{-6}(-250+j2220)+10^{-4}}e^{-250t}e^{j2220t}=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\,0{,}660e^{-106{,}08^\circ}e^{-250t}e^{j2220t}=2\,\mathrm{Re}\,0{,}660e^{-250t}e^{j(2220t-106{,}08^\circ)}=$$

$$=1{,}321e^{-250t}\cos(2220t-106{,}08^\circ)=1{,}321e^{-250t}\sin(2220t-75^\circ)\ \text{А}.$$

Ток установившегося режима

$$i_{2\text{у}}=\sqrt{2}\sin(2500t+75^\circ).$$

Следовательно,

$$i_2=i_{2\text{у}}+i_{2\text{св}}=\sqrt{2}\sin(2500t+75^\circ)+1{,}321e^{-250t}\sin(2220t-16{,}08^\circ),\ \text{А}.$$

Задача 5.24. В цепи (рис. 5.28) найти ток i_2 после замыкания контакта K, если E = 30 В, R = 100 Ом, R_1 = 200 Ом, $L_1=L_2$ = 0,3 Гн, М = 0,1 Гн.

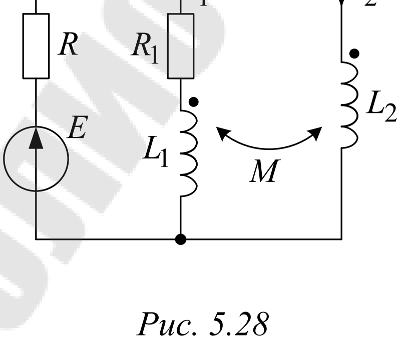


Рис. 5.28

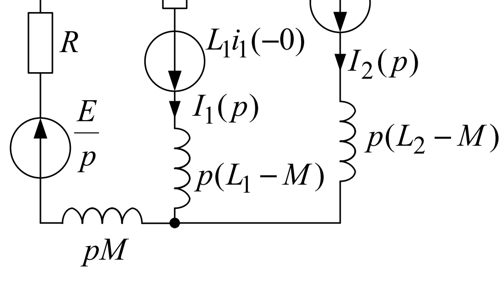


Рис. 5.29

Решение. До коммутации:

$$i_1 = i_1(-0) = \frac{E}{R + R_1} = \frac{30}{100 + 200} = 0{,}1 \text{ А}.$$

Из операторной схемы замещения послекоммутационной цепи (рис. 5.29) получаем:

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p);$$

$$RI(p) + R_1 I_1(p) + pL_1 I_1(p) - L_1 i_1(-0) + pMI_2(p) = E(p);$$

$$RI(p) + pL_2 I_2(p) + pMI_1(p) - Mi_1(-0) = E(p),$$

где $E(p) = \dfrac{E}{p}$. Решая эти уравнения относительно $I_2(p)$, находим:

$$I_2(p) = \frac{p\big(E(L_1 - M) - \left[R(L_1 - M) + R_1 M\right]\big)i_1(-0) + ER_1}{p\Big(p^2(L_1 L_2 - M^2) + p\big(L_1 R + L_2 R + L_2 R_1 - 2MR\big) + RR_1\Big)}.$$

Подставив числовые значения и сократив числитель и знаменатель на общий множитель ($p + 1000$), получим:

$$I_2(p) = \frac{75}{p(p + 250)},$$

откуда

$$i_2 = 0{,}3(1 - e^{-250t}) \text{ А}.$$

Задача 5.25. В схеме (рис. 5.30) найти операторным методом ток неразветвленной части цепи, если $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $e(t) = 170\sin(314 + 30^{\circ})$,В, $L_1 = 30$ мГн, $L_2 = 50$ мГн, $M = 25$ мГн.

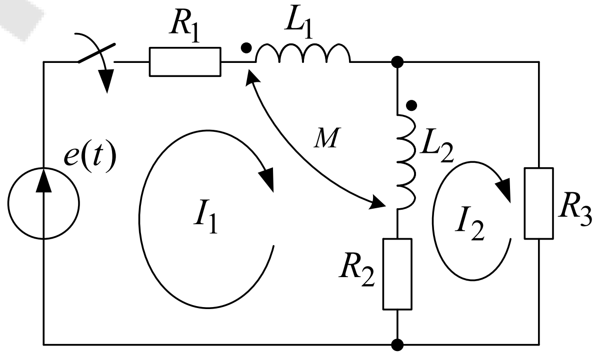


Рис. 5.30

Решение. Составляем операторные уравнения по методу контурных токов:

$$I_1(p)\big(R_1+R_2+p(L_1+L_2+2M)\big)-I_2(p)\big(R_2+p(L_2+M)\big)=E(p);$$

$$-I_1(p)\big(R_2+p(L_2+M)\big)+I_2(p)\big(R_2+R_3+pL_2\big)=0,$$

где $E(p)=\dfrac{170e^{j30^\circ}}{(p-j\omega)}$. Совместное решение этих уравнений дает:

$$I_1(p)=\frac{170(20+0{,}05p)}{(p-j\omega)(0{,}000875p^2+2{,}6p+275)}=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}.$$

Уравнение $F_2(p)=0$ имеет корни: $p_1=314j$, $p_2=-2860\ \text{c}^{-1}$ и $p_3=-114\ \text{c}^{-1}$.

Далее находим:

$$F_1(p_1)=4301e^{j68^\circ20'};\ F_1(p_2)=20910e^{j210^\circ};\ F_1(p_3)=2429{,}3e^{j30^\circ};$$

$$F_2'(p)=0{,}000875p^2+2{,}6p+275+(p-j\omega)(0{,}000175p+2{,}6);$$

$$F_2'(p_1)=820{,}94e^{j96^\circ};\ F_2'(p_2)=6317e^{j174^\circ};$$

$$F_2'(p_3)=995{,}86e^{-j125{,}56^\circ}.$$

Искомый ток

$$i(t)=\operatorname{Im}\left(\frac{F_1(p_1)}{F_2'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{F_1(p_2)}{F_2'(p_2)}e^{p_2t}+\frac{F_1(p_3)}{F_2'(p_3)}e^{p_3t}\right)=$$

$$=\operatorname{Im}\left(5{,}1e^{j(\omega t-8^\circ40')}+3{,}03e^{j203^\circ44'}e^{-2860t}+3{,}01e^{j140^\circ}e^{-114t}\right)=$$

$$=5{,}13\sin(\omega t-8^\circ40')-1{,}16e^{-2860t}+1{,}97e^{-114t},\ \text{А}.$$

Задача 5.26. Определить ток в цепи (рис. 5.31) после размыкания ключа, если $E=100$ В, $R=200$ Ом, $L=0{,}3$ Гн, $L_2=0{,}2$ Гн.

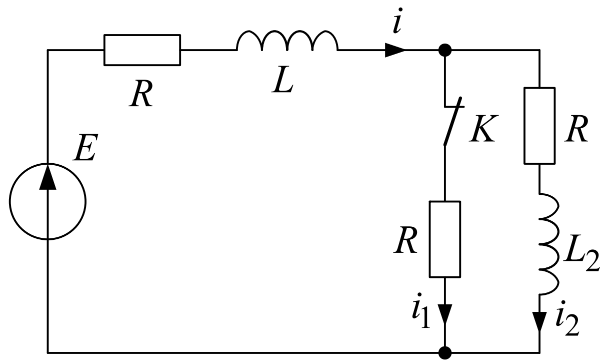


Рис. 5.31

Решение. До размыкания ключа в цепи протекали токи:

$$i = \frac{E}{R + \frac{R^2}{2R}} = \frac{2E}{3R} = \frac{2 \cdot 100}{3 \cdot 200} = 0{,}333 \text{ А};$$

$$i_1 = i_2 = \frac{i}{2} = \frac{0{,}333}{2} = 0{,}167 \text{ А}.$$

Следовательно,

$$i(-0) = 0{,}333 \text{ А}, \;\; i_2(-0) = 0{,}167 \text{ А}. \tag{1}$$

Цепь после коммутации имеет единственный контур. При этом по обобщенному закону коммутации для потокосцеплений:

$$Li(-0) + L_2 i_2(-0) = (L + L_2) i(+0).$$

Отсюда

$$i(+0) = \frac{Li(-0) + L_2 i_2(-0)}{L + L_2}. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), находим:

$$i(+0) = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}333 + 0{,}2 \cdot 0{,}167}{0{,}3 + 0{,}2} = 0{,}267 \text{ А}. \tag{3}$$

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи

$$2R + p(L + L_2) = 0$$

имеет единственный корень: $p = p_1 = -\frac{2R}{L + L_2} = -\frac{2 \cdot 200}{0{,}3 + 0{,}2} = -800 \text{ c}^{-1}$.

Следовательно,

$$i_{\text{св}} = Ae^{p_1 t} = Ae^{-800t}. \qquad (4)$$

В установившемся режиме в послекоммутационной цепи протекает ток

$$i_{\text{у}} = \frac{E}{2R} = \frac{100}{2 \cdot 200} = 0{,}25 \text{ А}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) находим зависимость тока от времени:

$$i(t) = i_y + i_{\text{св}} = 0{,}25 + Ae^{-800t}. \qquad (6)$$

Постоянную интегрирования A находим с помощью начального условия (3), полагая в выражении (6) $t = 0$:

$$0{,}267 = 0{,}25 + A.$$

Отсюда $A = 0{,}017$. В итоге имеем:

$$i(t) = 0{,}25 + 0{,}017e^{-800t} \text{ А}.$$

Задача 5.27. Найти напряжения u_{C_1} и u_{C_2} после замыкании ключа в схеме (рис. 5.32), если $E = 80$ В, $C_1 = 5$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ (разряжен), $R = 90$ Ом.

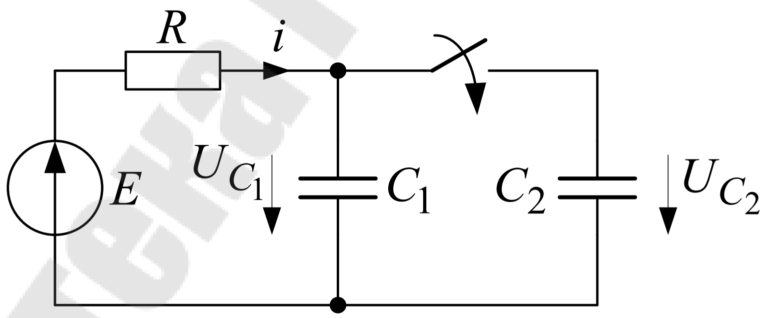


Рис. 5.32

Решение. Рассматривая докоммутационную цепь, сразу находим:

$$u_{C_1}(-0) = E = 80 \text{ В}, \; u_{C_2}(+0) = 0. \qquad (1)$$

По обобщенному закону коммутации для электрических зарядов:

$$C_1 \cdot u_{C_1}(-0) = (C_1 + C_2)u_C(+0), \qquad (2)$$

где

$$u_C(+0) = u_{C_1}(+0) = u_{C_2}(+0).$$

Подставляя (1) в (2), находим:

$$u_C(+0) = \frac{EC_1}{C_1 + C_2} = \frac{80 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6}} = 50 \text{ В.} \qquad (3)$$

Характеристическое уравнение послекоммутационной цепи

$$R + \frac{1}{p(C_1 + C_2)} = 0$$

имеет единственный корень

$$p = p_1 = -\frac{1}{R(C_1 + C_2)} = -\frac{1}{90(5 \cdot 10^{-6} + 3 \cdot 10^{-6})} = -1388{,}8 \text{ c}^{-1}.$$

Следовательно,

$$u_{C\text{св}} = \text{A}\text{e}^{p_1 t} = Ae^{-1388{,}8t} \text{ В.} \qquad (4)$$

В установившемся режиме в послекоммутационной цепи

$$u_{C\text{у}} = \text{E} = 80 \text{ В.} \qquad (5)$$

Из (4) и (5) находим:

$$u_C(t) = u_{C\text{у}} + u_{C\text{св}} = \text{E} + Ae^{-1388{,}8t} = 80 + Ae^{-1388{,}8t} \text{ В.} \qquad (6)$$

Постоянную интегрирования A находим с помощью начального условия (3), полагая в выражении (6) $t = 0$:

$$50 = 80 + A.$$

Отсюда $A = -30$.

В итоге имеем:

$$u_C(t) = 80 - 30e^{-1388{,}8t}, \text{ В.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.28. Параметры элементов цепи (рис. 5.33) известны и равны: $E = 30$ В, $R_1 = R_2 = 5$ Ом, $R_3 = R_4 = 2,5$ Ом, $L = 10$ мГн. Определить ток $i_3(t)$ после размыкания ключа.

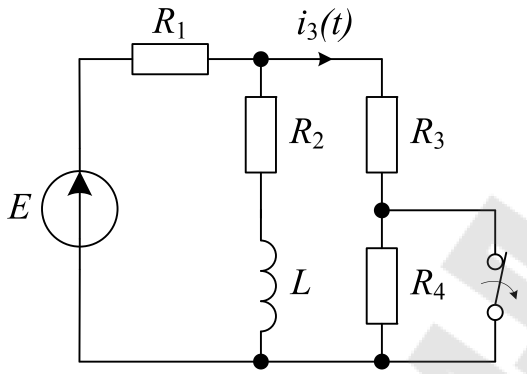


Рис. 5.33

Задача 5.29. Определить переходные токи во всех ветвях цепи (рис. 5.33), если $E = 90$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $L = 0{,}04$ Гн.

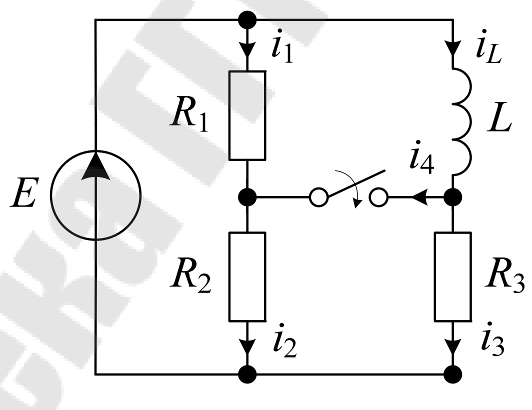


Рис. 5.34

Задача 5.30. В цепи (рис. 5.35) напряжение источника $U = 17$ В, $R_1 = R_2 = 120$ Ом, $R_3 = 250$ Ом, $R_4 = 100$ Ом, емкость конденсатора $C = 5$ мкФ. Рассчитать классическим методом зависимости $i_1(t)$ и $u_C(t)$ после размыкания ключа.

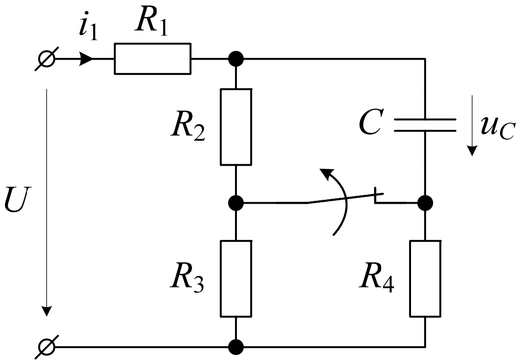


Рис. 5.35

Задача 5.31. Электрическую цепь (рис. 5.36) подключают к источнику, напряжение которого $U = 17$ В. Рассчитать операторным методом переходные характеристики $u_к(t)$ и $i_к(t)$, если $R_1 = 120$ Ом, $R_2 = 250$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, $R_к = 40$ Ом, $L = 70$ мГн.

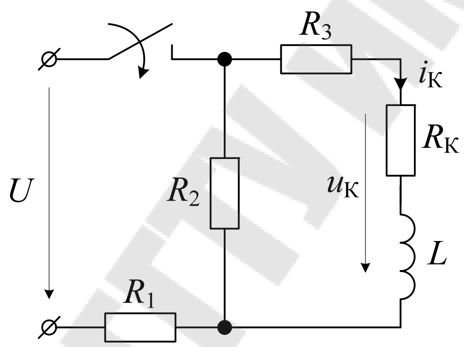


Рис. 5.36

Задача 5.32. В схеме (рис. 5.37) параллельно ветви с сопротивлением $R_1 = 100$ Ом подключают конденсатор, емкость которого $C = 10$ мкФ. Рассчитать операторным методом напряжение $u_C(t)$ и ток $i_3(t)$, если $R_2 = 120$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, напряжение источника $U = 14$ В.

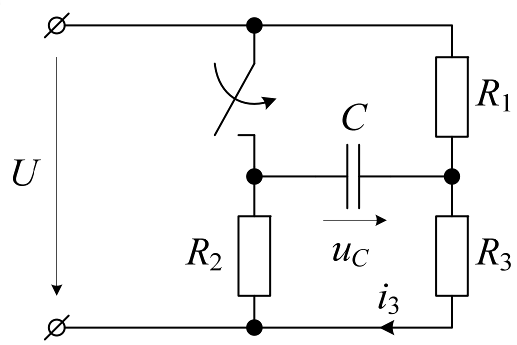


Рис. 5.37

Задача 5.33. В цепи (рис. 5.38) рассчитать классическим методом ток $i_к(t)$ и напряжение $u_к(t)$ после размыкания ключа, если $R_1 = 120$ Ом, $R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, $R_к = 45$ Ом, $L = 80$ мГн, $U = 15$ В.

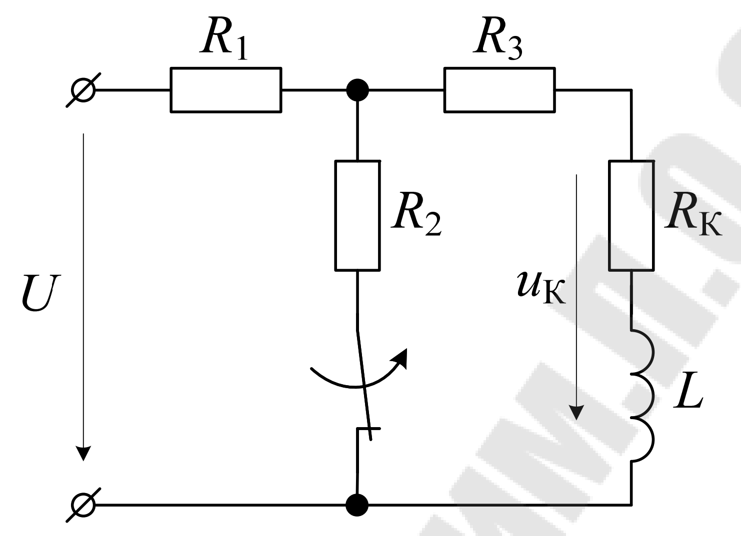


Рис. 5.38

Задача 5.34. В цепи (рис. 5.39) $E = 18$ В, $R_1 = 120$ Ом, $R_2 = R_3 = 100$ Ом, $R_4 = 330$ Ом, $C = 4$ мкФ. Рассчитать классическим методом напряжение $u_C(t)$ и ток $i_2(t)$ после размыкания ключа.

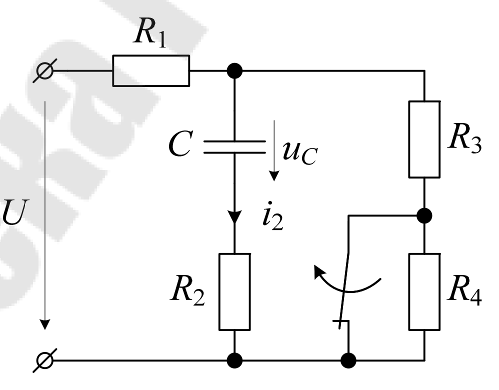


Рис. 5.39

Задача 5.35. В цепи (рис. 5.40) напряжение источника $U = 14$ В, $R_1 = 100$ Ом, $R_2 = 220$ Ом, $R_3 = 180$ Ом, $R_к = 40$ Ом, индуктивность катушки $L = 70$ мГн. Рассчитать классическим методом характеристики $i_2(t)$ и $u_к(t)$ после размыкания ключа.

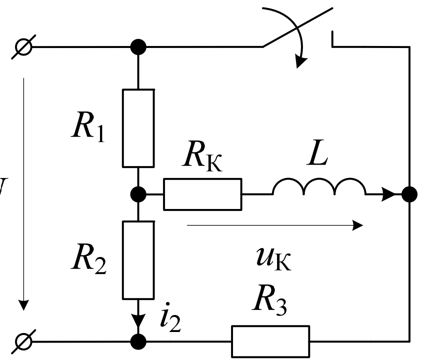


Рис. 5.40

Задача 5.36. В цепи (рис. 5.41) $U = 17$ В, $R_1 = R_2 = 100$ Ом, $R_3 = 120$ Ом, $R_4 = 300$ Ом, емкость конденсатора $C = 7$ мкФ. Рассчитать операторным методом переходные характеристики $u_C(t)$ и $i_1(t)$.

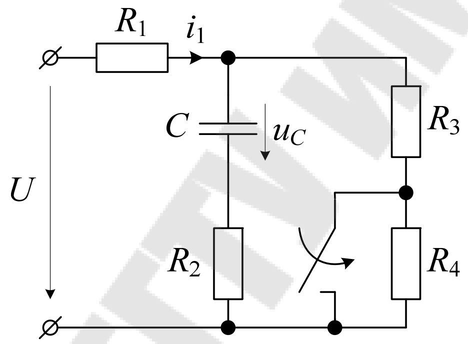


Рис. 5.41

Задача 5.37. На рис. 5.42 $R_1 = 120$ Ом, $R_2 = 180$ Ом, $R_3 = 200$ Ом, активное сопротивление и индуктивность катушки соответственно равны: $R_к = 35$ Ом и $L = 60$ мГн. Рассчитать классическим методом $i_1(t)$ и $u_к(t)$ при напряжении источника $U = 16$ В.

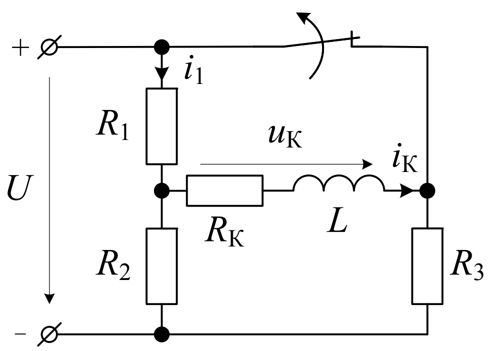


Рис. 5.42

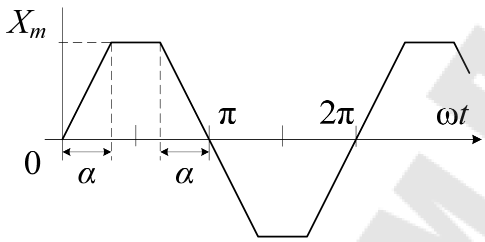
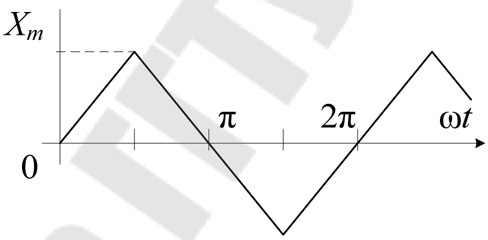
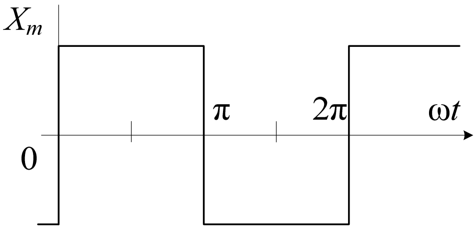
Задача 5.38. Решить задачу 5.30 операторным методом.
Задача 5.39. Решить задачу 5.31 классическим методом.
Задача 5.40. Решить задачу 5.32 классическим методом.
Задача 5.41. Решить задачу 5.33 операторным методом.
Задача 5.42. Решить задачу 5.34 операторным методом.
Задача 5.43. Решить задачу 5.35 операторным методом.
Задача 5.44. Решить задачу 5.36 классическим методом.

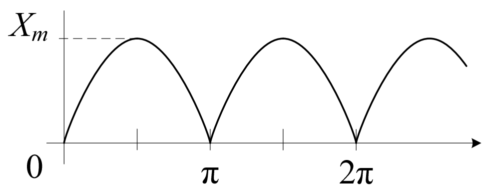
Литература

1. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов : в 3 т. / К. С. Демирчян [и др.] / – СПб. : Питер, 2003. – 445 с.
2. Основы теории цепей / Т. В. Зевеке [и др.]. – М. : Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
3. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учеб. пособие для вузов / Л. А. Бессонов. – М. : Высш. шк., 1973. – 752 с.
4. Атабеков, Г. И. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов : в 3 ч. Ч. I. Линейные электрические цепи / Г. И. Атабеков. – М. : Энергия,1978. – 592 с.
5. Коровкин. Н. В. Теоретические основы электротехники : сб. задач / Н. В. Коровкин, Е. Е. Селина, В. Л. Чечурин. – СПб. : Питер, 2004/ – 512 с.
6. Шебес, М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей / М. Р. Шебес. – М. : Высш. шк., 1982. – 488 с.
7. Шебес, М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М. : Высш. шк., 1990. – 544 с.
8. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электротехники: учеб. пособие для вузов / под ред. П. А. Ионкина. – М. : Энергоатомиздат, 1982. – 768 с.
9. Задачник по теоретическим основам электротехники (теория цепей) / под ред. К. М. Поливанова. – М. : Энергия, 1973. – 304 с.
10. Гольдин, О. Е. Задачник по теории электрических цепей : учеб. пособие для вузов / О. Е. Гольдин. – М. : Высш. шк., 1969. – 312 с.
11. Сборник задач по теоретическим основам электротехники : в 2 т. Т. 1. Электрические и магнитные цепи с сосредоточенными параметрами / под ред. П. А. Бутырина. – М. : МЭИ, 2012. – 595 с.
12. Соленков, В. В. Линейные электрические цепи постоянного и однофазного синусоидального тока : практикум / В. В. Соленков, А. В. Козлов, А. В. Бусленко / М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2016. – 139 с.

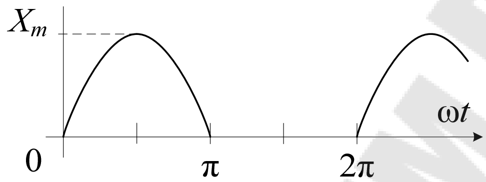
ПРИЛОЖЕНИЕ

СТАНДАРТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУРЬЕ НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

График $x(\omega t)$; разложение в ряд
 $x(\omega t) = \frac{4X_m}{\alpha\pi}\left(\sin\alpha\sin\omega t + \frac{1}{9}\sin 3\alpha\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\alpha\sin 5\omega t + ...\right)$
 $x(\omega t) = \frac{8X_m}{\pi^2}\left(\sin\omega t - \frac{1}{9}\sin 3\omega t + \frac{1}{25}\sin 5\omega t + ...\right)$
 $x(\omega t) = \frac{4X_m}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + ...\right)$



$$x(\omega t) = \frac{4X_m}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t - \frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t + \ldots\right)$$



$$x(\omega t) = \frac{2X_m}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\sin\omega t - \frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t - \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t - \ldots\right)$$

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Соленков Виталий Владимирович

ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Н. Г. Мансурова*
Компьютерная верстка *И. П. Минина*

Подписано в печать 23.11.22.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 15,81. Уч.-изд. л. 16,73.
Изд. № 6.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель