2. Тахтаджян, Л. А. Квантовая механика для математиков / Л. А. Тахтаджян. – М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 496 с.
3. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. – М. : Лаборатория знаний, 2016. – 300 с.
4. Савельев, И. В. Основы теоретической физики : учебник : в 2 т. / И. В. Савельев. – 3-е изд., стер. – Спб. : Лань, 2005. – Т. 2. – Квантовая механика. – 432 с.

ЛОКАЛЬНЫЕ ПО КООРДИНАТЕ МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДЕНДРИТА В ПЕРЕОХЛАЖДЕННОМ РАСПЛАВЕ

В. А. Климович

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Научный руководитель И. А. Концевой

Разработка новых технологий получения материалов с улучшенными эксплуатационными свойствами требует решения теоретических и экспериментальных задач высокоскоростной кристаллизации чистых веществ [1]. В работе изучены свойства дендритного режима роста кристалла под воздействием волновых возмущений на линии роста.

Фазовую границу кристаллизации (ФГК) моделируем плоской линией сильного разрыва $x - F(y,t) = 0$, где t – время; x – координата вдоль оси симметрии в сторону твердой фазы; y – поперечная декартова координата. На ФГК имеем замкнутую систему граничных условий. Расплав находится в однородном отрелаксировавшем состоянии. Нормаль $\boldsymbol{n}$ границы образует с осью x угол θ: $\cos\theta = 1/G$, $G = (1 + (\partial F/\partial y)^2)^{1/2}$. ФГК перемещается со скоростью $\boldsymbol{N}$ справа налево ($\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{n}$, $N < 0$), и на ее вершине $\partial F/\partial y = 0$, $\cos\theta = 1$. По мере удаления от вершины $\theta \to \pi/2$. Угол заострения линии роста равен $\theta_1 = (\pi/2) - \theta$.

На ФГК имеем замкнутую систему трех граничных условий:

1. Баланс энергии

$$q_j = Nc(T_j - T_*) - Q, \quad Q = L\left(N + \gamma_j \frac{\partial N}{\partial t}\right), \quad N = (\partial F/\partial t)/G. \tag{1}$$

Здесь звездочкой отмечены параметры расплава перед ФГК; индекс j указывает, что значение функции определено на правой стороне сильного разрыва, в твердой фазе; q_j – нормальная к границе составляющая вектора теплового потока; расплав находится в однородном отрелаксировавшем состоянии: $q_* \equiv 0$, $T_* \equiv \text{const}$.

2. Кинетическая связь

$$|N| = \mu(T_e - T_j), \quad T_e = T_c[1 - (UK/L)] \tag{2}$$

определяет нормальный механизм роста из расплава. Здесь μ – кинетический коэффициент роста; $K = (\partial^2 F/\partial y^2)/G^3$ – средняя кривизна границы.

3. Отклонение температуры кристалла T_j от равновесного значения T_c определяется следующей зависимостью от локального угла наклона θ [7]–[8]:

$$(T_c - T_j) = (\cos\theta)^{\delta} B, \quad \delta \ge 1, \quad B \equiv \text{const}. \tag{3}$$

Здесь $B = T_c - T_j(\theta = 0)$ – переохлаждение ФГК на вершине дендрита; μB – модуль характерной скорости роста на вершине; δ – параметр неоднородности переохлаждения ФГК вдоль линии роста. Остальные обозначения – общепринятые.

В работе изучен физически содержательный вариант $\delta = 3$, позволяющий найти функции N, T_j, q_j в конечной форме (см. (1)–(3)). Теплофизические свойства расплава и кристалла приняты постоянными.

Уравнение роста записываем в виде [2]

$$\partial^2 F / \partial y^2 = \alpha B + \varphi(\partial F / \partial t)[1 + (\partial F / \partial y)^2], \quad \alpha = L/(UT_c), \quad \varphi = \alpha / \mu. \tag{4}$$

Точное решение этого дифференциального уравнения

$$F(y,t) = A_1 t + A_2(y), \quad A_1 \equiv \text{const} < 0, \quad A_2(y) = \frac{1}{a^2} \ln\left[\left(\frac{1 + \exp(2aby)}{2}\right)\right] - \frac{b}{a} y; \tag{5}$$

$$a = (-\varphi A_1)^{1/2} > 0, \quad b = (\alpha B + \varphi A_1)^{1/2} > 0, \quad -\mu B < A_1 < 0$$

определяет стационарный профиль, который перемещается с постоянной скоростью. При $y \to \infty$ этот профиль принимает форму клина

$$F^0 = A_1 t + A_2 y, \quad A_1 = -\mu B/(1 + A_2^2) < 0, \quad A_2 \equiv \text{const}, \tag{6}$$

который тоже является точным решением уравнения (4). После линеаризации уравнения (4) на точном решении (6) получаем:

$$F(y,t) = F^0(y,t) + f(y,t), \quad \partial^2 f / \partial y^2 = B_1(\partial f / \partial y) + B_2(\partial f / \partial t), \tag{7}$$

$$B_1 = 2\varphi A_1 A_2 < 0, \quad B_2 = (1 + A_2^2)\varphi > 0.$$

Здесь $f(y,t)$ – малая добавка к основному решению (6).

Далее выполняем сдвиг по координате, $y \to y - Y_1 \geq 0$, где $Y_1 > 0$ – координата, соответствующая начальному поперечному сечению клина. Возьмем возмущение $f(y,t)$ в виде

$$f(y,t) = \exp(h_1 t + h_2 y)\hat{f}(y,t), \quad t \geq 0, \tag{8}$$

$$h_1 = -B_1^2/(4B_2) < 0, \quad h_2 = B_1/2 < 0$$

и получим аналог обычного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = \frac{1}{B_2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2}, \tag{9}$$

для которого в литературе известны точные решения [3].

Решение уравнения (7) имеет вид

$$f/H = \frac{1}{t^{1/2}} \exp\left(h_1 t + h_2 y - \frac{y^2 B_2}{4t} \right), \quad y \ge 0, \quad t > 0, \tag{10}$$

где H – произвольная малая постоянная. Исходное возмущение линии роста локализовано в точке $y = 0$ при $t = +0$.

При каждом конечном значении $y > 0$ функция $f(y,t)$ в (10) является немонотонной по отношению к аргументу t: $\partial f / \partial t = 0$ вдоль линии $y_m(t)$, на которой отношение f/H достигает своего максимального по $t > 0$ значения.

Скорость перемещения этой линии при $t \to \infty$

$$V_m(t \to \infty) = \frac{2\sqrt{-h_1}}{\sqrt{B_2}} = \frac{-2A_1 A_2}{(1 + A_2^2)} \tag{11}$$

является немонотонной функцией аргумента $A_2 > 0$ (имеет максимум при $A_2 = 1$).

Приведем результаты числовых расчетов для никеля и меди со следующими теплофизическими свойствами:

- Никель Ni: $T_c = 1728$ К, $L = 2{,}14 \cdot 10^9$ Дж/м^3, $c = 5{,}62 \cdot 10^6$ Дж/(м$^3 \cdot$К), $\lambda = 69$ Вт/(м$\cdot$К), $U = 1{,}81$ Дж/м^2, $\gamma = 1{,}3804 \cdot 10^{-7}$ с, $\mu = 9{,}53$ м/(К$\cdot$с), $T_* = 1562$ К, $N_b = 5{,}3$ м/с.
- Медь Cu: $T_c = 1357$ К, $L = 1{,}77 \cdot 10^9$ Дж/м^3, $c = 4{,}17 \cdot 10^6$ Дж/(м$^3 \cdot$К), $\lambda = 317$ Вт/(м$\cdot$К), $U = 1{,}351$ Дж/м^2, $\gamma = 4{,}755 \cdot 10^{-8}$ с, $\mu = 10{,}056$ м/(К$\cdot$с), $T_* = 1177$ К, $N_b = 11{,}0$ м/с.

Свойства точечного возмущения (10) иллюстрируются графиками на рис. 1.

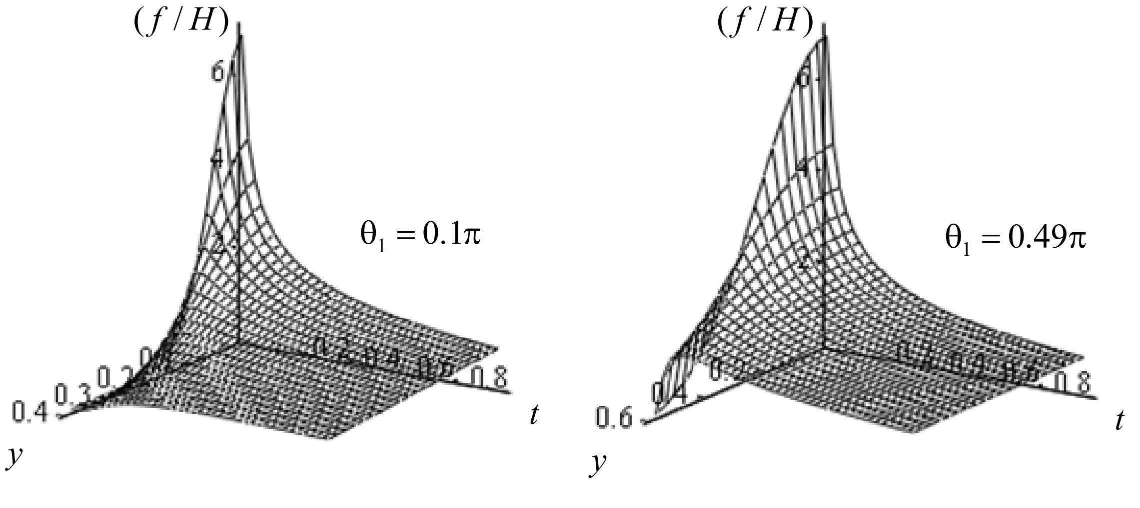
Все расчеты выполнены в безразмерных величинах. Связь между безразмерными и размерными параметрами имеет вид

$$A_1 \to (A_1 t_b / y_b) = (-N_b t_b / y_b), \quad B_1 \to B_1 y_b, \quad B_2 \to (B_2 y_b^2 / t_b).$$

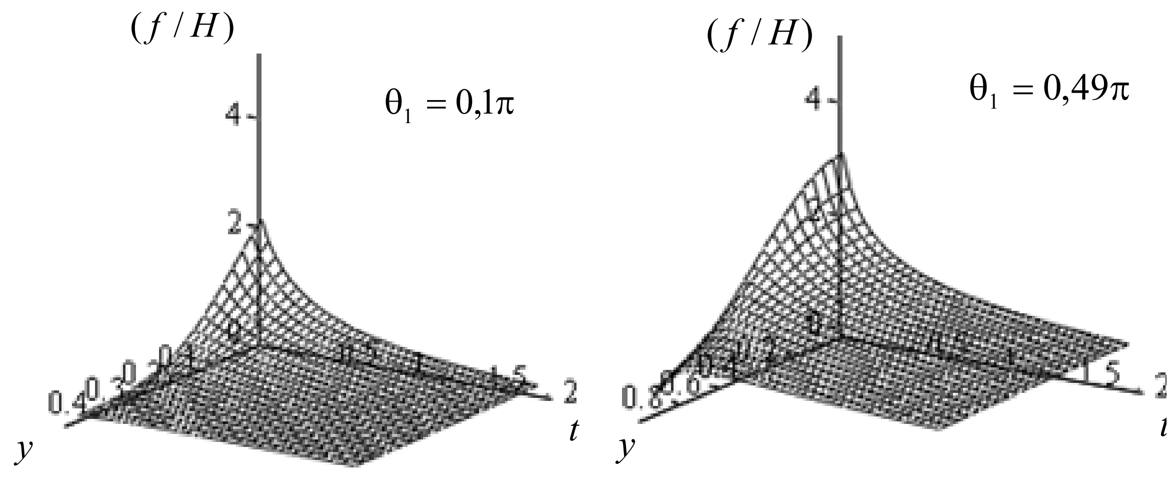
Индексом b отмечены масштабы величин, применяемые при обезразмеривании: $t_b = 10^{-7}$ с, $y_b = 10^{-6}$ м.

Относительная величина возмущения f/H демонстрирует значительные количественные различия между указанными металлами.

Данная работа выполнена в рамках работы по заданию ГПНИ «Энергетические и ядерные процессы и технологии», подпрограмма «Энергетические процессы и технологии». Руководитель задания – профессор О. Н. Шабловский.



а)



б)

Рис. 1. Точечное возмущение: пространственно-временной портрет линии роста:
а – никель; *б* – медь

Литература

1. Strickland, J. On Directional Dendritic Growth and Primary Spacing – A Review / J. Strickland, B. Nenchev // Crystals. – 2020. – № 10 (7). – P. 627.
2. Шабловский, О. Н. Форма поверхности роста и предвестники ветвления дендрита в переохлажденном расплаве / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Успехи приклад. физики. – 2018. – Т. 6, № 4. – С. 316–324.
3. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса / А. Д. Полянин [и др.]. – М : Факториал, 1998. – 368 с.