ботка водорода бактериями способна продолжаться на протяжении трех месяцев, по истечению которых субстрат сливается и процесс повторяется заново.

Литература

1. Марков, С. А. Биоводород: возможное использование водорослей и бактерий для получения молекулярного водорода / С. А. Марков // Альтернатив. энергетика и экология. – 2007. – Т. 1, №. 45. – С. 30–35.
2. Текучева, Д. Н. Пурпурные несерные бактерии в двухстадийном процессе получения водорода из органических отходов / Д. Н. Текучева // Возобновляемые источники энергии света при фотосинтезе : Молодеж. шк. конф. с междунар. участием. – М., 2008. – С. 7–21.
3. Характеристики марки стали 08Х18Н10. – Режим доступа: https://emk24.ru/wiki/stali-gost/stal-08kh18n10_8164870/. – Дата доступа: 25.12.2021.
4. Теплоизоляция емкостей и резервуаров. – Режим доступа: https://pechiexpert.ru/teploizol yatsiya-emkostej-i-rezervuarov-01/. – Дата доступа: 25.12.2021.
5. Материаловедение – сталь Ст3 : справочник. – Режим доступа: https://stankiexpert.ru/spravochnik/materialovedenie/stal-st3.html. – Дата доступа: 25.12.2021.

ФУНЦИЯ ГРИНА ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В. Ю. Златина

Учреждение образования «Гомельский государственный технический институт имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Научный руководитель В. Ю. Гавриш

Известно, что большинство физических задач сводятся к дифференциальным уравнениям [1], [2], решение которых проводят специализированными методами. К одним из таких задач можно отнести задачу о колебательном движении.

В работе дано решение задачи о гармоническом осцилляторе методом функции Грина. В начале статьи приводится процедура решения дифференциальных уравнений указанным методом. Затем кратко представлена функция Дирака, которая используется в изучаемом подходе. Далее проведена процедура определения функции Грина гармонического осциллятора. Как результат работы, в конце статьи изучен случай решения поставленной для случая экспоненциальной вынуждающей силы.

Метод функции Грина решения дифференциальных уравнений. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$\hat{Q}f(x) = f_0(x), \tag{1}$$

где $\hat{Q}$ – линейный дифференциальный оператор; $f(x)$ – искомая функция, а $f_0(x)$ – некоторая заданная функция. Искомую функцию можно определить из соотношения

$$f(x) = \hat{L}\, f_0(x), \tag{2}$$

в котором $\hat{L}$ есть некоторый оператор, определяемый видом оператора $\hat{Q}$. Для решения поставленной задачи введем вспомогательную функцию $G(x-x')$, являющуюся решением уравнения

$$\hat{Q}\, G(x-x') = \delta(x-x'), \tag{3}$$

где $\delta(x-x')$ – дельта-функция Дирака. Функцию $G(x-x')$ называют функцией Грина [1], соответствующей задаче (2). С помощью $G(x-x')$ решение уравнения может быть представлено в виде

$$f(x)=\int G(x-x')f_0(x')\,dx'. \tag{4}$$

Действительно, подействуем на соотношение (4) оператором $\hat{Q}$. Учитывая (3), получаем:

$$\hat{Q}\,f(x)=\int \hat{Q}G(x,x')f_0(x')\,dx'=\int \delta(x-x')f_0(x')\,dx'=f_0(x). \tag{5}$$

Представления δ-функции Дирака. Приведем используемые ниже представления δ-функции Дирака. Исходя из выражения

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, & \text{если } x=0,\\ 0, & \text{если } x\neq 0,\end{cases} \tag{6}$$

под δ-функцией далее будем понимать функцию со свойствами

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx=f(0), \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)dx=f(a). \tag{7}$$

Одним из важнейших представлений функции Дирака является интегральное представление

$$\delta(x-a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-a)}d\omega. \tag{8}$$

Выражение (8) устанавливается с использованием преобразований Фурье [2]. Действительно, используя выражение

$$\tilde{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\,\omega\,x}dx, \tag{9}$$

определяющее Фурье-образ функции $f(x)$ и выражения для обратного преобразования

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)e^{-i\,\omega\,x}d\omega, \tag{10}$$

нетрудно показать, что

$$f(a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)e^{-i\,\omega\,a}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\,\omega\,x}dx\right)e^{-i\,\omega\,a}d\omega, \tag{11}$$

откуда с учетом (8) следует соотношение (7). Отметим, что в литературе также известны интегральные представления δ-функции с использованием сферических функций Бесселя, функций Эйри и других, однако использование этих представлений не является объектом исследования предлагаемой работы.

Функция Грина гармонического осциллятора. Решим дифференциальное уравнение [2]:

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right\}x(t)=f(t), \tag{12}$$

соответствующее задаче об определении положения гармонического осциллятора $x(t)$ частотой ω_0, движущегося под действием вынуждающей силы $f(t)$. Следуя методике, изложенной в начале статьи, функцию Грина для оператора $\left\{d^2/dt^2+\omega_0^2\right\}$ определим из выражения

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right\}G(t-t')=\delta(t-t'). \tag{13}$$

Используя выражение (8) и Фурье-преобразование для функции Грина из (13), получаем:

$$\begin{gathered}\left\{\frac{d^2}{dt^2}+\omega_0^2\right\}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}(\omega)\,e^{i\omega(t-t')}d\omega=\\=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(-\omega^2+\omega_0^2\right)\widetilde{G}(\omega)e^{i\omega(t-t')}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\omega(t-t')}d\omega,\end{gathered} \tag{14}$$

откуда

$$\widetilde{G}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{15}$$

С учетом выражения (15) искомая функция Грина запишется как

$$G(t-t')=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega_0^2-\omega^2}d\omega, \tag{16}$$

а решение дифференциального уравнения (12) соответственно

$$x(t)=x_0(t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega_0^2-\omega^2}f(t')dt', \tag{17}$$

где $x_0(t)$ – решение уравнения (12) без правой части. Дальнейшие вычисления проведем с учетом явного вида функции $f(t)$.

Случай экспоненциальной вынуждающей силы. Рассмотрим случай силы:

$$f(t)=Ae^{-Bt}, \tag{18}$$

имеющий широкое физическое применение. Используя методы теории функции комплексного переменного, вычислим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{ei^{\omega(t-t')}}{\omega_0^2-\omega^2}. \tag{19}$$

Очевидно, что подынтегральное выражение содержит два простых полюса $\pm\omega_0$. Используя теорему Коши о вычетах [3]

$$\int f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{Res} f(z), \tag{20}$$

из выражения (19) получаем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega_0^2-\omega^2} = -\frac{2\pi i}{2\pi}\left(\lim_{\omega\to\omega_0}\frac{e^{i\omega(t-t')}(\omega-\omega_0)}{\omega^2-\omega_0^2} + \lim_{\omega\to-\omega_0}\frac{e^{i\omega(t-t')}(\omega+\omega_0)}{\omega^2-\omega_0^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0(t-t')). \tag{21}$$

Интегрирование по переменной t' тривиально. Используя (21), получаем окончательное выражение для интеграла (17):

$$\int_0^t \frac{\sin(\omega_0(t-t')}{\omega_0} A\, e^{-Bt'}\, dt' =$$

$$= \frac{A}{\omega_0^2+B^2}\left(\omega_0 e^{-Bt} - \omega_0\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right). \tag{22}$$

С учетом решения дифференциального уравнения (12) без правой части [4]

$$x_0(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t), \tag{23}$$

где C_1 и C_2 – константы интегрирования, определяемые из начальных условий, для изучаемой задачи (12) получаем:

$$x_0(t) = C_1\cos(\omega_0 t) + C_2\sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2+B^2}\left(\omega_0\, e^{-Bt} - \omega_0\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)\right). \tag{24}$$

Работа посвящена методу функции Грина для решения задачи гармонического осциллятора. Получено выражение для положения осциллятора как в общем случае, так и для случая возрастающей силы. Следует отметить, что полученные в работе выражения могут быть использованы для более сложных случаев вынуждающей силы.

Литература

1. Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М. : Наука, 1967. – 436 с.

2. Тахтаджян, Л. А. Квантовая механика для математиков / Л. А. Тахтаджян. – М.–Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. – 496 с.
3. Шабунин, М. И. Теория функций комплексного переменного / М. И. Шабунин, Ю. В. Сидоров. – М. : Лаборатория знаний, 2016. – 300 с.
4. Савельев, И. В. Основы теоретической физики : учебник : в 2 т. / И. В. Савельев. – 3-е изд., стер. – Спб. : Лань, 2005. – Т. 2. – Квантовая механика. – 432 с.

ЛОКАЛЬНЫЕ ПО КООРДИНАТЕ МОРФОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДЕНДРИТА В ПЕРЕОХЛАЖДЕННОМ РАСПЛАВЕ

В. А. Климович

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Научный руководитель И. А. Концевой

Разработка новых технологий получения материалов с улучшенными эксплуатационными свойствами требует решения теоретических и экспериментальных задач высокоскоростной кристаллизации чистых веществ [1]. В работе изучены свойства дендритного режима роста кристалла под воздействием волновых возмущений на линии роста.

Фазовую границу кристаллизации (ФГК) моделируем плоской линией сильного разрыва $x - F(y,t) = 0$, где t – время; x – координата вдоль оси симметрии в сторону твердой фазы; y – поперечная декартова координата. На ФГК имеем замкнутую систему граничных условий. Расплав находится в однородном отрелаксировавшем состоянии. Нормаль $\boldsymbol{n}$ границы образует с осью x угол θ: $\cos\theta = 1/G$, $G = (1 + (\partial F/\partial y)^2)^{1/2}$. ФГК перемещается со скоростью $\boldsymbol{N}$ справа налево ($\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{n}$, $N < 0$), и на ее вершине $\partial F/\partial y = 0$, $\cos\theta = 1$. По мере удаления от вершины $\theta \to \pi/2$. Угол заострения линии роста равен $\theta_1 = (\pi/2) - \theta$.

На ФГК имеем замкнутую систему трех граничных условий:

1. Баланс энергии

$$q_j = Nc(T_j - T_*) - Q, \quad Q = L\left(N + \gamma_j \frac{\partial N}{\partial t}\right), \quad N = (\partial F/\partial t)/G. \tag{1}$$

Здесь звездочкой отмечены параметры расплава перед ФГК; индекс j указывает, что значение функции определено на правой стороне сильного разрыва, в твердой фазе; q_j – нормальная к границе составляющая вектора теплового потока; расплав находится в однородном отрелаксировавшем состоянии: $q_* \equiv 0$, $T_* \equiv \text{const}$.

2. Кинетическая связь

$$|N| = \mu(T_e - T_j), \quad T_e = T_c[1 - (UK/L)] \tag{2}$$

определяет нормальный механизм роста из расплава. Здесь μ – кинетический коэффициент роста; $K = (\partial^2 F/\partial y^2)/G^3$ – средняя кривизна границы.

3. Отклонение температуры кристалла T_j от равновесного значения T_c определяется следующей зависимостью от локального угла наклона θ [7]–[8]:

$$(T_c - T_j) = (\cos\theta)^{\delta} B, \quad \delta \geq 1, \quad B \equiv \text{const}. \tag{3}$$