Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Электроснабжение»

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

ПРАКТИКУМ
для магистрантов специальности 1-43 80 01 «Электроэнергетика и электротехника» дневной и заочной форм обучения

Гомель 2022

УДК 621.311.031(075.8)
ББК 31.28я73
П37

Рекомендовано научно-методическим советом энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 9 от 25.05.2021 г.*)

Составитель *О. Г. Широков*

Рецензент: доц. каф. «Информационные технологии» ГГТУ им. П. О. Сухого
канд. техн. наук, доц. *В. И. Токочаков*

П37 **Планирование** эксперимента в электроэнергетике : практикум для магистрантов специальности 1-43 80 01 «Электроэнергетика и электротехника» днев. и заоч. форм обучения / сост. О. Г. Широков. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2022. – 49 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: https://elib.gstu.by. – Загл. с титул. экрана.

Предназначен для подготовки к зачету по дисциплине «Планирование эксперимента в электроэнергетике». Представлены задания и методики для решения задач по данной дисциплине.

Для магистрантов специальности 1-43 80 01 «Электроэнергетика и электротехника» дневной и заочной форм обучения.

УДК 621.311.031(075.8)
ББК 31.28я73

СОДЕРЖАНИЕ

1. Статистический анализ суточных графиков нагрузок	4
2. Регрессионное моделирование суточных графиков нагрузок	15
3. Планирование и анализ результатов полного факторного эксперимента.	24
4. Планирование факторного эксперимента с полурепликами и анализ его результатов.	42
Литература	49

1. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СУТОЧНЫХ ГРАФИКОВ НАГРУЗОК

1.1. Краткие теоретические сведения

График электрических нагрузок представляет зависимости потребляемой мощности, записанные по показаниям счетчиков активной и реактивной энергии, снятым через определенные одинаковые интервалы времени (30 минут). [1]

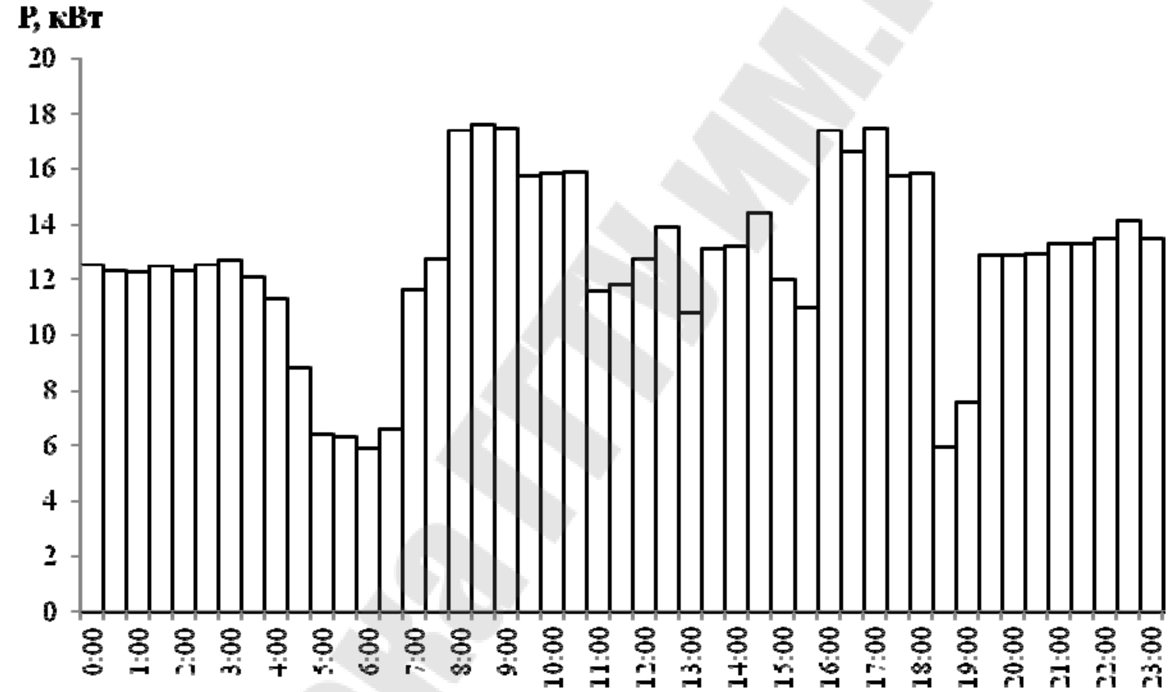

Рисунок 1.1. Суточный график электрических нагрузок

Форма суточного графика нагрузок (рисунок 1.1) определяется режимом работы предприятия. Для предприятий с односменным режимом работы наблюдается один ярко выраженный максимум, соответствующий началу работы (8-9 часов утра). При двух- и трехсменном режиме появляется второй максимум (в районе 16-17 часов), который может быть больше или меньше первого в зависимости от продолжительности светового дня.

При этом электрическая нагрузка потребителей и генерация источников зависят от большого числа случайных факторов. Поэтому они являются случайными величинами.

Для анализа и сжатия информации о нагрузках, представленных суточными графиками, используются выборочные точечные и интервальные оценки случайных величин [2-3]. (Веников, Гурман)

Выборочная средняя мощность (математическое ожидание) нагрузки:

$$P_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i}{n}; \qquad Q_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i}{n}; \tag{1.1}$$

где P_i и Q_i- активная и реактивная мощности на i-ой ступени графика, кВА; n- количество ступеней графика нагрузки.

Исправленная выборочная дисперсия случайной величины:

$$s_P^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(P_i - P_{cp}\right)^2}{\text{n - 1}}; \qquad s_Q^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Q_i - Q_{cp}\right)^2}{\text{n - 1}} \tag{1.2}$$

Среднее квадратическое (стандартное) отклонение:

$$s_{\text{P}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(P_i - P_{cp}\right)^2}{\text{n - 1}}}; \qquad s_{\text{Q}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(Q_i - Q_{cp}\right)^2}{\text{n - 1}}} \tag{1.3}$$

или $s_{\text{P}} = \sqrt{s_P^2}$; $\qquad s_{\text{Q}} = \sqrt{s_Q^2}$

Коэффициент вариации - относительный разброс значений случайной величины относительно среднего:

$$\nu_{\text{P}} = \frac{s_P}{P_{\text{ср}}} \cdot 100; \qquad \nu_{\text{Q}} = \frac{s_Q}{Q_{\text{ср}}} \cdot 100. \tag{1.4}$$

Коэффициент парной корреляции оценивает статистическую тесноту связи между двумя случайными величинами x, y (например, между активными нагрузками двух разных узлов):

$$r(P_1, P_2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(P_{1_i} - P_{1cp}) \cdot (P_{2_i} - P_{2cp})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(P_{1_i} - P_{1cp})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(P_{2_i} - P_{2cp})^2}}. \qquad (1.5)$$

$$r(Q_1, Q_2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Q_{1_i} - Q_{1cp}) \cdot (Q_{2_i} - Q_{2cp})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Q_{1_i} - Q_{1cp})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(Q_{2_i} - Q_{2cp})^2}}. \qquad (1.6)$$

Как видно из выражения, количество замеров обеих величин должно быть одинаковым.

Для определения достоверности точечных оценок, полученных с использованием ограниченного массива данных, в математической статистике рассматриваются доверительные интервалы.

Доверительный интервал средней величины:

Доверительный интервал - интервал, границы которого являются функциями от выборочных данных и который накрывает истинное значение оцениваемого параметра с вероятностью не менее 1-α , где 1-α доверительная вероятность, где α, $0 < \alpha < 1$, - уровень значимости при проверке гипотез;

Доверительный интервал может быть двусторонним или односторонним.

Доверительный интервал для среднего определяется тем, какая выбрана доверительная вероятность 1-α (0,95 или 0,99), и тем, какой будет построен интервал (односторонний или двусторонний).

$$P_{\text{ср}} \pm t_{n-1,a} \cdot \frac{s_P}{\sqrt{n}}; \quad Q_{\text{ср}} \pm t_{n-1,a} \cdot \frac{s_Q}{\sqrt{n}}; \qquad (1.7)$$

где $t_{n-1,a}$ - коэффициенты распределения Стьюдента с (n-1) степенями свободы и уровне значимости a (доверительной вероятности 0.95 соответствует уровень значимости $\alpha = 0.05$ (5%)).

Доверительный интервал стандартного отклонения (или дисперсии σ):

С вероятностью 1-α дисперсия генеральной совокупности находится в интервале

$$\frac{(n-1)\cdot s_P^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}} < \sigma_P^2 < \frac{(n-1)\cdot s_P^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}} \tag{1.8}$$

$$\frac{(n-1)\cdot s_Q^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}} < \sigma_Q^2 < \frac{(n-1)\cdot s_Q^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}} \tag{1.9}$$

где $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}$ - коэффициенты распределения Пирсона при (n-1) степенях свободы и требуемом уровне значимости α.

Параметры $t_{n-1,a}$ и $\chi^2_{\frac{\alpha}{2},\, n-1}$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1}$ определяются по справочным таблицам 1.4, 1.5 [2-3] или рассчитываются на ЭВМ.

1.2. Задание

По данным, представленным в таблицах 1.1, 1.2, 1.3, для своего варианта графиков нагрузки **построить графики** и определить:

1. Выборочные средние активную и реактивную мощности.
2. Среднее квадратическое (стандартное) отклонение и дисперсию активной и реактивной мощностей графиков нагрузки.
3. Коэффициенты вариации активной и реактивной мощностей графиков нагрузки.
4. Коэффициент парной корреляции между активными и реактивными нагрузками заданных графиков.
5. Доверительный интервал средней активной и реактивной мощностей заданных графиков.
6. Доверительный интервал стандартного отклонения активной и реактивной мощностей заданных графиков.

Таблица 1.1. Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ нагрузки из табл 1.2.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
№ нагрузки из табл 1.3.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Таблица 1.2. Суточные электрические нагрузки

№ графика	1		2		3		4		5		6		7		8		9	
Время	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, кв**
0:00	12,54	5,64	12,18	5,36	12,00	5,40	12,30	5,54	12,54	5,64	12,90	5,93	12,66	5,70	11,40	5,13	11,40	5
0:30	12,30	5,54	12,12	5,33	12,36	5,56	12,30	5,54	12,54	5,64	12,60	5,80	12,06	5,43	11,88	5,35	11,46	5
1:00	12,24	5,51	12,24	5,39	12,30	5,54	12,60	5,67	12,24	5,51	12,66	5,82	12,78	5,75	11,94	5,37	11,76	5
1:30	12,48	5,62	12,48	5,49	12,60	5,67	12,42	5,59	12,42	5,59	12,66	5,82	12,18	5,48	12,00	5,40	11,76	5
2:00	12,30	5,54	12,84	5,65	13,08	5,89	12,48	5,62	12,66	5,70	13,20	6,07	12,78	5,75	12,78	5,75	12,60	5
2:30	12,54	5,64	12,30	5,41	12,90	5,81	12,48	5,62	12,84	5,78	13,56	6,24	12,66	5,70	12,84	5,78	12,66	5
3:00	12,72	5,72	12,42	5,46	12,66	5,70	12,42	5,59	12,78	5,75	13,86	6,38	12,72	5,72	12,54	5,64	12,54	5
3:30	12,06	5,43	12,24	5,39	13,20	5,94	12,30	5,54	13,20	5,94	13,50	6,21	12,84	5,78	12,66	5,70	12,36	5
4:00	11,28	5,08	12,42	5,46	13,32	5,99	12,24	5,51	13,32	5,99	13,98	6,43	11,76	5,29	12,18	5,48	12,18	5
4:30	8,82	3,97	10,32	4,54	12,78	5,75	8,64	3,97	12,00	5,40	11,58	5,33	11,28	5,08	9,06	3,81	11,58	5
5:00	6,42	2,89	6,30	2,90	8,16	3,75	6,24	2,87	7,98	3,67	7,80	3,74	8,28	3,89	6,72	2,82	6,36	3
5:30	6,30	2,84	6,60	3,04	6,66	3,06	6,54	3,01	6,72	3,09	6,90	3,31	6,24	2,93	6,30	2,65	5,76	2
6:00	5,88	2,65	6,48	2,98	6,96	3,20	6,18	2,60	6,84	3,15	6,54	3,14	6,24	2,93	5,40	2,27	5,76	2
6:30	14,58	6,56	6,18	2,84	7,32	3,37	10,02	4,21	9,72	4,47	9,60	4,61	8,16	3,84	9,00	3,78	5,10	2
7:00	11,64	5,24	5,34	2,46	6,06	2,79	19,86	8,34	24,42	10,50	25,26	10,61	19,14	8,61	25,56	10,74	4,98	2
7:30	17,76	7,64	5,22	2,40	7,98	3,67	21,24	8,92	18,00	7,74	24,24	10,18	61,50	24,60	23,22	9,75	4,98	2
8:00	16,38	7,04	4,86	2,24	5,22	2,40	26,28	11,04	17,70	7,61	25,50	10,71	55,56	22,22	21,90	9,20	4,68	2
8:30	16,62	7,15	4,86	2,24	5,46	2,51	20,76	8,72	19,80	8,51	18,48	7,76	65,34	26,14	20,46	8,59	4,86	2
9:00	16,50	7,10	5,10	2,35	5,16	2,37	20,40	8,57	17,40	7,48	21,78	9,15	52,44	20,98	21,66	9,10	4,98	2
9:30	17,76	7,64	5,16	2,37	5,34	2,46	23,16	9,73	22,14	9,52	26,88	11,29	55,62	22,25	28,32	11,89	5,04	2
10:00	17,82	7,66	5,28	2,43	5,28	2,43	26,70	11,21	18,54	7,97	22,68	9,53	51,72	20,69	41,28	17,34	4,86	2
10:30	15,90	6,84	4,86	2,24	5,58	2,57	23,28	9,78	14,46	6,22	17,82	7,48	24,18	10,88	30,36	12,75	5,16	2
11:00	11,58	4,98	5,34	2,46	5,76	2,65	12,06	5,07	10,14	4,36	10,26	4,41	11,40	5,13	12,72	5,72	5,46	2
11:30	11,82	5,08	5,34	2,46	5,82	2,68	17,10	7,18	10,92	4,70	10,62	4,57	14,04	6,32	11,88	5,35	5,88	2
12:00	17,76	7,64	5,64	2,59	5,94	2,73	20,04	8,42	14,16	6,09	14,88	6,40	30,48	12,80	31,80	14,31	5,52	2
12:30	13,92	5,99	5,40	2,48	6,18	2,84	18,42	7,74	15,84	6,81	13,80	5,93	43,26	18,17	36,48	16,42	5,34	2

№ графика	1		2		3		4		5		6		7		8		9	
Время	P, кВт	Q, квар	P, кВт	Q, квар	P, кВт	Q, квар	P, кВт	Q, квар	P, кВт	Q, квар	P, кВт	Q, квар	P, кВт	Q, квар	P, кВт	Q, квар	P, кВт	Q, кв
13:00	10,80	4,64	5,52	2,54	6,18	2,84	18,72	7,86	15,96	6,86	21,96	9,44	38,70	16,25	19,32	8,69	5,46	2
13:30	13,14	5,91	5,82	2,68	6,18	2,84	20,70	8,69	34,26	14,73	18,00	7,74	42,18	17,72	18,24	8,21	5,88	2
14:00	13,20	5,94	5,88	2,70	6,18	2,84	15,06	6,33	31,02	13,34	17,40	7,48	38,52	16,18	17,64	7,94	6,24	3
14:30	14,40	6,48	5,70	2,62	6,36	2,93	18,48	7,76	35,28	15,17	13,80	5,93	43,32	18,19	21,78	9,80	6,12	2
15:00	12,00	5,40	5,82	2,68	6,42	2,95	18,12	7,61	28,98	12,46	12,78	5,50	35,04	14,72	13,38	6,02	5,94	2
15:30	10,98	4,94	5,70	2,62	5,94	2,73	14,64	6,30	20,10	8,64	12,42	5,34	12,96	5,83	11,64	5,24	5,94	2
16:00	7,50	3,38	5,88	2,70	5,76	2,65	9,18	3,95	10,38	4,46	10,92	4,70	19,92	8,96	6,90	3,11	6,06	2
16:30	7,08	3,19	5,70	2,62	5,88	2,70	9,30	4,00	7,68	3,53	9,48	4,27	10,20	4,59	6,78	3,05	5,70	2
17:00	6,30	2,84	5,04	2,32	6,00	2,76	11,22	4,82	8,40	3,86	9,84	4,43	11,52	5,18	6,66	3,00	4,44	2
17:30	6,06	2,73	5,22	2,40	5,70	2,62	10,14	4,36	6,78	3,12	9,72	4,37	15,00	6,75	7,62	3,43	4,50	2
18:00	6,36	2,86	4,98	2,29	6,00	2,76	9,06	3,90	16,98	7,30	9,36	4,21	7,26	3,48	7,26	3,27	4,50	2
18:30	5,94	2,67	5,10	2,35	6,36	2,93	10,56	4,54	9,60	4,32	7,56	3,40	7,44	3,57	7,62	3,43	5,16	2
19:00	7,56	3,40	6,90	3,17	9,18	4,22	11,22	4,82	11,40	5,13	11,40	4,90	9,12	4,38	11,88	5,35	10,26	4
19:30	12,90	5,81	10,92	4,91	12,24	5,63	14,16	6,09	18,06	7,77	13,56	5,83	12,30	5,54	14,04	6,32	10,74	4
20:00	12,90	5,81	12,84	5,78	12,30	5,66	14,10	6,06	13,80	5,93	15,54	6,68	11,82	5,32	14,70	6,62	11,04	4
20:30	12,96	5,83	12,90	5,81	12,66	5,82	14,28	6,14	13,80	5,93	13,14	5,65	11,94	5,37	16,26	7,32	12,66	5
21:00	13,32	5,99	13,14	5,91	12,54	5,77	14,28	6,14	16,98	7,30	13,26	5,70	11,88	5,35	15,96	7,18	12,84	5
21:30	13,32	5,99	13,56	6,10	12,54	5,77	14,70	6,32	13,86	5,96	14,22	6,11	12,30	5,54	15,78	7,10	12,90	5
22:00	13,50	6,08	13,92	6,26	12,60	5,80	14,28	6,14	13,38	5,75	13,20	5,68	11,82	5,32	15,84	7,13	12,60	5
22:30	14,16	6,37	13,56	6,10	13,08	6,02	13,92	5,99	13,68	5,88	13,14	5,65	11,88	5,35	15,42	6,94	12,84	5
23:00	13,50	6,08	13,32	5,99	12,66	5,82	13,74	5,91	13,38	5,75	12,36	5,31	11,76	5,29	13,86	6,24	12,42	5
23:30	13,08	5,89	13,02	5,86	12,18	5,60	13,80	5,93	13,02	5,60	12,78	5,50	11,70	5,27	11,94	5,37	12,06	5

Таблица 1.3. Суточные электрические нагрузки

№ графика	1		2		3		4		5		6		7		8	
Время	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**
0:00	5,16	2,48	3,84	1,84	4,08	2,00	3,84	1,88	5,16	2,48	4,08	2,00	4,26	2,04	4,02	1,97
0:30	5,22	2,51	3,96	1,90	4,08	2,00	3,84	1,88	4,98	2,39	4,08	2,00	4,20	2,02	4,32	2,12
1:00	5,10	2,45	4,14	1,99	3,84	1,88	3,96	1,94	5,22	2,51	4,20	2,06	4,44	2,13	4,44	2,18
1:30	5,34	2,56	3,84	1,84	4,20	2,06	3,90	1,91	5,04	2,42	4,14	2,03	4,14	1,99	4,44	2,18
2:00	4,92	2,36	4,02	1,93	4,02	1,97	3,90	1,91	4,98	2,39	3,96	1,94	4,26	2,04	4,26	2,09
2:30	5,10	2,45	4,08	1,96	4,02	1,97	3,78	1,85	4,98	2,39	4,08	2,00	4,14	1,99	4,32	2,12
3:00	4,98	2,39	4,02	1,93	3,96	1,94	3,96	1,94	4,98	2,39	4,26	2,09	4,38	2,10	3,84	1,88
3:30	5,10	2,45	3,90	1,87	4,08	2,00	3,72	1,82	5,16	2,48	4,26	2,09	4,02	1,93	4,14	2,03
4:00	5,10	2,45	4,02	1,93	3,90	1,91	4,02	1,97	5,10	2,45	4,14	2,03	4,32	2,07	4,32	2,12
4:30	4,74	2,28	3,84	1,84	4,32	2,12	3,48	1,71	4,86	2,33	4,02	1,97	4,20	2,02	4,08	2,00
5:00	4,62	2,22	3,72	1,79	3,36	1,65	3,54	1,73	4,74	2,28	3,78	1,85	3,96	1,90	3,96	1,94
5:30	4,86	2,33	3,48	1,67	3,54	1,73	3,48	1,71	4,62	2,22	3,60	1,76	3,66	1,76	3,84	1,88
6:00	4,44	2,13	3,84	1,84	3,72	1,82	3,66	1,79	4,80	2,30	3,66	1,79	4,02	1,93	3,60	1,76
6:30	4,92	2,36	3,60	1,73	3,54	1,73	4,98	2,44	5,58	2,68	4,38	2,15	4,80	2,30	5,16	2,53
7:00	14,52	6,39	3,54	1,70	3,54	1,73	18,24	8,94	15,60	7,49	15,96	7,82	13,92	6,68	19,80	9,70
7:30	15,96	7,02	3,60	1,73	3,54	1,73	17,58	8,61	16,50	7,92	16,08	7,88	15,42	7,40	18,30	8,97
8:00	13,98	6,15	3,48	1,67	3,36	1,65	19,68	9,64	17,16	8,24	16,92	8,29	15,96	7,66	17,52	8,58
8:30	13,92	6,12	3,54	1,70	3,42	1,68	20,34	9,97	15,90	7,63	16,50	8,09	12,60	6,05	15,90	7,79
9:00	15,60	6,86	3,60	1,73	3,24	1,59	20,64	10,11	21,54	10,34	18,24	8,94	15,66	7,52	21,24	10,41
9:30	20,16	8,87	3,48	1,67	3,54	1,73	22,56	11,05	25,62	12,30	20,70	10,14	31,08	14,92	19,74	9,67
10:00	21,78	9,58	3,54	1,70	3,54	1,73	23,22	11,38	22,50	10,80	20,22	9,91	18,72	8,99	20,94	10,26
10:30	14,70	7,06	3,72	1,79	3,36	1,65	17,40	8,53	22,08	10,60	16,68	8,17	14,34	6,88	15,78	7,73
11:00	9,72	4,67	3,72	1,79	3,60	1,76	11,64	5,70	11,64	5,59	9,78	4,79	10,98	5,27	10,44	5,12
11:30	12,30	5,90	3,60	1,73	3,42	1,68	15,48	7,59	15,84	7,60	13,44	6,59	10,62	5,10	11,10	5,44
12:00	11,88	5,23	3,72	1,79	3,48	1,71	18,42	9,03	14,82	7,11	12,24	6,00	11,64	5,59	11,94	5,85

№ графика	1		2		3		4		5		6		7		8	
Время	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**	**P, кВт**	**Q, квар**
12:30	12,48	5,49	3,72	1,79	3,78	1,85	14,52	7,11	14,04	6,74	11,04	5,41	10,98	5,27	10,08	4,94
13:00	12,12	5,33	3,66	1,76	3,24	1,59	13,32	6,53	10,32	4,95	8,64	4,23	9,96	4,78	13,08	6,41
13:30	8,88	4,26	3,66	1,76	3,54	1,73	10,38	5,09	9,72	4,67	7,86	3,85	6,78	3,25	11,82	5,79
14:00	6,72	3,23	3,84	1,84	3,78	1,85	8,16	4,00	8,58	4,12	9,90	4,85	6,66	3,20	11,34	5,56
14:30	7,50	3,60	3,78	1,81	3,48	1,71	9,90	4,85	8,76	4,20	11,64	5,70	7,26	3,48	11,04	5,41
15:00	7,26	3,48	3,66	1,76	3,54	1,73	9,96	4,88	9,12	4,38	7,50	3,68	6,84	3,28	6,66	3,26
15:30	6,42	3,08	3,78	1,81	3,42	1,68	8,16	4,00	6,36	3,05	6,12	3,00	5,52	2,65	12,42	6,09
16:00	4,68	2,25	3,54	1,70	3,42	1,68	6,90	3,38	4,80	2,30	5,16	2,53	4,56	2,19	10,74	5,26
16:30	4,20	2,02	3,54	1,70	3,48	1,71	6,36	3,12	4,68	2,25	5,16	2,53	4,50	2,16	8,64	4,23
17:00	4,02	1,93	3,54	1,70	3,36	1,65	6,54	3,20	4,62	2,22	4,98	2,44	4,14	1,99	9,24	4,53
17:30	3,66	1,76	3,60	1,73	3,54	1,73	6,24	3,06	4,68	2,25	4,74	2,32	3,90	1,87	6,48	3,18
18:00	3,66	1,76	3,54	1,70	3,36	1,65	5,82	2,85	4,68	2,25	4,62	2,26	3,90	1,87	5,28	2,59
18:30	3,72	1,79	3,54	1,70	3,54	1,73	5,76	2,82	4,56	2,19	4,38	2,15	4,02	1,93	6,78	3,32
19:00	3,90	1,87	3,84	1,84	3,72	1,82	5,52	2,70	4,98	2,39	4,62	2,26	4,08	1,96	6,30	3,09
19:30	4,14	1,99	3,90	1,87	3,60	1,76	5,16	2,53	4,50	2,16	4,32	2,12	4,26	2,04	7,98	3,91
20:00	3,96	1,90	4,08	1,96	3,84	1,88	5,46	2,68	3,90	1,87	4,32	2,12	4,14	1,99	5,46	2,68
20:30	4,02	1,93	4,08	1,96	3,78	1,85	5,10	2,50	4,26	2,04	4,44	2,18	3,96	1,90	4,68	2,29
21:00	4,08	1,96	3,78	1,81	3,78	1,85	5,40	2,65	4,44	2,13	4,50	2,21	4,08	1,96	4,80	2,35
21:30	3,84	1,84	4,02	1,93	3,84	1,88	5,28	2,59	4,14	1,99	4,56	2,23	4,32	2,07	5,52	2,70
22:00	4,20	2,02	4,08	1,96	3,90	1,91	5,22	2,56	4,14	1,99	4,38	2,15	4,38	2,10	8,64	4,23
22:30	4,08	1,96	4,02	1,93	3,78	1,85	5,16	2,53	4,20	2,02	4,38	2,15	4,44	2,13	4,86	2,38
23:00	3,96	1,90	4,02	1,93	3,78	1,85	5,10	2,50	3,96	1,90	4,32	2,12	3,90	1,87	3,90	1,91
23:30	4,08	1,96	3,96	1,90	3,96	1,94	5,28	2,59	4,32	2,07	4,08	2,00	3,84	1,84	3,60	1,76

Таблица 1.4. Коэффициенты распределения Стьюдента

Число степеней свободы $f = n - 1$	n	**Доверительная вероятность** P **(уровень значимости** a**)**			
		0,9 (0,1)	**0,95 (0,05)**	**0,99 (0,01)**	**0,999 (0,001)**
1	2	6,31375151	12,7062047	63,6567412	636,619249
2	3	2,91998558	4,30265273	9,9248432	31,5990546
3	4	2,35336343	3,18244631	5,8409093	12,9239786
4	5	2,13184678	2,77644511	4,60409487	8,61030158
5	6	2,01504837	2,57058184	4,03214298	6,86882664
6	7	1,94318028	2,44691185	3,70742802	5,95881618
7	8	1,89457861	2,36462425	3,4994833	5,40788252
8	9	1,85954804	2,30600414	3,35538733	5,04130543
9	10	1,83311293	2,26215716	3,24983554	4,78091259
10	11	1,81246112	2,22813885	3,16927267	4,58689386
11	12	1,79588482	2,20098516	3,10580651	4,43697934
12	13	1,78228756	2,17881283	3,05453959	4,31779128
13	14	1,7709334	2,16036866	3,01227584	4,22083173
14	15	1,76131014	2,14478669	2,97684273	4,14045411
15	16	1,75305036	2,13144955	2,94671288	4,0727652
16	17	1,74588368	2,1199053	2,92078162	4,01499633
17	18	1,73960673	2,10981558	2,89823052	3,96512626
18	19	1,73406361	2,10092204	2,87844047	3,92164582
19	20	1,72913281	2,09302405	2,86093461	3,88340585
20	21	1,72471824	2,08596345	2,84533971	3,84951627
21	22	1,7207429	2,07961384	2,83135956	3,81927716
22	23	1,71714437	2,07387307	2,81875606	3,79213067
23	24	1,71387153	2,06865761	2,80733568	3,7676268
24	25	1,71088208	2,06389856	2,7969395	3,74539862
25	26	1,70814076	2,05953855	2,78743581	3,72514395
26	27	1,70561792	2,05552944	2,77871453	3,70661174
27	28	1,70328845	2,05183052	2,77068296	3,68959171
28	29	1,70113093	2,04840714	2,76326246	3,6739064
29	30	1,69912703	2,04522964	2,7563859	3,65940502
30	31	1,69726089	2,04227246	2,74999565	3,64595864
40	41	1,68385101	2,02107538	2,70445927	3,55096576
60	61	1,67064886	2,00029782	2,66028303	3,46020047
120	121	1,6576509	1,97993041	2,61742114	3,37345377
999999	1000000	1,64485515	1,95996636	2,57583422	3,29053646

Таблица 1.5. Коэффициенты распределения Пирсона

количество степеней свободы, n-1	***n***	**Доверительная вероятность *P* (уровень значимости *а)***					
		0,99 (0,01)	**0,975 (0,025)**	**0,95 (0,05)**	**0,05 (0,95)**	**0,025 (0,975)**	**0,01 (0,99)**
1	2	6,6349	5,02389	3,84146	0,00393	0,00098	0,00016
2	3	9,21034	7,37776	5,99146	0,10259	0,05064	0,0201
3	4	11,34487	9,3484	7,81473	0,35185	0,2158	0,11483
4	5	13,2767	11,14329	9,48773	0,71072	0,48442	0,29711
5	6	15,08627	12,8325	11,0705	1,14548	0,83121	0,5543
6	7	16,81189	14,44938	12,59159	1,63538	1,23734	0,87209
7	8	18,47531	16,01276	14,06714	2,16735	1,68987	1,23904
8	9	20,09024	17,53455	15,50731	2,73264	2,17973	1,6465
9	10	21,66599	19,02277	16,91898	3,32511	2,70039	2,0879
10	11	23,20925	20,48318	18,30704	3,9403	3,24697	2,55821
11	12	24,72497	21,92005	19,67514	4,57481	3,81575	3,05348
12	13	26,21697	23,33666	21,02607	5,22603	4,40379	3,57057
13	14	27,68825	24,7356	22,36203	5,89186	5,00875	4,10692
14	15	29,14124	26,11895	23,68479	6,57063	5,62873	4,66043
15	16	30,57791	27,48839	24,99579	7,26094	6,26214	5,22935
16	17	31,99993	28,84535	26,29623	7,96165	6,90766	5,81221
17	18	33,40866	30,19101	27,58711	8,67176	7,56419	6,40776
18	19	34,80531	31,52638	28,8693	9,39046	8,23075	7,01491
19	20	36,19087	32,85233	30,14353	10,11701	8,90652	7,63273
20	21	37,56623	34,16961	31,41043	10,85081	9,59078	8,2604
21	22	38,93217	35,47888	32,67057	11,59131	10,2829	8,8972
22	23	40,28936	36,78071	33,92444	12,33801	10,98232	9,54249
23	24	41,6384	38,07563	35,17246	13,09051	11,68855	10,19572
24	25	42,97982	39,36408	36,41503	13,84843	12,40115	10,85636
25	26	44,3141	40,64647	37,65248	14,61141	13,11972	11,52398
26	27	45,64168	41,92317	38,88514	15,37916	13,84391	12,19815
27	28	46,96294	43,19451	40,11327	16,1514	14,57338	12,8785
28	29	48,27824	44,46079	41,33714	16,92788	15,30786	13,56471
29	30	49,58788	45,72229	42,55697	17,70837	16,04707	14,25645
30	31	50,89218	46,97924	43,77297	18,49266	16,79077	14,95346
31	32	52,19139	48,23189	44,98534	19,28057	17,53874	15,65546
32	33	53,48577	49,48044	46,19426	20,07191	18,29076	16,36222
33	34	54,77554	50,72508	47,39988	20,86653	19,04666	17,07351
34	35	56,06091	51,966	48,60237	21,66428	19,80625	17,78915
35	36	57,34207	53,20335	49,80185	22,46502	20,56938	18,50893
36	37	58,61921	54,43729	50,99846	23,26861	21,33588	19,23268
37	38	59,8925	55,66797	52,19232	24,07494	22,10563	19,96023
38	39	61,16209	56,89552	53,38354	24,8839	22,87848	20,69144
39	40	62,42812	58,12006	54,57223	25,69539	23,65432	21,42616
40	41	63,69074	59,34171	55,75848	26,5093	24,43304	22,16426
41	42	64,95007	60,56057	56,94239	27,32555	25,21452	22,90561

количество степеней свободы, n-1	*n*	Доверительная вероятность *P* (уровень значимости *a)*					
		0,99 (0,01)	**0,975 (0,025)**	**0,95 (0,05)**	**0,05 (0,95)**	**0,025 (0,975)**	**0,01 (0,99)**
42	43	66,20624	61,77676	58,12404	28,14405	25,99866	23,65009
43	44	67,45935	62,99036	59,30351	28,96472	26,78537	24,3976
44	45	68,70951	64,20146	60,48089	29,78748	27,57457	25,14803
45	46	69,95683	65,41016	61,65623	30,61226	28,36615	25,90127
46	47	71,2014	66,61653	62,82962	31,439	29,16005	26,65724
47	48	72,44331	67,82065	64,00111	32,26762	29,9562	27,41585
48	49	73,68264	69,02259	65,17077	33,09808	30,75451	28,17701
49	50	74,91947	70,22241	66,33865	33,93031	31,55492	28,94065
50	51	76,15389	71,4202	67,50481	34,76425	32,35736	29,70668

2. РЕГРЕССИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СУТОЧНЫХ ГРАФИКОВ НАГРУЗОК

2.1. Краткие теоретические сведения

Регрессионный анализ - статистический метод анализа и обработки экспериментальных данных при воздействии на отклик только количественных факторов, основанный на сочетании аппарата метода наименьших квадратов и техники статистической проверки гипотез.

Под регрессией понимается функция, предназначенная для описания зависимости изменения результативных признаков под влиянием колебаний признаков-факторов.

В случае если переменных две (одна зависимая и одна независимая), то регрессия называется простой, а если их более двух, то множественная. Различают линейные и нелинейные регрессии. Если зависимость между переменными линейная, то регрессия называется линейной, в противном случае – нелинейной.

Простая (парная) линейная регрессия представляет собой модель, где теоретическое (среднее) значение зависимой переменной Y рассматривается как функция одной независимой переменной X. Модель такой зависимости может быть представлена в виде:

$$y = f(x) + \varepsilon , \tag{2.1}$$

где y — зависимая переменная (результативный признак); x — независимая, или объясняющая, переменная (признак-фактор); ε — случайная величина, характеризующая отклонения реального значения результативного признака y от теоретического $\hat{y}$, найденного по уравнению регрессии $\hat{y} = f(x) + \varepsilon$. (2.2)

Простая (парная) линейная регрессия сводится к нахождению уравнения: $\hat{y} = a + b \cdot x + \varepsilon$. (2.3)

Уравнение $\hat{y} = a + b \cdot x + \varepsilon$ позволяет по заданным значениям фактора x получить расчетные, теоретические значения результативного признака, подставляя в него известные значения фактора x. На графике эти расчётные, теоретические значения представляют линию регрессии. На практике построение линейной регрессии сводится к оценке ее параметров a и b.

Оценивание параметров линейной регрессии проводится *методом наименьших квадратов* (МНК). МНК позволяет получить такие оценки параметров a и b , при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y_i от расчетных, теоретических значений признака-результата, рассчитанных по уравнению регрессии $\hat{y}_{ix}$ при тех же значениях фактора x_i минимальна:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_{ix})^2 \rightarrow \min \tag{2.4}$$

2.1.1. Определение параметров и коэффициентов уравнения парной линейной регрессии

Коэффициенты, определяемые на основе метода наименьших квадратов, являются решением системы уравнений:

$$\begin{cases} a + b \cdot \overline{x} = \overline{y} \\ a \cdot \overline{x} + b \cdot \overline{x^2} = \overline{x \cdot y} \end{cases} \tag{2.5}$$

Параметрами уравнения регрессии являются:

-выборочные средние

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \ \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}; \ \overline{x \cdot y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{n}; \ \overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}$$

-выборочные дисперсии

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n - 1}; \qquad s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \overline{y}\right)^2}{n - 1}$$

-среднеквадратическое отклонение

$$s_x = \sqrt{s_x^2}; \qquad s_y = \sqrt{s_y^2}.$$

Коэффициенты a и b уравнений (1.3) получаем, решив систему (1.5).

$$b = \frac{\overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma_x^2}; \quad a = \overline{y} - b \cdot \overline{x}. \tag{2.6}$$

где $\operatorname{cov}(x, y)$ - выборочное значение корреляционного момента (коварияция), определенного по выражению $\operatorname{cov}(x, y) = \overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y}$.

σ_x^2- выборочное значение дисперсии величины x, определяемой по выражению $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$.

Или $$b = \frac{n\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}; \quad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \quad (2.7)$$

2.1.2. Оценка тесноты связи, качества и точности построенной модели регрессии

При линейной регрессии в качестве показателя **тесноты связи построенной модели регрессии** выступает ***линейный коэффициент корреляции***. Его значение находится в границах $-1 \le r_{xy} \le 1$.

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{s_x \cdot s_y} \quad (2.8)$$

Связи между признаками могут быть слабыми и сильными (тесными). Их критерии оцениваются по шкале Чеддока:

$0.1 < r_{xy} < 0.3$: слабая;
$0.3 < r_{xy} < 0.5$: умеренная;
$0.5 < r_{xy} < 0.7$: заметная;
$0.7 < r_{xy} < 0.9$: высокая;
$0.9 < r_{xy} < 1$: весьма высокая;

Качество построенной модели регрессии оценивается с помощью ***коэффициента детерминации*** $\boldsymbol{R^2} = (R)^2$ вычисляемого как квадрат индекса корреляции. Для линейной регрессии $R^2 = r^2_{xy}$. Коэффициент детерминации R^2 принимает значения в диапазоне $0 \le R^2 \le 1$.

Чем ближе значение R^2 к единице, тем лучше уравнение регрессии) $\hat{y} = f(x)$ согласуется с данными наблюдений. При $R^2 = 1$ зависимость $\hat{y} = f(x)$ становится функциональной, т. е. соотношение $\hat{y}_i = f(x_i)$ выполняется для всех наблюдений. Значение R^2 показывает, какая доля общей дисперсии(вариации) результативного признака y объясняется уравнением регрессии.

$$R^2 = r_{xy}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_{ix})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \quad (2.8)$$

где n – количество наблюдений; y_i — наблюдаемое значение зависимой переменной, а $\hat{y}_{ix}$ — значение зависимой переменной, рассчитанное по уравнению регрессии, $\bar{y}$ - среднее значение по наблюдаемым данным.

Точность построенной модели регрессии оценивается с помощью ***средней квадратической ошибки ($\varepsilon_{кв}$)*** либо ***средней ошибки аппроксимации ($\bar{A}$).***

Средняя квадратическая ошибка определяется:

$$\varepsilon_{кв} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_{ix} - y_i)^2}{n}} \qquad (2.9)$$

Средняя ошибка аппроксимации – среднее относительное отклонение расчетных значений $\hat{y}_{ix}$ от фактических y_i.

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{y_i - \hat{y}_{ix}}{y_i} \right| \cdot 100\% \qquad (2.10)$$

Построенное уравнение регрессии считается удовлетворительным, если значение $\bar{A}$ - не превышает 10–12 %.

Чем выше показатель детерминации или чем ниже средняя ошибка аппроксимации, тем лучше модель описывает исходные данные.

2.1.3. Оценка статистической значимости уравнения регрессии и коэффициентов уравнения регрессии

Оценка статистической значимости уравнения регрессии в целом осуществляется с помощью ***F-критерия Фишера*** по следующему алгоритму:

1) выдвигается нулевая гипотеза H_0, что коэффициент регрессии b равен нулю: $b = 0$ и поэтому фактор x не оказывает влияния на результат y;

2) вычисляется фактическое значение F–критерия $F_{факт}$ и определяется критическое (табличное) значение F–критерия $F_{табл}$;

3) проверяется условие $F_{факт} > F_{табл}$. Если условие выполняется, то нулевая гипотеза H_0 о статистической незначимости уравнения регрес-

сии отвергается и уравнение считается статистически значимым. Если $F_{факт} \le F_{табл}$, то гипотеза H_0 не отклоняется и признается статистическая незначимость или ненадежность уравнения регрессии.

$$F_{факт} = \frac{s^2_{факт}}{s^2_{ост}} > F_{\alpha;1;n-2} \tag{2.11}$$

где $F_{a;1;n\text{-}2}$ – критическое (табличное) значение F–критерия $F_{табл}$, значение квантиля уровня a F-распределения с числами степеней свободы k_1 =1; k_2 = n - 2. Для вычисления квантиля можно использовать таблицу или функцию *Excel*: $F_{a;1;n\text{-}2}$ = FРАСПОБР(a ;1;n-2).

Общая дисперсия результативного признака определяется по формуле:

$$s^2_{общ} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n - 1} \tag{2.12}$$

Факторная (объясненная) дисперсия результативного признака определяется по формуле:

$$s^2_{факт} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_{ix} - \bar{y}\right)^2}{m} \tag{2.13}$$

Остаточная (необъясненная) дисперсия результативного признака определяется по формуле:

$$s^2_{ост} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_{ix}\right)^2}{n - m - 1} \tag{2.14}$$

где n — количество наблюдений, m = 1 для парной регрессии.

Фактическое значение F–критерия $F_{факт}$

$$F_{факт} = \frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_{ix} - \bar{y})^2}{m}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_{ix})^2}{n - m - 1}} = \frac{r^2_{xy}}{1 - r^2_{xy}} \cdot \frac{n - m - 1}{m} \tag{2.15}$$

Для **оценки статистической значимости коэффициентов линейной регрессии** применяется t-критерий Стьюдента:

1) выдвигается нулевая гипотеза H_0 о статистической незначимости коэффициента уравнения регрессии;

2) вычисляется фактическое значение t–критерия $t_{факт}$ и определяется критическое (табличное) значение t–критерия $t_{табл}$;

3) проверяется условие $t_{факт} > t_{табл}$. Если условие выполняется, то нулевая гипотеза H_0 о статистической незначимости коэффициента уравнения регрессии отвергается и коэффициент уравнения считается статистически значимым. Если $t_{факт} \le t_{табл}$, то гипотеза H_0 не отклоняется и признается статистическая незначимость или ненадежность коэффициента уравнения регрессии.

Фактические значения t – критерия Стьюдента $t_{факт}$ вычисляется по формуле:

$$t_{b,факт} = \frac{b}{s_b}; \quad t_{a,факт} = \frac{a}{s_b}. \tag{2.16}$$

где s_a и s_b – стандартные ошибки коэффициентов регрессии.

Стандартные ошибки коэффициентов регрессии (s_a) и (s_b) определяются по формулам:

$$s_b = \sqrt{\frac{s_{ост}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^2}} = \frac{s_{ост}}{\sigma_x \cdot \sqrt{n}} \tag{2.17}$$

$$s_a = \sqrt{s_{ост}^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2 \cdot \sigma_x^2}} = s_{ост} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{n \cdot \sigma_x} \tag{2.18}$$

где $s_{ост}^2$ представляет собой несмещенную оценку остаточной дисперсии (2.14), $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ — дисперсия признака x.

Величина $t_{крит} = t_{1-\alpha,n-2}$ представляет собой табличное значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы $k = n - m - 1$ (определяется по таблицам).

2.1.4. Доверительные интервалы для точных значений параметров и вычисленного значения уравнения линейной регрессии.

Под доверительным интервалом понимаются пределы, в которых лежит точное значение определяемого показателя с заданной вероятностью ($P = 1\text{-}\alpha$).

Доверительные интервалы для точных значений параметров $\tilde{a}$ **и** $\tilde{b}$ уравнения линейной регрессии определяются соотношениями:

$$a - t_{1-a,n-2} \cdot s_a < \tilde{a} < a + t_{1-a,n-2} \cdot s_a \tag{2.19}$$

$$b - t_{1-a,n-2} \cdot s_b < \tilde{b} < b + t_{1-a,n-2} \cdot s_b \tag{2.20}$$

Величина $t_{1-\alpha,n-2}$ представляет собой табличное значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости α и числе степеней свободы n–2.

Если в границы доверительного интервала попадает ноль, т. е. нижняя граница отрицательна, а верхняя положительна, то оцениваемый параметр принимается равным нулю, так как он не может одновременно принимать и положительное, и отрицательное значения.

Доверительный интервал для вычисленного значения $\hat{y}_i$ при заданном значении x_i с надежностью (доверительной вероятностью) равной $P = 1\text{-}\alpha$ определяется выражением

$$\hat{y}_i \pm t_{табл}\, s_{\hat{y}_i}$$

Стандартная ошибка вычисленного значения $\hat{y}_i$ определяется по формуле:

$$s_{\hat{y}_i} = s_{ост} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot \sigma_x^2}} \tag{2.21}$$

В (1.21) входят две величины $s_{\hat{y}_i}$ (зависит от x_i) и $t_{1-\alpha,n-2}$, определяется по таблицам или с помощью функции Excel: $t_{(1-a,n-2)}$=СТЬЮДРАСПОБР *(1-a, n- 2)*.

2.2. Задание

По данным, представленным в таблицах 2.1, 1.2 для своего варианта графиков нагрузки:

1. Определить параметры и коэффициенты уравнения парной линейной регрессии Q от P. Построить графики в одних координатных осях $y_i = f(x_i)$, $\hat{y}_i = a + b \cdot x_i$.

2. Оценить тесноту связи, качество и точность построенной модели регрессии

3. Оценить статистическую значимость уравнения регрессии и коэффициентов уравнения регрессии

4. Определить доверительные интервалы для точных значений параметров и вычисленного значения уравнения линейной регрессии при уровне значимости a = 0,05. Отразить на графике.

При выполнении работы рекомендуется воспользоваться программным пакетом Excel. Исходные данные, промежуточные и окончательные расчеты представить в виде таблицы.

Таблица 2.1. Варианты заданий

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Р, кВт № нагрузки из табл 1.2.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q, квар № нагрузки из табл 1.2.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Таблица 2.2. Значения F-критерия Фишера при уровне значимости α = 0,05

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1

3. ПЛАНИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА.

3.1. Краткие теоретические сведения

Эксперимент – это система операций, воздействий и (или) наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских испытаниях. Эксперимент может быть активным или пассивным. При пассивном эксперименте уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются. При активном эксперименте уровни факторов каждом опыте задаются исследователем.

Фактор - переменная величина, по предположению влияющая на результаты эксперимента.

Опыт - воспроизведение исследуемого явления в определенных условиях проведения эксперимента при возможности регистрации его результатов.

План эксперимента - совокупность данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов.

Планирование эксперимента - выбор плана эксперимента, удовлетворяющего заданным требованиям.

Отклик - наблюдаемая случайная переменная, по предположению, зависящая от факторов.

Для описания объекта исследования удобно пользоваться представлением о кибернетической системе, которая схематически изображена на рисунке 3.1. Иногда такую кибернетическую систему называют «черным ящиком». Стрелки справа изображают численные характеристики целей исследования. Обозначаются буквой ***y*** и называются **откликами** (в литературе можно встретить другие названия - параметр оптимизации, критерий оптимизации, целевая функция, выход «черного ящика» и т.д.).

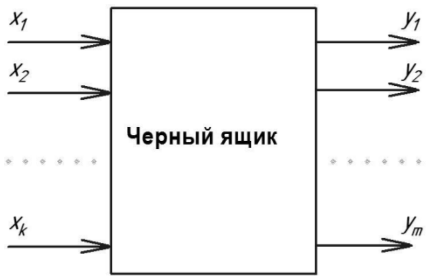

Рисунок 3.1 – Схема «черного ящика»

Для проведения эксперимента необходимо иметь возможность воздействовать на поведение «черного ящика». Все способы такого воздействия обозначены буквой x и называются **факторами** (входами «черного ящика»).

При решении задачи используются математические модели объекта исследования. Под математической моделью понимают уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Это уравнение в общем виде можно записать так:

$$y=\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k)\,, \qquad (3.1)$$

где символ φ ( ), как обычно в математике, заменяет слова: «функция от». Такая функция называется *функцией отклика.*

Если параметров оптимизации несколько, то такая задача называется многокритериальной. Часто такая задача не имеет единственного решения и решается методами многокритериальной оптимизации, суть которых заключается в отыскании компромиссного решения. При **одном выходном параметре**, как правило, задача имеет решение и его отыскание возможно различными методами.

y_j *– численные характеристики целей исследования –* ***параметры оптимизации****.*

x_i *– воздействия на «черный ящик» (объект исследования) –* ***факторы*** *(входы «черного ящика», варьируемые переменные).*

Каждый фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений. Такие значения называются ***уровнями***. Может оказаться, что фактор способен принимать бесконечно много значений (непрерывный ряд). Однако на практике точность, с которой устанавливается некоторое значение, не беспредельна. Поэтому можно считать, что всякий фактор имеет определенное число дискретных уровней. Это соглашение существенно облегчает построение «черного ящика» и эксперимента, а также упрощает оценку их сложности.

Фиксированный набор уровней факторов (т.е. установление каждого фактора на некоторый уровень) определяет одно из возможных состояний «черного ящика». Одновременно это есть условия проведения одного из возможных опытов. Если перебрать все наборы состояний «черного ящика», то получим число возможных различных опытов.

Чтобы узнать это число, достаточно число уровней факторов (если оно для всех факторов одинаково) возвести в степень числа факторов k:

$$\boldsymbol{N = p^k}, \tag{3.2}$$

где p - число уровней.

Реальные объекты, с которыми приходится сталкиваться инженеру-исследователю, обладают огромной сложностью. Так, на первый взгляд простая система с десятью факторами на двух уровнях имеет 1024 состояния, а для пяти факторов на пяти уровнях их уже 3125.

Все факторы, влияющие на исследуемые параметры объекта, предусмотреть, как правило, не удается. Так, в сложных системах, зависящих от множества факторов, некоторые воздействия не могут контролироваться или управляться. Воздействие этих факторов рассматриваются как белый шум, наложенный на истинные результаты эксперимента. Чтобы отделить факторы, интересующие экспериментатора, от шумового фона, применяются специальные методы, называемые рандомизацией эксперимента.

Проведение активного эксперимента зачастую требует больших материальных затрат. Поэтому важной задачей является получение необходимых сведений при минимальном числе опытов. Решением этой проблемы занимается теория планирования эксперимента, представляющая собой раздел математической статистики. В общем случае она позволяет ответить на вопросы:

- как спланировать эксперимент, обеспечивающий при требуемой точности результатов, минимальные затраты времени и средств;

- как обработать результаты, чтобы извлечь из них максимум информации об исследуемом объекте;

- какие выводы можно сделать по результатам эксперимента и какова достоверность этих выводов.

Активный эксперимент в сочетании с методами планирования позволяет получить требуемые результаты, затратив минимальные средства и время на проведение исследования.

Целью планирования эксперимента, как правило, является получение математической модели (ММ) исследуемого объекта или процесса. Если на объект действует много факторов, механизм которых неизвестен, то обычно используют полиномиальные математической модели (алгебраические полиномы), называемые уравнениями регрессии. Так, полиномы для случая двух факторов x_1 и x_2 будут различаться по максимальным степеням входящих в них переменных:

полином нулевой степени: $y = b_0$;

полином первой степени: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$ – линейная модель;

полином второй степени: $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x^2_2$ – полная квадратичная модель.

В практике научных исследований параметр оптимизации обычно зависит от нескольких факторов. Многофакторные эксперименты проводятся для построения линейных полиномиальных моделей. Вид полинома задается заранее, а его параметры определяются по экспериментальным данным.

Полный факторный эксперимент (сокращенно **ПФЭ**) позволяет построить математическую модель исследуемого объекта в форме линейного многочлена вида [4]

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{K} b_i \cdot x_i \qquad (3.3)$$

или неполного квадратичного многочлена вида

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{K} b_i \cdot x_i + \sum_{i<j}^{k} b_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \qquad (3.4)$$

Для отыскания коэффициентов регрессии $\boldsymbol{b_i}$ линейной функции (3.3) достаточно в эксперименте определить значения $\boldsymbol{y}$ при двух значениях каждого фактора $\boldsymbol{x_i}$**.** Поэтому в планах ПФЭ каждый фактор варьируется только на двух уровнях – верхнем и нижнем. Такие планы называются линейными. В этом случае, если число факторов известно, можно сразу найти число опытов, необходимое для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов.

Простая формула, которая для этого используется:

$$N = 2^k,$$

где N - число опытов, k - число факторов, 2 - число уровней.

В общем случае *эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется* ***полным факторным, экспериментом*** (ПФЭ).

Если число уровней каждого фактора равно двум, то имеем полный факторный эксперимент типа 2^k.

Для полного факторного эксперимента с тремя факторами, варьируемыми на двух уровнях, можно написать все возможные сочетания уровней (таблица 3.1). При этом в планировании эксперимента используются кодированные значения факторов: двух уровнях – верхний уровень (+1) и нижний уровень (-1) (часто для простоты записи единицы опускают). Условия эксперимента можно записать в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы - значениям факторов. Такие таблицы называют ***матрицами планирования эксперимента.***

В таблице 3.1 приведена матрица планирования ***ПФЭ 2³*** для трех факторов: x_1, x_2, x_3. Знак «+» говорит о том, что во время опыта значение фактора устанавливают на верхнем уровне, а знак «–», что значение фактора устанавливают на нижнем уровне.

Таблица 3.1. Матрица планирования полного факторного эксперимента ***ПФЭ 2^3***

№ опыта	x_1	x_1	x_1	y
1	+	+	+	y_1
2	-	+	+	y_2
3	+	-	+	y_3
4	-	-	+	y_4
5	+	+	-	y_5
6	-	+	-	y_6
7	+	-	-	y_7
8	-	-	-	y_8

3.1.1. Кодирование значений факторов и построение матрицы планирования ПФЭ 3^2 с учетом взаимодействия факторов

Кодирование значений факторов в двух уровнях – верхний уровень (+1) и нижний уровень (-1) можно сделать с помощью преобразования

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}}{\Delta x_i} \qquad (3.5)$$

где x_j — кодированное значение фактора, $\tilde{x}_j$— натуральное значение фактора, $\tilde{x}_{j0}$— натуральное значение основного уровня, Δx_i — интервал варьирования, j — номер фактора.

Натуральное значение основного уровня (центр плана) $\tilde{x}_{j0}$

$$\tilde{x}_{j0} = \frac{\tilde{x}_j^{+} + \tilde{x}_j^{-}}{2},$$

где $\tilde{x}_j^{+}$ - натуральное значение верхнего уровня фактора $\tilde{x}_j$, $\tilde{x}_j^{-}$ - натуральное значение нижнего уровня фактора $\tilde{x}_j$.

Интервал варьирования Δx_i

$$\Delta x_i = \frac{\tilde{x}_j^{+} - \tilde{x}_j^{-}}{2}$$

Для каждого фактора x_1, x_2, x_3 необходимо найти центр плана $\tilde{x}_{j0}$, интервал варьирования Δx_i и кодированное значение x_j. Результаты представить по форме таблицы 3.2.

Таблица 3.2. Кодирование факторов

Факторы	$\tilde{x}_1$ (натуральное значение фактора)	x_1 (кодированное значение фактора)	$\tilde{x}_2$ (натуральное значение фактора)	x_2 (кодированное значение фактора)	$\tilde{x}_3$ (натуральное значение фактора)	x_3 (кодированное значение фактора)
Верхний уровень $\tilde{x}_j^+$						
Нижний уровень $\tilde{x}_j^-$						
Основной уровень (центр плана) $\tilde{x}_{j0}$						
Интервал варьирования Δx_i						

Потом матрицу планирования ПФЭ 3^2 дополняют (если это требует вид выбранного уравнения регрессии) столбцами знаков «+» и «–», соответствующих уровням взаимодействия факторов x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 (в данном случае при учете эффекта взаимодействия первого порядка).

Знаки этих столбцов получают с помощью исходной матрицы планирования. Знак «+» или «–» в матрице планирования за x_{ij}, который соответствует i-ому опыту ($i=1,...,n$) для j-го фактора ($j=1,...,k$). При этом знак «+» показывает, что кодированная переменная принимает значение +1, а знак «–» соответствует значению –1. Тогда знаки (или уровни варьирования) для взаимодействия факторов x_r и x_p вычисляются простым перемножением: $x_{ir}x_{ip}$, i=1,…,n. В таблице 3.3 знаки для взаимодействия x_1x_2 получены таким образом:

для 1-го опыта (i=1) $x_{11}x_{12}$= (+1)(+1) =+1,

для 2-го опыта (i=2) $x_{21}x_{22}$= (-1)(+1) = -1,

для 3-го опыта (i=3) $x_{31}x_{32}$=(+1)(-1) = -1, и т.д.

Кратность наблюдений m желательно устанавливать $m \geq 3$ во всех опытах, число которых равно $N=2^3=8$.

Если каждый опыт повторяли m раз, то в матрице будет записано m столбцов $y_1, y_2, \ ..., y_m$. В таблице 3.3 видно, что каждый опыт повторялся три раза, т.е. m = 3. Если обозначить за y_{ij} значение результата, полученного в i-ом наблюдении (i=1,…,m) для j-ого опыта (j=1,…,N), то выборочное среднее значение отклика $\bar{y}_j$ в каждом опыте вычисляется по формуле

$$\overline{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_{ji}}{m}. \tag{3.6}$$

Пример матрицы планирования ПФЭ 3^2 с кодированными значениями x_j с учетом взаимодействия факторов, результатами опытов и столбцом средних значений отклика представлен в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Матрица планирования ПФЭ 3^2 с учетом взаимодействия факторов

№ опыта (j)	факторы				взаимодействия факторов				результаты опытов			средние значения отклика
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}	$\bar{y}_j$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	y_{11}	y_{12}	y_{13}	$\bar{y}_1$
2	+	-	+	+	-	-	+	-	y_{21}	y_{22}	y_{23}	$\bar{y}_2$
3	+	+	-	+	-	+	-	-	y_{31}	y_{32}	y_{33}	$\bar{y}_3$
4	+	-	-	+	+	-	-	+	y_{41}	y_{42}	y_{43}	$\bar{y}_4$
5	+	+	+	-	+	-	-	-	y_{51}	y_{52}	y_{53}	$\bar{y}_5$
6	+	-	+	-	-	+	-	+	y_{61}	y_{62}	y_{63}	$\bar{y}_6$
7	+	+	-	-	-	-	+	+	y_{71}	y_{72}	y_{73}	$\bar{y}_7$
8	+	-	-	-	+	+	+	-	y_{81}	y_{82}	y_{83}	$\bar{y}_8$

3.1.2. Проверка однородности дисперсии параллельных опытов (наблюдений), воспроизводимости эксперимента

Проверка однородности дисперсии параллельных опытов проводится с целью подтверждения нормального закона распределения ошибок отдельных опытов (наблюдений). В противном случае нельзя приступить к регрессионному анализу – расчету коэффициентов регрессии, проверке их значимости и проверке адекватности математической модели экспериментальных данных.

Проверку однородности при одинаковом числе параллельных опытов (наблюдений) проводят с помощью критерия Кохрена (G-критерий).

Для этого определяют дисперсию параллельных опытов (наблюдений).

Построчные (выборочные) дисперсии подсчитываются по формуле:

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{m-1} \tag{3.7}$$

где $\bar{y}_j$ — средний отклик по m наблюдениям опыта с номером j (среднее выборочное значение наблюдений для j-ого опыта) (3.6).

$$\overline{y}_j = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} y_{ji}}{m}.$$

Из вычисленных по формуле (3.7) оценок дисперсий находят наибольшую $S^2_{\max}$

Определяют отношение наибольшей оценки к сумме всех оценок дисперсии. Критерий Кохрена – это отношение максимальной дисперсии $S^2_{\max}$ к сумме всех дисперсий $\sum\limits_{j=1}^{N} S^2_j$:

$$G = \frac{S^2_{\max}}{\sum\limits_{j=1}^{N} S^2_j}$$

где $S^2_{\max}$ – максимальная дисперсия; S^2_j – дисперсия для j-ого опыта.

Для ПФЭ 3^2 $G = \dfrac{S^2_{\max}}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + S_5^2 + S_6^2 + S_7^2 + S_8^2}$

Определяют числа степеней свободы f_1 и f_2: $f_1 = m - 1$; $f_2 = N$,

где m – количество параллельных опытов (наблюдений), а N – все количество опытов. (Для примера таблицы 3.3, $m=3$, $N=8$)

Выбирают уровень значимости (обычно уровень значимости α = 0,05).

В специальных таблицах по заданным α; f; m находят критическое отклонение $G_{табл}$ (например, таблица 3.7).

Сравнивают значения G и $G_{\text{табл}}$. Если $G \leq G_{\text{табл}}$, то дисперсия однородна, в противном случае – неоднородна.

Делают вывод об однородности дисперсии параллельных опытов.

Если эта проверка дала отрицательный результат, то полученный эмпирический материал использовать для аппроксимации функции не рекомендуется. Следует повторить эксперимент, увеличив при этом число повторений для каждого опыта.

Критерий Кохрена используется, когда сравниваемое количество дисперсии больше двух и одна дисперсия значительно превышает остальные. Этот критерий пригоден для случаев, когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов (наблюдений).

Результаты расчетов дисперсии параллельных опытов (наблюдений) S_j^2 предлагается представить в форме таблицы 3.5.

3.1.3. Расчет коэффициентов регрессионного уравнения

Матрица планирования факторного эксперимента обладает следующими свойствами:

Первое свойство *- симметричность относительно центра эксперимента - формулируется следующим образом: алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю.*

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ji} = 0$$

где i – номер фактора, N – число опытов, j – номер опыта.

Второе свойство *– условие нормировки – формулируется следующим образом: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов*

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ji}^2 = N$$

Это следствие того, что значения факторов в матрице задаются +1 и -1.

Третье свойство*: сумма почленных произведений любых двух вектор-столбцов матрицы равна нулю*

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ji} \cdot x_{ui} = 0$$

где i, u – номера двух любых вектор-столбцов.

Это важное свойство называется ***ортогональностью матрицы планирования.***

Четвертое свойство *называется ротатабельностью, т. е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления*

ПФЭ позволяет получить математическую модель исследуемого объекта в виде уравнения множественной регрессии. Простейшим видом математической модели является линейная, т.е. функция отклика имеет вид:

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + ... + b_k x_k + b_{1,2} x_1 x_2 + b_{1,3} x_1 x_3 + ... + b_{k-1,k} x_{k-1} x_k$$

где b_0– свободный член; $b_{k,}$ $b_{k-l,k}$ – коэффициенты уравнения множественной регрессии.

Оценки коэффициентов регрессии математической модели b_j находят с помощью метода наименьших квадратов по формуле:

$$b_j = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \cdot \bar{y}_j}{N}, \quad i=0,1,...,k$$

Чтобы привести процедуру расчета коэффициентов в соответствие с представленной формулой в матрицу планирования вводят столбец фиктивной переменной x_0, которая принимает во всех опытах значение +1. (см. таблицу 3.3).

Для **уравнения регрессии**

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{1,2} x_1 x_2 + b_{1,3} x_1 x_3 + b_{2,3} x_2 x_3 + b_{1,2,3} x_1 x_2 x_3$$

матрицы планирования ПФЭ 3^2 с учетом взаимодействия факторов, представленных в таблице 3.3, коэффициенты регрессии будут определяться по следующим выражениям.

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{8} \cdot \bar{y}_j}{8} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 + \bar{y}_5 + \bar{y}_6 + \bar{y}_7 + \bar{y}_8}{8}$$

$$b_1 = \frac{\sum_{j=1}^{8} x_{1j} \cdot \bar{y}_j}{8} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2 + \bar{y}_3 - \bar{y}_4 + \bar{y}_5 - \bar{y}_6 + \bar{y}_7 - \bar{y}_8}{8}$$

$$b_2 = \frac{\sum_{j=1}^{8} x_{2j} \cdot \bar{y}_j}{8} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 - \bar{y}_3 - \bar{y}_4 + \bar{y}_5 + \bar{y}_6 - \bar{y}_7 - \bar{y}_8}{8}$$

$$b_3 = \frac{\sum_{j=1}^{8} x_{3j} \cdot \bar{y}_j}{8} = \frac{\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4 - \bar{y}_5 - \bar{y}_6 - \bar{y}_7 - \bar{y}_8}{8}$$

$$b_{1,2} = \frac{\sum_{j=1}^{8} x_{1j} x_{2j} \cdot \overline{y}_j}{8} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2 - \overline{y}_3 + \overline{y}_4 + \overline{y}_5 - \overline{y}_6 - \overline{y}_7 + \overline{y}_8}{8}$$

$$b_{1,3} = \frac{\sum_{j=1}^{8} x_{1j} x_{3j} \cdot \overline{y}_j}{8} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2 + \overline{y}_3 - \overline{y}_4 - \overline{y}_5 + \overline{y}_6 - \overline{y}_7 + \overline{y}_8}{8}$$

$$b_{2,3} = \frac{\sum_{j=1}^{8} x_{2j} x_{3j} \cdot \overline{y}_j}{8} = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2 - \overline{y}_3 - \overline{y}_4 - \overline{y}_5 - \overline{y}_6 + \overline{y}_7 + \overline{y}_8}{8}$$

$$b_{1,2,3} = \frac{\sum_{j=1}^{8} x_{1j} x_{2j} x_{3j} \cdot \overline{y}_j}{8} = \frac{\overline{y}_1 - \overline{y}_2 - \overline{y}_3 + \overline{y}_4 - \overline{y}_5 + \overline{y}_6 + \overline{y}_7 - \overline{y}_8}{8}$$

Вычисленные коэффициенты уравнения регрессии представляются в таблице 3.4

Таблица 3.4 Вычисленные коэффициенты уравнения регрессии

b_0	b_1	b_2	b_3	$b_{1,2}$	$b_{1,3}$	$b_{2,3}$	$b_{1,2,3}$

3.1.4. Проверка вычисленных коэффициентов уравнения регрессии на статистическую значимость

Проверка значимости коэффициентов регрессии проводится с целью упрощения уравнения регрессии путем исключения статистически незначимых коэффициентов. Это можно сделать с помощью критерия Стьюдента: если $|b| > t_{кр} \cdot S_b$, то b значим; если $|b| < t_{кр} \cdot S_b$, то b незначим и его полагают равным нулю в уравнении регрессии.

Критическую точку $t_{кр}$ находят из таблиц распределения Стьюдента (например, табл. 1.4) по числу степеней свободы $n(m - 1)$ и с заданным уровнем значимости α для случая двусторонней критической области.

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов S_b зависит от дисперсии воспроизводимости отклика по всем проведенным опытам $S^2_{восп}$ и вычисляется по формуле:

$$S_b = \sqrt{\frac{S^2_{\text{восп}}}{N \cdot m}} \qquad (3.8)$$

Построчные (выборочные) дисперсии подсчитываются по формуле (3.7):

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{m-1}$$

где $\bar{y}_j$ — средний отклик по m наблюдениям опыта с номером j (среднее выборочное значение наблюдений для j-ого опыта) (3.6).

$$\bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_{ji}}{m}.$$

Дисперсия воспроизводимости отклика $S^2_{восп}$ есть среднеарифметическое дисперсий всех m различных вариантов опытов, и характеризует ошибку всего эксперимента. В случае равномерного дублирования опытов (т.е. при одинаковом числе наблюдений в каждом опыте) для расчета $S^2_{восп}$ используют формулу:

$$S^2_{восп} = \frac{\sum_{j=1}^{N} S_j^2}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}(y_{ji} - \bar{y}_j)^2}{N \cdot (m-1)}, \qquad (3.8а)$$

где N – число опытов (число строк в матрице ПФЭ);

m – число наблюдений в каждом опыте;

y_{ji} – результат отдельного i-го наблюдения в j-ом опыте;

$\bar{y}_j$ – среднее выборочное значение наблюдений для j-ого опыта, которое определяется по формуле (3.6).

Все промежуточные вычисления, включая определение построчных (выборочных) дисперсий, удобно сводить в таблицу 3.5.

Таблица 3.5 Расчет построчных (выборочных) дисперсий.

№ опыта (j)	результаты опытов (из табл. 3.3)			средние значения отклика (из табл. 3.3) по (3.6)	$(y_{j1} - \bar{y}_j)^2$	$(y_{j2} - \bar{y}_j)^2$	$(y_{j3} - \bar{y}_j)^2$	$\sum_{i=1}^{m}(y_{ji} - \bar{y}_j)^2$	S_j^2 по (3.7)
	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}	$\bar{y}_j$					
1									
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									

Сумма значений столбца S_j^2 таблицы 3.5:

$$\sum_{j=1}^{8} S_j^2$$

Дисперсия воспроизводимости отклика $S_{восп}^2$:

$$S_{восп}^2 = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} S_j^2$$

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов S_b

$$S_b = \sqrt{\frac{S_{восп}^2}{N \cdot m}} = \sqrt{\frac{S_{восп}^2}{8 \cdot 3}}$$

Из таблиц распределения Стьюдента по числу степеней свободы $N(m\text{-}1)=8\cdot 2=16$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ находится $t_{кр}$ и, зная его, $t_{кр}\cdot S_b$.

Сравнивая полученное значение $t_{кр}\cdot S_b$ с коэффициентами уравнения регрессии, представленными в таблице 3.4, определяем, какие коэффициенты по абсолютной величине больше $t_{кр}\cdot S_b$.

Их оставляем в уравнении регрессии

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{1,2}x_1x_2 + b_{1,3}x_1x_3 + b_{2,3}x_2x_3 + b_{1,2,3}x_1x_2x_3$$

и записываем в уточненном виде уравнение регрессии в кодированных переменных. Коэффициенты по абсолютной величине меньше $t_{кр}\cdot S_b$ в уравнении регрессии полагают равным нулю.

3.1.5. Проверка полученного уравнения регрессии на адекватность

Проверка полученного уравнения регрессии на адекватность проводится с целью доказательства пригодности полученного (уточненного) уравнения регрессии для описания экспериментальных данных с заданной точностью. Для этого оценивают отклонения вычисленных по уравнениям регрессии значений функции оптимизации $\tilde{y}$ от экспериментально установленных $\bar{y}$. Для оценки отклонений используют F-критерий Фишера. Если $F_{расч} < F_{табл}$, то уравнение адекватно, в противном случае – неадекватно.

Расчетное значение критерия $F_{расч}$ определяют по формуле:

$$F_{расч} = \frac{S^2_{ост}}{S^2_{восп}}, \qquad (3.9)$$

где $S^2_{восп}$ – дисперсия воспроизводимости отклика, найденная по формуле (3.8);

$S^2_{ост}$ – остаточная дисперсия (или дисперсия адекватности).

Остаточную дисперсию $S^2_{ост}$ определяют по формуле:

$$S^2_{ост} = \frac{m}{N - r}\sum_{j=1}^{n}(\tilde{y}_j - \bar{y}_j)^2,$$

где N – число опытов (число строк в матрице ПФЭ);

m – число наблюдений в каждом опыте;

r – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии;

$\tilde{y}_j$ – значение изучаемого параметра (значение функции оптимизации), вычисленное по уравнению регрессии со значимыми коэффициентами для j-ого эксперимента;

$\bar{y}_j$ – среднее выборочное значение наблюдений для j-ого опыта, которое определяется по формуле (3.6).

Для рассматриваемого случая остаточную дисперсию $S^2_{ост}$ определяют по формуле

$$S^2_{ост} = \frac{3}{8 - r}\sum_{j=1}^{8}(\tilde{y}_j - \bar{y}_j)^2$$

Табличное значение критерия $F_{табл}$ находят из таблиц критических точек распределения Фишера (например, таблица 2.2.) по заданному уровню значимости α и по соответствующим степеням свободы $k_1 = N - r$ и $k_2 = N(m - 1)$. Степень свободы k_1 соответствует степени свободы числителя формулы (3.9) - $S^2_{ост}$ – остаточной дисперсии (или дисперсии адекватности, а k_2 – степень свободы знаменателя формулы (3.9) - $S^2_{восп}$ – дисперсии воспроизводимости отклика.

В данном случае принимаем уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, степени свободы $k_1 = N - r = 8 - r$ и $k_2 = N(m - 1) = 8 \cdot 2 = 16$.

Если математическая модель неадекватна данным эксперимента, то необходимо перейти к более сложной форме уравнения регрессии или уменьшить интервал варьирования факторов в эксперименте. Например, если неадекватна линейная модель, то следует ее дополнить, введя коэффициенты, соответствующие эффектам взаимодействия.

Анализ результатов предполагает интерпретацию полученной модели. Интерпретацию модели можно производить только тогда, когда она записана в кодированных переменных. Только в этом случае на коэффициенты не влияет масштаб факторов, и мы можем по значению коэффициентов судить о степени влияния того или иного фактора. Значения коэффициентов регрессии позволяют оценить степень влияния факторов и их взаимодействий на параметр оптимизации. Чем больше числовое значение коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак «+», то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если «–» – уменьшается. Значение коэффициента соответствует вкладу данного фактора в значение параметра оптимизации при переходе значения фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

Для получения математической модели в натуральных переменных $\tilde{x}_j$ в уравнение регрессии вместо x_j необходимо подставить их выражения из формулы (3.5). При переходе к натуральным переменным коэффициенты уравнения изменяются, и в этом случае пропадает возможность интерпретации влияния факторов по значениям и знакам коэффициентов. Однако, если уравнение адекватно, то с его помощью можно определять значения исследуемой величины, не проводя эксперимента и придавая факторам значения, которые должны лежать между нижним и верхним уровнем.

3.2. Задание

По данным, представленным в таблице 3.6 для заданного варианта необходимо:

1. Выполнить кодирование значений факторов.
2. Составить матрицу планирования ПФЭ 3^2 в кодированных переменных с учетом взаимодействия факторов и выборочным средним значением отклика $\bar{y}_j$ в каждом опыте.
3. Проверить однородности дисперсии параллельных опытов (наблюдений).
4. Рассчитать коэффициенты регрессионного уравнения.
5. Проверить вычисленные коэффициенты регрессионного уравнения на статистическую значимость и записать в уточненном виде уравнение регрессии в кодированных переменных.
6. Проверить полученное (уточненное) уравнение регрессии на адекватность.
7. Оценить степень влияния факторов и их взаимодействий на параметр оптимизации.

При выполнении работы рекомендуется воспользоваться программным пакетом Excel. Исходные данные, промежуточные и окончательные расчеты представить в виде таблиц.

Таблица 3.6. Варианты заданий

№ опыта	вариант факторов	факторы			вариант наблюде-	результаты наблюдений		
(j)		x_1	x_2	x_3		y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
1	1	80	10	45	1	22	26	24
2		60	10	45		16	17	14
3		80	8	45		13	15	16
4		60	8	45		10	11	12
5		80	10	30		12	14	10
6		60	10	30		7	9	8
7		80	8	30		11	13	10
8		60	8	30		9	7	8
(j)	2	x_1	x_2	x_3	2	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
1		56	14	22		20	22	18

№ опыта	вариант факторов	факторы			вариант наблюде-ний	результаты наблю-дений		
2		50	14	22		16	17	14
3		56	9	22		18	16	17
4		50	9	22		10	11	9
5		56	14	15		14	15	13
6		50	14	15		8	9	7
7		56	9	15		12	13	10
8		50	9	15		10	8	9
(j)	3	x_1	x_2	x_3	3	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
1		70	60	110		40	42	45
2		50	60	110		35	38	36
3		70	30	110		28	30	33
4		50	30	110		14	16	12
5		70	60	80		30	32	28
6		50	60	80		25	23	26
7		70	30	80		18	16	17
8		50	30	80		12	14	13
(j)	4	x_1	x_2	x_3	4	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
1		39	78	20		30	28	34
2		36	78	20		25	28	26
3		39	56	20		20	18	22
4		36	56	20		15	13	14
5		39	78	15		18	20	19
6		36	78	15		12	14	11
7		39	56	15		10	13	11
8		36	56	15		5	8	6
(j)	5	x_1	x_2	x_3	5	y_{j1}	y_{j2}	y_{j3}
1		45	18	180		56	60	58
2		30	18	180		38	40	36
3		45	14	180		46	50	44
4		30	14	180		26	28	30
5		45	18	160		34	32	30
6		30	18	160		24	26	22
7		45	14	160		20	18	22
8		30	14	160		8	6	10

Таблица 3.7. Значения ***G***-критерия при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

$f_2 = N$	$f_1 = m - 1$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,398	0,3817	0,3682
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,391	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926
10	0,602	0,445	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439
12	0,541	0,3924	0,3624	0,288	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357

4. ПЛАНИРОВАНИЕ ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА С ПОЛУРЕПЛИКАМИ И АНАЛИЗ ЕГО РЕЗУЛЬТАТОВ

4.1. Краткие теоретические сведения

При увеличении количества факторов (k) количество опытов (N) в полном факторном эксперименте (ПФЭ) значительно возрастает, например, при числе уровней факторов $p=2$ для числа факторов $k = 6$ число опытов $N=2^6=64$. При числе факторов $k > 4$, эффекты взаимодействия высокого порядка становятся статистически незначимыми, т.е. влияние сомножителей $x_1\ x_2\ x_3 \ldots x_k$ на отклик взаимно компенсируется. Практика эксперимента позволяет априорно считать, что в уравнении регрессии с большим числом факторов коэффициенты высоких порядков взаимодействия равны нулю. Если при получении модели объекта исследования можно ограничиться только его линейным описанием в виде полинома $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_kx_k$, то число опытов полного факторного эксперимента превышает число коэффициентов такого линейного уравнения.

Уменьшение количества определяемых коэффициентов уравнения регрессии позволяет сократить число опытов за счет той информации, которую несут эффекты взаимодействия факторов и которые для построения линейной модели не существенны Количество опытных точек в таких экспериментах должно быть чуть больше или равно количеству подлежащих определению коэффициентов уравнения регрессии b. Это достигается при выполнении части (реплики) полного факторного эксперимента. Части (реплики) полного факторного эксперимента ПФЭ 2^k должны быть кратны 2^P, где p – целое положительное число.

Дробный факторный эксперимент (дробная реплика полного факторного эксперимента) это эксперимент, содержащий часть комбинаций полного факторного эксперимента.

Такие эксперименты называются дробными факторными экспериментами (ДФЭ) 2^{k-p} . Количество опытных точек в ДФЭ 2^{k-p} в 2^p раз меньше, чем в ПФЭ 2^k . Поскольку ДФЭ 2^{k-p} – часть ПФЭ 2^k , то ДФЭ называют также дробными репликами полного факторного эксперимента. Например, ДФЭ, образующий половину ПФЭ 2^k , обозначается 2^{k-1} и называется полурепликой ПФЭ 2^k; ДФЭ 2^{k-2} содержит $2^k/\ 2^2 = 2^k/\ 4$ опытных точек и называется 1/4 репликой ПФЭ 2^k .

Для трехфакторного эксперимента полуреплики обозначаются 2^{3-1} и образуют зависимости: $x_3 = x_1x_2$; $x_3 = -x_1x_2$; или $x_3= \pm x_1x_2$, то есть существует всего два варианта для x_3. Для трехфакторного эксперимента есть только две полуреплики.

В ДФЭ 2^{3-1} план состоит из четырех опытных точек $N = 2^{3-1} = 2^2 = 4$. Ядром плана является ПФЭ 2^2, на основе которого можно построить уравнение регрессии $y = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{1,2}x_1x_2$

Если есть основания полагать, что в выбранных интервалах варьирования y может быть представлен линейной моделью (т. е. $b_{12}\to 0$), то достаточно определить только три коэффициента: b_0, b_1, b_2. Взаимодействие факторов $\boldsymbol{x_1x_2}$ отсутствует или несущественно, тогда в матрице плана ПФЭ вводят столбец $\boldsymbol{x_3}$ вместо $\boldsymbol{x_1x_2}$, ($\boldsymbol{x_3 = x_1x_2}$).

При этом получается матрица планирования для трех факторов, полностью совпадающая с матрицей планирования 2^2 (таблица 4.1). Планирование по такой матрице представляет собой планирование типа 2^{3-1}, т. е. в основе лежит ПФЭ для 3 – 1 = 2 переменных. Построив 4 опыта для оценки влияния трех факторов, воспользовались половиной ПФЭ – 2^3, или полурепликой. При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств (ортогональность, ротатабельность и т. д.).

Таблица 4.1. Матрица планирования

№ опыта	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_1x_2}$, ($\boldsymbol{x_3=x_1x_2}$)	y
1	+	-	-	+	y_1
2	+	+	-	-	y_2
3	+	-	+	-	y_3
4	+	+	+	+	y_4

Чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь. Тогда значение нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца.

Если в дополнение к столбцам (таблица 4.1) вычислить еще столбцы для произведения $\boldsymbol{x_1x_3}$, $\boldsymbol{x_2x_3}$ и $\boldsymbol{x_1x_2}$, то получится, что элементы столбца $\boldsymbol{x_1x_3 = x_2}$, $\boldsymbol{x_2x_3 = x_1}$, $\boldsymbol{x_1x_2 = x_3}$ (таблица 4.2).

Таблица 4.2. Матрица планирования с учетом взаимодействия факторов

№ опыта	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_1x_2}$	$\boldsymbol{x_1x_3}$	$\boldsymbol{x_2x_3}$
1	+	-	-	+	+	-	-
2	+	+	-	-	-	-	+
3	+	-	+	-	-	+	-
4	+	+	+	+	+	+	+

Это означает, что невозможно отличить эффект $\boldsymbol{x_1}$ от эффекта $\boldsymbol{x_2x_3}$, т. е. найденный коэффициент регрессии b_i будет служить совместной оценкой для β_1 и β_{23}, что записывается как $b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}$ и аналогично $b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}$; $b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}$. Такие оценки называются смешанными.

Таким образом, смешали эффекты взаимодействия с основными эффектами из-за наличия корреляции. Так как модель является линейной, то предполагается, что эффекты взаимодействия близки к нулю и

поэтому $b_1 \cong \beta_1$, $b_2 \cong \beta_2$, $b_3 \cong \beta_3$. В ходе эксперимента стремятся к тому,

чтобы максимальное число линейных эффектов оказалось не смешанным с парными взаимодействиями. Число линейных эффектов, которые не смешаны в данном плане, называют разрешающей способностью плана.

Планирование 2^{3-1} можно осуществлять иначе: $x_3 = -x_1x_2$; $x_1 = -x_2x_3$; $x_2 = -x_1x_3$, тогда $b_1 \to \beta_1 - \beta_{23}$, $b_2 \to \beta_2 - \beta_{13}$; $b_3 \to \beta_3 - \beta_{12}$.

Перед построением плана эксперимента по дробной реплике необходимо определить те взаимодействия, которыми можно пренебречь при замене их новыми факторами.

Рассмотрим ДФЭ 2^{3-1}; $\boldsymbol{x_3 = x_1x_2}$; $x_3 = -x_1x_2$.

Матрица эксперимента представлена в таблице 4.3. Она состоит из двух частей: I часть для условия $\boldsymbol{x_3 = x_1x_2}$, II часть для условия $x_3 = -x_1x_2$.

Таблица 4.3. Матрицы планирования для $\boldsymbol{x_3 = x_1x_2}$ и $x_3 = -x_1x_2$

I. $\boldsymbol{x_3 = x_1x_2}$						II. $x_3 = -x_1x_2$					
№ опыта	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_1x_2}x_3$	№ опыта	$\boldsymbol{x_0}$	$\boldsymbol{x_1}$	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_1x_2}x_3$
1	+	+	+	+	+	1	-	+	+	-	-
2	+	-	-	+	+	2	-	-	-	-	-
3	+	+	-	-	+	3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	+	4	-	-	+	+	-

Для произведения трех столбцов матрицы I выполняется соотношение $+1 = \boldsymbol{x_1x_2}x_3$, а для матрицы II $-1 = \boldsymbol{x_1x_2}x_3$. Произведения столбцов матрицы, равные +1 или –1, называются определяющим контрастом.

Например, определяющий контраст может быть $1 = x_1x_2x_3x_4$ или $1 = x_1x_2x_3x_4x_5$ и т. д.

Определяющий контраст позволяет установить разрешающую способность дробной реплики, которая задается системой смешивания эффектов. Для того чтобы определить, какой эффект смешан с другими эффектами, нужно умножить обе части определяющего контраста на столбец эффекта, интересующего исследователя.

$+1 = \boldsymbol{x_1 x_2} x_3$

$x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3$, поскольку $x_1^2 = 1$

$x_2 = x_1 x_2^2 x_3 = x_1 x_3$, поскольку $x_2^2 = 1$

$x_3 = x_1 x_2 x_3^2 = x_1 x_2$, поскольку $x_3^2 = 1$

Эти соотношения указывают на равенство соответствующих столбцов в матрице планирования. Так, например, столбцы x_1 и $x_2 x_3$ одинаковы. Поэтому b_1 оценивается как $\beta_1 + \beta_{23}$ и записывается $b_1 = \beta_1 + \beta_{23}$, $b_2 = \beta_2 + \beta_{13}$; $b_3 = \beta_3 + \beta_{12}$.

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется генерирующим соотношением.

$x_3 = x_1 x_2$ – генерирует (создает) дробную реплику.

$x_1 x_2$ – незначительное взаимодействие.

$x_3^2 = \boldsymbol{x_1 x_2} x_3$

$1 = \boldsymbol{x_1 x_2} x_3$ – определяющий контраст.

Разрешающая способность дробной реплики считается максимальной, если линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наиболее высокого порядка. Реплики, в которых линейные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, называются планами с разрешающей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Например, 2_{III}^{3-1}.

Номер разрешающей способности реплики определяется числом факторов в определяющем контрасте.

4.2. Порядок постановки (ДФЭ) 2^{k-p}

При ДФЭ кодирование значений факторов, порядок постановки опытов, проверка воспроизводимости опытов, расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения и проверка их статистической значимости, проверка адекватности полученной ММ и переход к физическим переменным производится так же, как и при ПФЭ. Однако необходимо учитывать, что для насыщенного и сверхнасыщенного экспериментов невозможна проверка адекватности ММ, так как для нее уже не остается степеней свободы.

4.3. Задание

По данным, представленным в таблице 3.6 для заданного варианта необходимо:

1. Выполнить кодирование значений факторов.

2. Составить матрицу планирования ДФЭ 2^{3-1} в кодированных переменных с учетом взаимодействия факторов и выборочным средним значением отклика $\bar{y}_j$ в каждом опыте.

3. Проверить однородности дисперсии параллельных опытов (наблюдений).

4. Рассчитать коэффициенты регрессионного уравнения.

5. Проверить вычисленные коэффициенты регрессионного уравнения на статистическую значимость и записать в уточненном виде уравнение регрессии в кодированных переменных.

6. Проверить полученное (уточненное) уравнение регрессии на адекватность.

7. Оценить степень влияния факторов и их взаимодействий на параметр оптимизации.

При выполнении работы рекомендуется воспользоваться программным пакетом Excel. Исходные данные, промежуточные и окончательные расчеты представить в виде таблиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю. П. Адлер [и др.]. – М. : Наука, 1976, 279 с.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2001. – 479 с.

3. ГОСТ 24026–80. Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения. – М. : Изд-во стандартов, 1980. – 20 с.

4. Макаричев, Ю. А. Методы планирование эксперимента и обработки данных: учеб. пособие / Ю. А Макаричев., Ю. Н. Иванников. – Самара : Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 131 с. : ил.

5. Максимов, Ю. П. Методические указания к курсовому проекту по дисциплине «Современные проблемы энергетики в электромашиностроении» / Ю. П. Максимов. – Владимир, 2015.

6. Методология планирования эксперимента: методические указания к лабораторным работам / сост. Т. П. Абомелик. – Ульяновск : УлГТУ, 2011 – 38 с.

7. Моргунов, А. П. Планирование и анализ результатов эксперимента : учеб. пособие / А. П. Моргунов, И. В. Ревина ; Минобрнауки России, ОмГТУ. – Омск : Изд-во ОмГТУ, 2014.

8. Реброва, И. А. Планирование эксперимента: учебное пособие / И. А. Реброва. – Омск : СибАДИ, 2010. – 105 с.

10. Шкляр, В. Н., Планирование эксперимента и обработка результатов / В. Н. Шкляр. – Издательство Томского политехнического университета. 2010. – 89 с.

11. Электрические системы / под ред. В. А. Веникова. – М. : Высш. шк., 1970. – Т. 1: Математические задачи электроэнергетики. – 334 с.

ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Практикум для магистрантов специальности 1-43 80 01 «Электроэнергетика и электротехника» дневной и заочной форм обучения

Составитель **Широков** Олег Геннадьевич

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 14.10.22.

Рег. № 53Е.
http://www.gstu.by