Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

В. И. Гойко, В. Г. Тепляков, А. В. Цитринов

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

ПОСОБИЕ
по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

Гомель 2013

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73
Г59

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 8 от 25.03.2013 г.)*

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Высшая математика» БТЭУ ПК *Н. Д. Романенко*

Гойко, В. И.

Г59 Введение в анализ. Производная функции и ее приложения : пособие по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов всех специальностей днев. и заоч. форм обучения / В. И. Гойко, В. Г. Тепляков, А. В. Цитринов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2012. – 47 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://library.gstu.by/. – Загл. с титул. экрана.

Даны краткие сведения из теории пределов, производных и их приложений.

Многие теоремы и задачи удачно иллюстрируются чертежами и графиками, что помогает лучше осмысливать данный раздел математики.

Для студентов всех специальностей заочной формы обучения.

УДК 517.1(075.8)
ББК 22.161я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПРЕДЕЛЫ

Введение в математику переменной величины (ее обычно связывают с именем Декарта) было событием огромной важности. Математика получила возможность не только устанавливать количественные соотношения между постоянными величинами, но и изучать протекающие в природе процессы, в которых участвуют и переменные величины.

1.1. Область изменения переменной величины.

В математическом анализе под переменной величиной (или короче – переменной) подразумевается отвлеченная или числовая переменная. Ее обозначают каким-либо символом (например, x), которому приписываются числовые значения. Переменная x считается заданной, если указано множество $X = \{x\}$ значений, которые она может принимать. Это множество называется областью изменения переменной x.

Постоянную величину (короче – постоянную) удобно рассматривать как частный случай переменной: он отвечает предположению, что множество $X = \{x\}$ состоит из одного элемента.

Область X изменения переменной x на этой оси изображается в виде некоторого множества точек. В связи с этим обычно сами числовые значения переменной называют точками.

Часто приходится иметь дело с переменной n, принимающей всевозможные натуральные значения

$$1, 2, 3, \dots, 100, 101, \dots$$

Область изменения этой переменной, т.е. множество $\{n\}$ всех натуральных чисел, обозначают буквой N.

Однако, обычно в анализе изучаются переменные, изменяющиеся непрерывным или сплошным образом. Их прообразом являются физические величины – время, путь, проходимый движущей точкой, и т.п. Областью изменения подобной переменной служит числовой промежуток. Чаще всего это будет конечный промежуток, ограниченный двумя вещественными числами a и $в$ $(a < в)$ – его концами, которые сами могут быть включены в его состав или нет. В зависимости от этого различают:

- замкнутый промежуток $[a, в]$ (оба конца включены, $a \le x \le в$);
- полуоткрытый промежуток $[a, в]$: $a < x \le в$ (включена точка $в$ и не включенав точка a), $[a, в]$ (включена точка а и не включена точка $в$:$a \le x < в$);
- открытый промежуток $(a, в)$:$a < x < в$ (не включены точки $a, в$).

Длиной промежутка во всех случаях называется число $в - a$.

Геометрическим аналогом числового промежутка является отрезок числовой оси, причем – в зависимости от типа промежутка – к отрезку концы его либо принадлежат, либо нет.

Рассматривают и бесконечные промежутки, у которых одним из концов или обоими служат $+\infty$ или $-\infty$. Обозначают их аналогично вышеприведенным: $(+\infty, -\infty)$; $(a, +\infty)$, $(-\infty, в)$ и др.

Предметом изучения в математическом анализе является, однако, не изменение одной переменной самой по себе, а зависимость между двумя или несколькими переменными при их совместном изменении. Мы сейчас ограничимся случаем двух переменных.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. Площадь S круга есть функция от его радиуса R:

$$S = \Pi R^2$$

Пример 2. В случае свободного падения тяжелой материальной точки – при отсутствии сопротивления – время t (сек.), отсчитываемое от начала движения, и пройденный путь за это время S (м) связаны уравнением

$$S = \frac{gt^2}{2},$$

где $g = 9{,}81$ м/сек^2 – ускорение силы тяжести.

1.2. Определение функции

Отвлечемся теперь от физического смысла рассматриваемых величин и дадим общее определение понятия функции.

Пусть даны две переменные x и y с областями изменения X и $У$. Предположим, что по условиям вопроса переменной x может быть приписано произвольное значение из области X без каких-либо ограничений. Тогда переменная y называется функцией от переменной x в области ее изменения X, если по некоторому правилу или закону каждому значению x из X ставится в соответствии определенное значение y из $У$.

Независимая переменная x называется аргументом функции.

Для указания того факта, что y есть функция от x, пишут

$$y\, f(x),\ y = \varphi(x),\ y = F(x) \text{ и т.п.}$$

Буквы f, φ, F, … характеризуют именно то правило, по которому получается значение x, отвечающее заданному y. Хотя буква «эф» связана со словом «функция», но для обозначения функциональной зависимости может применяться и любая другая буква; иногда повторяют ту же букву: $y = y\ (x)$.

Если мы хотим отметить частное значение, которое отвечает выбранному частному значению x, равному x_0, то для обозначения его употребляют символ: $f(x_0)$. Например, если $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,

то $f(1)$ означает численное значение функции $f(x)$ при $x=1$, т.е. попросту число $\frac{1}{2}$.

Обратимся теперь к самому правилу, или закону, соответствия между значениями переменных, которое составляет сущность понятия функциональной зависимости. Правило это может быть весьма разнообразной природы.

Наиболее естественно осуществление этого правила с помощью формулы, которая представляет функцию в виде аналитического выражения, указывающего те аналитические операции или действия над постоянными числами и над значением x, которые надо произвести, чтобы получить соответствующее значение y. Этот <u>аналитический способ</u> задания функции является наиболее важным для математического анализа.

Другие способы задания функции: графический; табличный.

В естественных науках и в технике зависимость между величинами часто устанавливается экспериментально или путем наблюдений, когда функциональная зависимость задается не какой-либо формулой, а таблицей, где просто сопоставлены полученные из опыта данные. Неудобство его заключается в том, что он дает значения функции лишь для некоторых значений аргумента.

В некоторых случаях функциональная зависимость задается непосредственно графиком.

1.3. Предел переменной величины

Пусть аргумент n принимает все значения из натурального ряда

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ldots,\ n,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1.1)$$

члены которого упорядоченны по возрастанию так, что большее число K следует за меньшим числом n. Если задана функция x_n, то ее аргумент можно рассматривать как номер соответствующего значения переменной. Таким образом, x_1 есть первое ее значение, x_2 – второе и т.д. Это множество значений будем представлять себе всегда упорядоченным, наподобие натурального ряда (1), по возрастанию номеров, т.е. в виде числовой последовательности

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots.,\ x_к,\ \ldots \qquad (1.2)$$

При $к>n$ значение $x_к$ следует за x_n независимо от того, будет ли само число $x_к$ больше, меньше или равно x_n.

Упорядочение значений переменной x_n по возрастанию их номеров, приведшее к рассмотрению последовательности (2) этих значений, облегчает понимание «процесса» приближения переменой x_n (при безграничном возрастании n) к ее пределу a.

Определение. Постоянное число a называется пределом переменной величины x, если для любого наперед заданного сколь угодно малого числа ϵ можно указать такое значение переменной x, что все последующие значения переменной будут удовлетворять неравенству:

$$|x-a| < \varepsilon$$

Символически: $lim\, x = a$

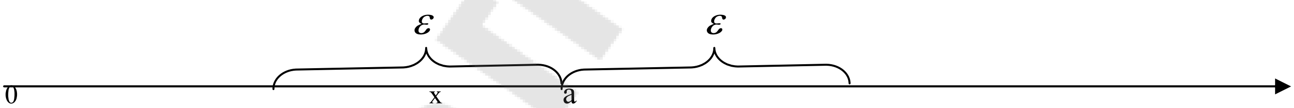
Пример: $x_1 = 1 + 1,\ x_2 = 1 + \frac{1}{2,},\ x_3 = \frac{1}{3},\ \ldots.,\ x_n = 1 + \frac{1}{n},\ \ldots$

Покажем, что эта переменная величина имеет предел 1.

$$|x_n - 1| = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right| = \frac{1}{n}$$

Для любого ϵ все последующие значения переменной, начиная с номера n, где $\frac{1}{n} < \varepsilon$ или $n > \frac{1}{\varepsilon}$ будут удовлетворять неравенству $|x-1| < \varepsilon$ в геометрических терминах.

Постоянное число a есть предел переменной величины x, если для любой наперед заданной сколь угодно малой окрестности с центром в точке a и радиусом ϵ найдется такое значение x, что все точки, соответствующие последующим значениям переменной, будут находится в этой окрестности

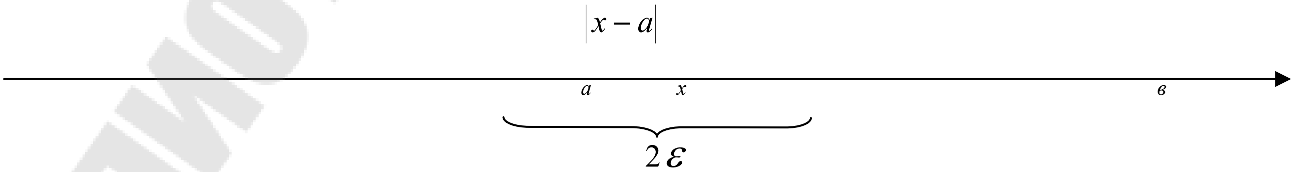


Переменная величина не может иметь двух пределов. Допустим противное – имеет два предела:

$limx = a$, $limx = в$

$|x\text{-}a|<\varepsilon$, $|x\text{-}в|< \varepsilon$.

Но этого не может быть, если $\varepsilon < \frac{в-a}{2}$



Но не все переменные величины имеют предел. Рассмотрим следующий пример: $x_1 = \frac{1}{2},\quad x_2 = 1-\frac{1}{4},\quad x_3 = \frac{1}{8},\ \ldots.$

$x_{2к} = 1 - \frac{1}{2^{2\kappa}}, x_{2к+1} = \frac{1}{2^{2\kappa+1}}$

$x_{2к} \longrightarrow 1, \quad x_{2к+1} \rightarrow 0$

Определение. Переменная величина x стремиться к бесконечности, если для каждого наперед заданного положительного числа M можно указать такое значение x, начиная с которого все последующие значения переменной удовлетворяют неравенству $|x| > M$.

Пример: $x_1=-1, \quad x_2=+2, \quad x_3=-3, \quad x_4=4, \quad \ldots, \quad x_n=(-1)^n n, \ldots$

1.4. Предел функции

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окресности точки a. Функция $y = f(x)$ стремиться к пределу $в$ $y \to b$ при $x \to a$. Если для любого сколь угодно малого положительного числа ε, можно указать такое положительное δ, что для всех x удовлетворяющих неравенству:

$$|x - a| < \delta$$

имеет место неравенство:

$$|f(x) - b| < \varepsilon .$$

Тот факт, что b есть предел функции $f(x)$, обозначается символически так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

или так: $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Если $f(x) \to b_1$ при $x \to a$ так, что x принимает значения только меньшие a, то этот факт символически обозначим так:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = в_1$$

Аналогично определяем $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = в_2$

Если предел слева и справа равен $в$, то $в$ – предел в смысле выше приведенного определения.

Замечание. Для существования предела функции при $x \to a$ не требуется, чтобы функция была определена в точке $x = a$.

Пример. $\lim \dfrac{(x^2 - 9)}{x - 3} = \lim \dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3} = 6$.

$x \to 3$ $\qquad$ $x \to 3$

Но функция в точке *x=3* не определена.

Доказательство.

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon \qquad (1.3)$$

$$|x - 3| < \varepsilon \qquad (1.4)$$

При любом x (1.3) выполняется, если выполняется (1.4)

Определение. Функция *f(x)* стремится к пределу b при $x \to +\infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε для всех значений *x*, удовлетворяющих неравенству: $|x| > N$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - в| < \varepsilon$$

Символически: *lim f (x) = в*
$x \to a$

Аналогично определяется смысл выражения *lim f (x) = в*
$x \to a$

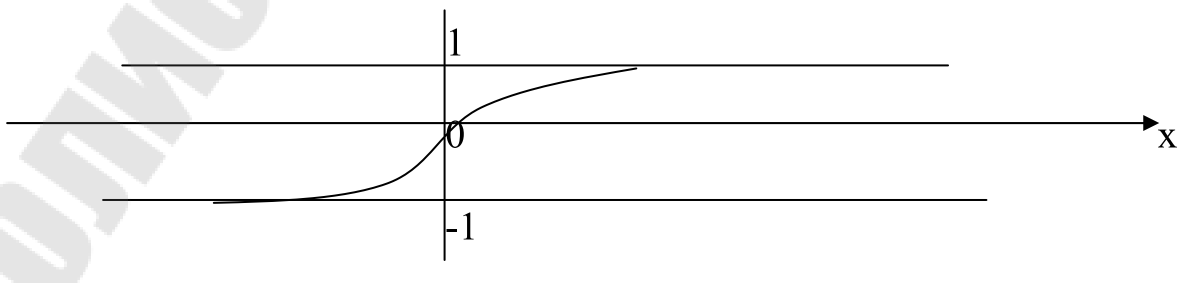
Определение. Функция *f(x)* стремится *к* +∞ (или -∞) при $x \to a$ (т.е. является бесконечно большой величиной при $x \to a$) если для любого сколь угодно большого числа *M* можно найти такое $\delta > 0$, что для всех значений *x*, отличных от *a* и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$ имеет место неравенство:

$$|f(x)| > M$$

Символически: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

1.5. Ограниченные функции. Свойства ограниченных функций

Функция *f(x)* называется ограниченной в данной области изменения аргумента *x*, если для числа *M>0* для любого *x* из данной области выполняется неравенство: $|f(x)| \le M$



Функция *f(x)* называется ограниченной при $x \to a$, если существует окрестность с центром в точке *a*, в которой данная функция ограничена.

Функция $f(x)$ называется ограниченной при $x \to a$, если существует такое число $N > 0$, что при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$ функция $f(x)$ ограничена.

Теорема 1.1. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ при этом b есть конечное число, то функция $f(x)$ является ограниченной при $x \to a$.

Доказательство.
$\lim f(x) = b$ при $x \to a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$,

что в окрестности $a - \delta < x < a + \delta$

выполняется неравенство:

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

или $|f(x)| < |b| +$. Последнее означает ограниченность.

Теорема 1.2. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = в \neq 0$, то функция $f(x)$ есть ограниченная функция при $x \to a$.

Доказательство. Из условия $\exists\, \epsilon > 0$ в окрестности точки $x=a$ имеем:
$|f(x) - в| < \epsilon$ или $\big||f(x)| - |в|\big| < \epsilon$ имеем $-\epsilon < |f(x)| - |в| < +\epsilon$ или $|в| - \epsilon < |f(x)| < |в| + \epsilon$
отсюда следует: $\dfrac{1}{|в| - \epsilon} > \dfrac{1}{|f(x)|} > \dfrac{1}{|в| + \epsilon}$, а это значит, что функция $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена.

1.6. Бесконечно малые величины и их свойства

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$).

Пояснения: если $\lim \alpha(x) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству: $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|\alpha(x)| < \varepsilon$$

Пример. $\alpha = (2x-1)^3$ – бесконечно малые при $x \to \frac{1}{2}$, т.к.

$$\lim \alpha = \lim (2x-1)^3 = 0.$$

Теорема 1.3. Если функция $f(x) = в + \alpha$, где $в$ – $const$ и α - бесконечно малая, то $\lim f(x) = в$.

$x \to a$

Обратно, если $\lim f(x)=в$, то $f(x) = в+\alpha$, где α - бесконечно малая.

$x \to a$

Доказательство. Пусть $f(x)=в+\alpha \Rightarrow |f(x)-в|=|\alpha|$ начиная с некоторого значения, удовлетворяет соотношению $|\alpha| < \varepsilon$. Значит, все значения $f(x)$, начиная с некоторого, будет выполняться $|f(x)-в| < \varepsilon$, а это значит
$\lim f(x)=в.$

Обратно, пусть $\lim f(x)=в$. Это значит $\forall\ x \to a > 0 \quad \exists\delta > 0$, то как только

$x \to a$

$|x-a| < \delta$ выполняется: $|f(x)-в| < \varepsilon$

Обозначим: $f(x)-в = \alpha$, где ε есть бесконечно малая

Теорема 1.4. Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ (или при $x \to \infty$) и не обращается в 0, то $\dfrac{1}{\alpha(x)} \to \infty$.

Доказательство. При любом как угодно большом $M>0$ выполняется неравенство $1/|\alpha| > M$, если только выполняется $|\alpha| < 1/M$, а последнее неравенство будет выполняться для всех значений α, начиная с некоторого, т.к. $\alpha\ (x) = 0$.

Теорема 1.5. Алгебраическая сумма n бесконечно малых есть бесконечно малая

$\alpha\ (x)+\beta(x)+.....+\gamma(x)$ - бесконечно малая.

Доказательство. Докажем для двух (для n слагаемых доказательство аналогично).

$u(x)= \alpha(x)+\beta(x);\ \lim\limits_{x \to a} \alpha\ (x)=0,\quad \lim\limits_{x \to a} \beta(x)=0$

Найдется δ_1 такое, что в окрестности с центром в точке a и радиусом δ_1 выполняется:

λ

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Аналогично $\exists\delta_2$ такое, что в окрестности точки a радиуса δ_2 выполняется:

$$|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Возьмем $\delta=min\ (\delta_1,\ \delta_2)$. В окрестности точки a с радиусом δ выполняется:

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда $|u|=|\alpha\ (x)+\ \beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad |u| < \varepsilon.$

Аналогично доказывается и для случая, когда

$\lim\limits_{x \to \infty} \alpha\ (x)=0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} \beta(x)=0$

Теорема 1.6. $\mathcal{L}(x)\cdot z(x)$, где $\mathcal{L}(x)$ бесконечно малая и $z(x)$ – ограниченная функция, есть бесконечно малая при $x \to a$ (или ∞).

Доказательство. Проведем для $x \to a$ ($x \to \infty$ аналогично).

Для некоторого $M>0$ найдется окрестность точки $x=a$, в которой выполняется неравенство $|z|<M$. Для $\forall\, \epsilon > 0$ найдется окрестность, в которой выполняется $|\mathcal{L}| < \epsilon \,/\, M$. В наименьшей из этих двух окрестностей выполняется $|\mathcal{L}| < \epsilon \,/\, M$ и $|z|<M$.

Тогда выполняется:

т.е. $\mathcal{L}\cdot z$ – бесконечно малая.

Следствие 1. $\left.\begin{matrix}\lim \mathrm{L} = 0 \\ \hline \lim \mathrm{L} = 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim \mathrm{L}\beta = 0$

(Это справедливо для любого конечного числа множителей)

Следствие 2: $\left.\begin{matrix}\lim \mathrm{L} = 0 \\ \hline C - const\end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim C\mathrm{L} = 0$

Теорема 1.7. $\dfrac{L(x)}{z(x)}$ *– частное* от деления бесконечно малых $\mathcal{L}(x)$ на функцию $z(x)$ предел которой отличен от нуля, есть бесконечно малая величина.

Доказательство. Пусть $\lim \mathcal{L}(x)=0, \quad \lim z\,(x)=в\neq 0$

По теореме 1.2 $1/z(x)$ – ограниченная величина.

$L(x)/z(x) = L(x) \bullet \dfrac{1}{z(x)}$ бесконечно малая по теореме 1.6.

1.7. Теоремы о пределах переменных величин

Теорема 1.8. $\lim\,(u_1+\ldots+u_к)=\lim u_1+\ldots+\lim u_к,$

$u_1, u_2, \ldots, u_к$ – переменные.

Доказательство.

Пусть $lim\ u_1=a_1,\ ...,\ lim\ u_к=a_к$. По теореме 1.1: $u_1=a_1+\mathscr{L}_1,\ ...,\ u_к=a_1+\mathscr{L}_к$, где $\mathscr{L}_1,\ ...,\ \mathscr{L}_к$ – бесконечно малые.

$u_1+\ u_2=(a_1+a_2)+(\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2),\ a_1+a_2$-$const$, $\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_2$ – бесконечно малые по теореме 1.3.

Теорема 1.9. $lim\ u_1 \cdot u_2 \ ...\ u_к = lim\ u_1 \cdot lim\ u_2\ ...\ lim\ u_к$

$u_1,\ u_2,\ ...,\ u_к$ – переменные

Пусть $lim\ u_1=a_1,\ ...,\ lim\ u_к=a_к$

$u_1=a_1+\mathscr{L}_1,\ ...,\ u_к=a_к+\mathscr{L}_к$

a_1a_2 – $const$, $a_1\mathscr{L}_2+a_2\mathscr{L}_1+\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2$ – бесконечно малая.

Отсюда следует: $lim\ U_1 U_2=a_1a_2=lim\ U_1 \cdot limU_2$

<u>Следствие:</u> $lim\ c\ u = c\ lim\ u$, u – переменная, c – $const$.

Теорема 1.10. $\lim \frac{u}{V} = \frac{\lim u}{\lim V}$, если $lim\ V \neq 0$

Доказательство. $lim\ u = a$, $lim\ V = в \neq 0$, $u = a + \mathscr{L}$, $V = в+\beta$.

$$\frac{u}{V} = \frac{a+L}{в+\beta} = \frac{a}{в} + \left(\frac{a+L}{в+\beta} - \frac{a}{в}\right) = \frac{a}{в} + \frac{Lв-\beta a}{в(в+\beta)}$$

$\frac{a}{в}$ – $const$, $\frac{Lв - \beta a}{в(в+\beta)}$ – *б.м.* отсюда следует:

$$\lim \frac{u}{V} = \frac{a}{в} = \frac{\lim u}{\lim V}$$

Аналогично для случая, когда $n > 2$.

Теорема 1.11. Пусть выполняется $u \le z \le V$, $lim u = lim V = a$. Тогда $\lim z = a.$.

Теорема 1.12. Пусть пределы функции $u(x)$ и $\nu(x)$ равны соответственно u и ν и пусть между соответствующими значениями функции выполняется соотношение: $\nu(x) \ge u(x)$. Тогда

$lim\ \nu(x) \ge lim\ u(x)$.

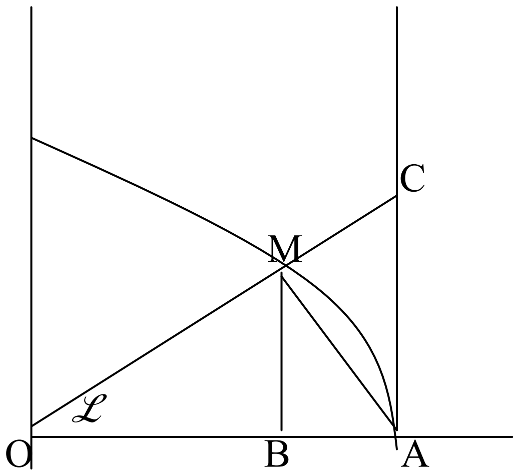
Доказательство.

$\nu(x)$ - $u(x) \ge 0 \Rightarrow lim\ [\nu(x) - u(x)] \ge 0 \Rightarrow lim\ \nu(x)$ - $lim\ u(x) \ge 0 \Rightarrow lim\ \nu(x) \ge lim\ u(x)$.

Теорема 1.13. Если переменная величина $V(x)$ возрастает и ограничена ($V(x) < M$ – константа), то $V(x)$ имеет предел $\lim V = a$, где $a \leq$ M.

1.8. Предел функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

(Первый замечательный предел)



Площадь сектора $MOA = \frac{1}{2} OA \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x$

Площадь $\Delta C\text{OA} = \frac{1}{2}\text{OA} \cdot C\text{A} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot tgx$

Из 1 имеем: $\sin x < x < tg\, x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim 1 = 1. \quad \lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

По теореме 9: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

1.9. Второй замечательный предел

Лемма. Переменная величина $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ имеет предел, заключенный между 2 и 3.

Доказательство. Воспользуемся формулой бинома Ньютона

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

при возрастании n переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает. Покажем, что она ограничена.

Так как $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1, \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1,.....,$

то получим $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$

$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}; \quad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3},\ldots,\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ - геометрическая прогрессия, $q=\frac{1}{2}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]<3.$$

Очевидно $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$. По теореме 1.13 эта переменная имеет предел.

Определение. Предел переменной величины $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \longrightarrow \infty$ называется числом e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$$

Позже укажем метод для вычисления числа $e \approx 2{,}7182818284\ldots$

Теорема 1.14. Функция $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ стремится к пределу e при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство. Пусть x стремиться к ∞ принимая как дробные, так и отрицательные значения 1) $x\to+\infty$.

Очевидно $n \leq x < n+1$, $\frac{1}{n}\geq\frac{1}{x}\geq\frac{1}{n+1}$,

$$1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} \ge 1+\frac{1}{n+1}; \qquad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}; \qquad x \to \infty,\ n \to \infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

По теореме 1.11:

$$\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

2) $x \to -\infty$ Введем переменную $t = -(x+1) \Rightarrow x = -(t+1);\ t \to \infty \Rightarrow x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} \cdot \left(1+\frac{1}{t}\right)\right]$$

Следствие. $\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}$. Доказательство вытекает, если положить: $y = \dfrac{1}{x}$

Логарифмы с основанием e называют натуральными и обозначают: $y = \ln x$.

1.10. Сравнение бесконечно малых

Определения.

1. Если $\dfrac{\beta}{\alpha} = A$ - константа, отличная от нуля, то говорят, что β и α - бесконечно малые одного порядка.

2. Если $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, то β называется бесконечно малой высшего порядка чем α, а бесконечно малую $\mathscr{L}$ называют бесконечно малой низшего порядка чем β.

3. Если $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k}$ то β называют бесконечно малой $к - го$ порядка относительно бесконечно малой α.

4. Если $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$, то бесконечно малые β и α называются *эквивалентными.*

Теорема 1.15 (об эквивалентности бесконечно малых).

Бесконечно малые α, β являются эквивалентными бесконечно малыми тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta$ есть бесконечно малая высшего порядка, чем бесконечно малая α и бесконечно малая β.

Доказательство.

1) $\lim \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha} - \lim\left(1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\right) = 1 - \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$

2) Пусть $\lim \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha} = 0 \Rightarrow \lim\left(1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\right) = 0,$

$1 - \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0, \quad \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1,$ т.е. $\beta \approx \alpha$. Аналогично, если $\lim \dfrac{\alpha - \beta}{\beta} = 0$, то $\lim\left(\dfrac{\alpha}{\beta} - 1\right) = 0, \ \lim \dfrac{\varepsilon}{\beta} = 1; \quad \beta \approx \alpha$.

1.11. Непрерывность функций

Пусть функция *y=f(x)* определена при некотором значении x_0 и в некоторой окрестности с центром в точке x_0 и пусть $y_0=f(x_0)$.

Если придать *x* некоторое приращение Δx, то и *y* примет некоторое приращение Δy. Старое значение $y_0=f(x_0)$, новое значение $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$; $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

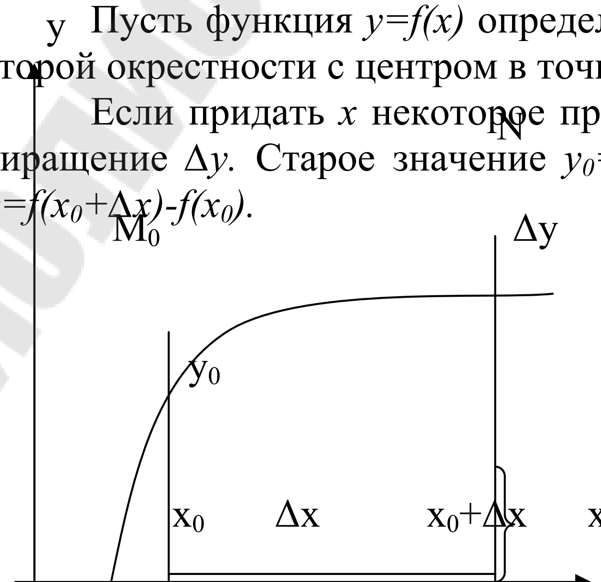
Функция *y=f(x)* называется непрерывной при $x=x_0$ (или в точке x_0), если она определена в некоторой окрестности точки x_0 (и в самой точке) и если $\lim \Delta y=0$

$\Delta x \qquad 0$

или иначе

$\lim f(x)=f(x_0)$

$x \qquad x_0$



Пример: $y = \cos x$. $y_0 = \cos x_0$; $y_0 + \Delta y = \cos(x_0 + \Delta x)$.

$$\Delta y = \cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0 = 2\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin\frac{\Delta x}{2} = 0$$

Функция $\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ ограничена. По теореме (о произведении бесконечно малых на ограниченность): $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$

Теорема 1.16. Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке x_0, то $\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$ – непрерывна в точке x_0.

Доказательство. $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$

По соответствующей теореме о пределах:

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0) = \varphi(x_0)$$

Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Свойства непрерывных функций:

1. Произведение двух непрерывных функций есть функция непрерывная.
2. Частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная, если знаменатель не обращается в нуль в рассматриваемой точке.
3. Если $u = V(x)$ в точке $x = x_0$ непрерывна $f(u)$ – непрерывна в $u_0 = V(x_0)$, то сложная функция $f[V(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство (1) и (2) очевидно. Докажем пункт 3.

$$\lim_{u \to u_0} \Delta f = \lim_{u \to u_0} f[v(x)] = \lim f[v(x)] = f[v(x_0)]$$

т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = (x_0)$, то $v(x) \to v(x_0)$ при $x \to x_0$

$$\lim_{v(x) \to v(x_0)} f[v(x)] = \lim_{x \to x_0} f[v(x)] = f[v(x_0)]$$

Определение.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a,b), то говорят что функция непрерывна на этом интервале.

Если функция определена при $x = a$ и $\lim f(x) = f(a)$, то говорят что $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ справа. Если функция определена при $x = b$ и $\lim f(x) = f(b)$, то говорят что $f(x)$ непрерывна в точке $x = b$ слева.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервала (a,b), и непрерывна на концах интервала соответственно справа и слева, то говорят что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a,b].

1.12. Классификация точек разрыва функции

Точки, в которых функция не обладает свойствами непрерывности, называются точками разрыва функции.

Типы разрывов:

1) <u>Устранимый разрыв</u>: Точка a называется точкой устранимого разрыва функции $y=f(x)$, если предельное значение функции в этой точке существует, но в точке a функция или не определена или ее частное значение $f(a)$, в точке aне равно предельному значению.

Пример:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

точка 0 имеет разрыв. Такой разрыв можно устранить. Для этого надо положить $f(x)=1$. Тогда $\lim f(x)=f(0)=1$ и функция непрерывна в точке $x=0$.

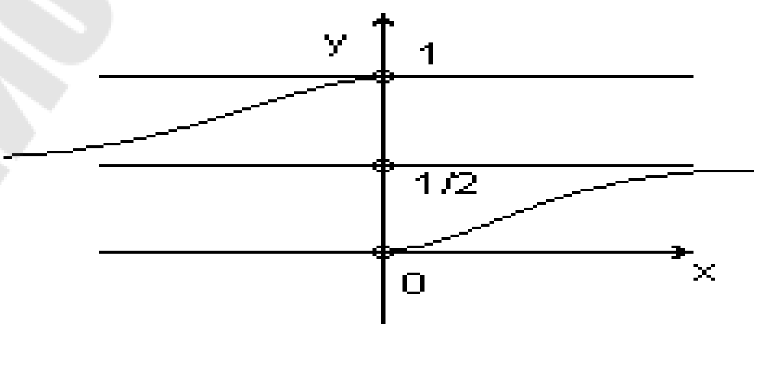
2) <u>Разрыв 1-го рода</u>: Точка a называется разрывом первого рода, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные друг другу правые и левые пределы значения.

$$\lim_{x\to a+0} f(x)\neq \lim_{x\to a-0} f(x)$$

Пример:

$f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ В точке $x=0$ – разрыв.

Предел справа и слева не равны: $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=1$



3) Разрыв 2-го рода: Точка a называется точкой разрыва второго рода, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет по крайней мере одного из односторонних пределов, и если хотя бы одно из односторонних предельных значений бесконечно.

Пример:

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не имеет правого и левого предельных значений в точке $x=0$.

$y = ctgx$ имеет разрывы точках πn $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

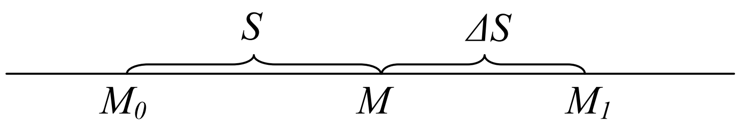
ГЛАВА 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

2.1. Механический и геометрический смысл производной. Определение производной. Правило нахождения производ ной

Пусть имеется твердое тело, которое движется прямолинейно. Абстрагируясь, мы будем в дальнейшем считать движение точки M. Расстояние S от начального положения M_0 зависит от времени t:

$$S=f(t)$$

Тогда в следующий момент времени t+Δt точка будет находится в положении M_1 на расстояние $S+\Delta S$ от M_0.



За промежуток времени *Δt* величина *S* получила приращение *ΔS.*

$V_{cp}=\frac{\Delta S}{\Delta t}$ это средняя скорость движения точки за время *Δt*.

Для более точного выражения истинной скорости с помощью средней скорости надо брать меньший промежуток времени *Δt*. Наиболее плотно характеризует скорость точки в момент времени *t*, предел к которому стремится средняя скорость движения в данный момент.

$$V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (2.\text{I})$$

Из (2.I) получим: $V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$ (2.I′)

Из (2.I′) получим: *V* не зависит от *Δt,* а зависит от значения *t* и *f(t)*.

Определение производной.

Пусть имеем функцию *y=f(x)*. *x* получает *Δx.* Тогда при значении аргумента *x+Δx* имеем: *y+Δy= f(x+Δx)*.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда *Δx→0* $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ называется производной функции *f(x)* и обозначается *f'(x)*.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Другие обозначения: $y', y'_x, \frac{dy}{dx}$.

Операция нахождения производной *f'(x)* от функции *f(x)* называется дифференцированием.

Пусть имеем кривую и точку M_0. Возьмем точку M_1 и проведем секущую M_0M_1. Если $M_1\to M_0$ по кривой, то секущая стремиться занять положение касательной M_0T.

Обозначим угол φ между секущей и 0x. Из чертежа видно, что $\frac{dy}{dx}=tg\varphi$

Если $\Delta x \to 0$, то точка $M_1 \to M_0$, $<\varphi \to <\alpha$

Правило нахождения производной.

а). Придать x приращение Δx, вычислить $y+\Delta y$;

б). $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

в). $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

г). $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \qquad f'(x) = tg\alpha \qquad (2.2)$$

2.2. Дифференцируемость функции.

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке $x=x_0$, т.е. если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то говорим, что при $x=x_0$, функция $f(x)$ дифференцируема (т.е. имеет производную). Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке некоторого отрезка [a,b], то говорят что она дифференцируема на отрезке [a,b] соответственно.

Теорема 2.1. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x=x_0$, то она в этой точке непрерывна.

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0),\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\beta,\qquad \text{где}\quad \beta\to 0\quad \text{при}\quad \Delta x\to 0,$$

$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\beta\cdot\Delta x$, $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, т.е. $\lim\Delta y=0$, а это означает непрерывность функции $f(x)$.

Вывод. В точке разрыва функция не имеет производных. Обратное неверно т.е. из непрерывности не следует дифференцируемость.

Пример. $f'(x)=\begin{cases}x \\ 2x-1\end{cases}$ при $\begin{matrix}0\le x\le 1\\ 1<x\le 2\end{matrix}$

при $\Delta x>0$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\Delta x}{\Delta x}=2$

при $\Delta x<0$: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$

2.3. Таблица производных.

1. $y=x^n$

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$$

$$\Delta y=x^n+\frac{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot x^{n-2}\cdot(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n-x^n$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}\cdot\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

$y'=nx^{n-1}$;

2. *y=sin x, y'=cos x;*
3. *y= cos x, y'=- sin x;*
4. *y= c - const, y'=0;*
5. *y= u(x)+… +v(x) , y'= u'(x)+… +v'(x);*
6. *y= uv , y'= u'v+v'u;*
   y= uv… w , y'= u'v…w+v'u…w+vu…w'.
7. $y=\dfrac{u}{v}$, $y=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

2.4. Производная функции $y=\log_a x$

$$y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right);$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\cdot\frac{x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

Обозначим $\frac{\Delta x}{x}=\alpha$; $\Delta x\to 0\Rightarrow\alpha\to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{2}};$$
$$y'=\lim\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{x}\log_a e \quad \text{или} \quad y'=\frac{1}{x\ln a}$$
частный случай $y=\ln x$, $y'=\frac{1}{x}$

2.5. Производная сложной функции

Теорема 2.2. Пусть $u=\varphi x$ имеет в некоторой точке x_0 производную $u_x^{'}=\varphi'(x)$, а функция $y=F(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y'=F'(u)$. Тогда функция $y=F[\varphi(x)]$ имеет в указанной точке x_0 производную, которая равна:

$y'_x=F'_u(u)\varphi'(x)$ или короче $y'_x=y'_u u'_x$

Доказательство.

$u+\Delta u=\varphi(x+\Delta x)$; $y+\Delta y=F(u+\Delta u)$.

При $\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta u\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0$

Дано $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u$; $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u+\alpha$ -Б.М.

$$\Delta y=y'_u\Delta u+\alpha\Delta u;\quad \frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_u\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}y'_u\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u u'_x;\qquad y'_x=y'_u u'_x$$

Пример. $y=\cos(x^3)$; обозначим $x^3=u$; $y=\cos u$.

$$y'_x=y'_u u'_x=(-\sin u)\cdot 3x^2=-3x^2\sin x^3\cdot$$

2.6. Производные функций: *y=tg x; y=ctg x; y=ln |x|.*

1. $y=tg\,x$; $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

2. $y=ctg\,x$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ - аналогично.

3. $y=ln\,|x|$;

а) $x > 0 \Rightarrow y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$

б) $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$, $y=ln\,u$; $y'_x = y'_u u'_x = \frac{1}{u}\cdot(-1) = \frac{1}{-x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$

2.7. Производная функции, заданной неявно

Пример. 1) $x^2+y^2-R^2=0$; 2) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$;

Найдем производную y'_x не преобразовывая $x^2+y^2= R^2$ в явную функцию. Дифференцируем обе части по x, считая, что y есть функция от x: $2x+2yy'=0$; $y' = -\frac{x}{y}$.

2.8. Производная степенной функции $y = x^n$ для любого действительного числа.

1) x>0. Логарифмируем: $\ln y = n \ln x$. Дифференцируем как неявную функцию: $\frac{1}{y}\cdot y' = n\frac{1}{x}$; $y' = yn\frac{1}{x} = x^n n\frac{1}{n} = nx^{n-1}$

$y=a^x$ (показательная функция)

$\ln y = x \ln a$; $\frac{1}{y}y' = \ln a$; $y' = y \ln a$; $y' = a^x \ln a$

Частный случай: $(e^x)' = e^x \ln e = e^x$

$$y = [u(x)]^{v(x)}$$

$$\ln y = v(x)\ln[u(x)]; \quad \frac{1}{y}y' = v(x)\frac{1}{u(x)}u'(x) + v'(x)\ln[u(x)];$$

$$y' = u(x)^{v(x)}[v(x)\frac{u'(x)}{u(x)} + v'(x)\ln u(x)] = vu^{v-1} + u^v v' \ln u$$

2.9. Обратная функция и ее производная.

y=f(x). Пусть возрастает или убывает $x=\varphi(y)$ – обратная функция. Если $f(x)$ возрастает (убывает) и непрерывна на отрезке [a,b], то $x=\varphi(y)$ определена и непрерывна на [c,d] где $f(a)=c$, $f(b)=d$.

Теорема2.3. Пусть для *f(x)* существует обратная *x=φ(y)* и которая в рассматриваемой точке *y* имеет производную $x'_y = \varphi'(y) \neq 0$. Тогда в соответствующей точке *x* функция *y=f(x)*имеет производную *y'=f'(x)* и $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(x)}$.

Доказательство.

$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$, т.к. $\Delta x \neq 0$, то: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x / \Delta y}$; $y'_x = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$

а) *y=arcsin x;*

Обозначим: *x=sin y*; $x'_y = \cos y$; $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

б) Аналогично *y=arccos x;* $y'_x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

в) *y=arctg x;*

Обозначим: *x=tg y*; $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$; $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \cos^2 y$; $\cos^2 y = \dfrac{1}{\sec^2 y} = \dfrac{1}{1+tg^2 y}$;

$tg^2 y = x^2$; $y'_x = \dfrac{1}{1+x^2}$

г) Аналогично *y=arcctg x;* $y'_x = -\dfrac{1}{1+x^2}$

2.10. Производная функции заданной параметрически.

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}$$

Допустим $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(t)$. Тогда каждое значение *x* соответствует значению *t*, каждое значение *t* соответствует значению *y*, т.е. *y* есть функция от *x*.

$$x = \varphi[\Phi(x)]$$

Пример. $x^2 + y^2 = R^2$

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{aligned}\right\} \quad x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2; \; x^2 + y^2 = R^2$$

Допустим, что $t_0 \leq t \leq T$ и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеют производные. $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$; $y = \varphi[\Phi(x)]$

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \varphi'_t(t) \cdot \Phi'_x(x)$$

$$\Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}; \quad y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'_t(t)}; \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

2.11. Производные гиперболических функций.

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

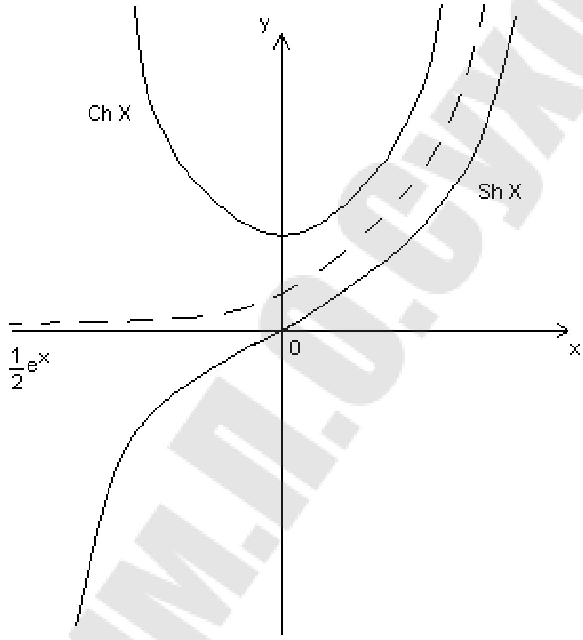
$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$thx = \frac{shx}{chx}$$

$$(shx)' = chx$$

$$(chx)' = shx$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$$



2.12. Дифференциал. Геометрический смысл

Пусть *y=f(x)* дифференцируема на отрезке [a,b]. Пусть производная в некоторой точке xЄ[a,b] равна:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ стремится к $f'(x)$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от $f'(x)$ на величину α - бесконечно малую: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x \quad (2.3)$$

Рассмотрим предел $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim \alpha = 0$. Поэтому $\alpha \Delta x$-бесконечно малая высшего порядка относительно Δx.

В (2.3) два слагаемых: первое (при $f'(x) \neq 0$) есть главная линейная часть приращения: $f'(x)\Delta x$ обозначается через *dy*:

$$dy = f'(x)\Delta x \quad (2.4)$$

Дифференциалом функции *y=f(x)* называется производной *f'(x)* в точке *x* на Δx.

Примеры:

1) $y = x^2$; $y' = 2x^2$; $\Delta x = dx$; $dy = 2xdx$

2) $y = x$; $y' = x' = 1$; $dy = dx = \Delta x$; или $dx = \Delta x$

$$dy = f'(x)\Delta x \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy}{dx} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1$$

В приближенных вычислениях пользуются формулой: $\Delta y \approx dy$ или $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

Примеры.

1) Вычислить arctg0,2

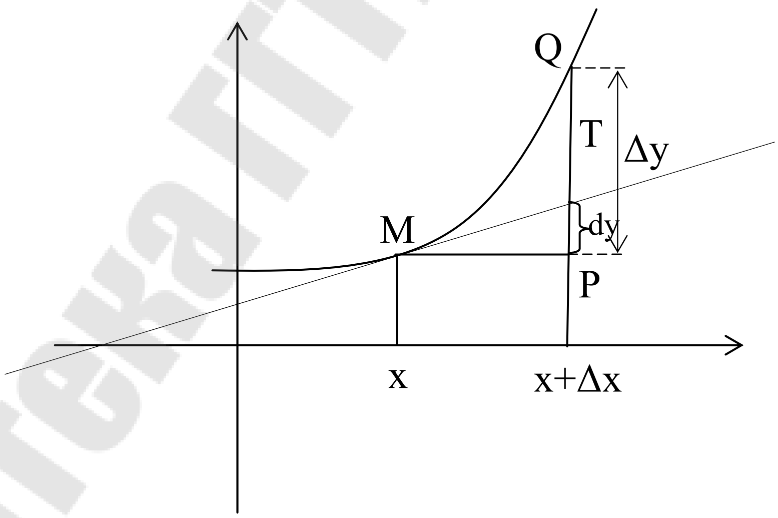
$arctg(x+\Delta x) = arctg(x) + arctg(x)'\Delta x$ x=1, $\Delta x = 0.02$

$$arctg1.02 = arctg1 + \frac{1}{1+x^2}\Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{1+1}\cdot 00.2 = \frac{\pi}{4} + 00.1 = 0{,}795$$

2) Вычислить $f(x) = \sqrt{x}$

$\sqrt{x+\Delta x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$ Положим $\Delta x = \alpha$, x=1. Тогда $\sqrt{1+\alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha$

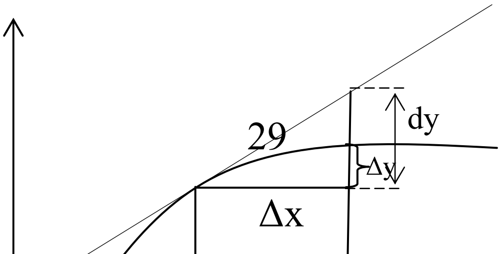
Большинство формул и теорем, доказанных для производных, сохраняются и для дифференциалов.



PT=MPtgα; MP=Δx; tgα=f'(x); PT= f'(x) f'(x);

Но f'(x) – это дифференциал. Отсюда получаем что *PT= dy*.

Не всегда *Δy>dy*. Бывает и наоборот. (см. чертеж).



2.13. Производные различных порядков.

$$y'' = (y')' = f''(x), \ldots, \; y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = f^{(n)}(x)$$

Пример. $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = \cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \ldots; \quad y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Для n-ой производной сохраняются все правила дифференцирования, например $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$.

2.14. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема 2.4 (теорема Роля о корнях производной).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], дифференцируема на всех внутренних точках этого отрезка и на концах обращается в нуль: $f(a) = f(b)=0$, то существует внутри отрезка [a, b] по крайней мере одна точка c, $a < c < b$, в которой производная функции $f'(x)$ обращается в нуль, т.е. $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], то $f(x)$ на этом отрезке принимает наибольшее значение M и наименьшее m. Если $M = m$, то $f(x)$-*const* и поэтому $f'(x)=0$. Полагаем что $M \neq m$. Тогда по крайней мере одно из этих чисел $\neq 0$. Положим (для определенности) $M>0$. Пусть $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке c:

$$f'(c) = M, \;\; (c \neq a, \;\; c \neq b, \text{ т.к } f(a) = f(b)=0)$$

т.к. $f(c)$ наибольшее значение функции, то $\Delta f(c+ \Delta x)- f(c) \leq 0$ как при $\Delta x=0$ так и при $\Delta x<0$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\le 0 \text{ при } \Delta x>0$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\ge 0 \text{ при } \Delta x<0$$

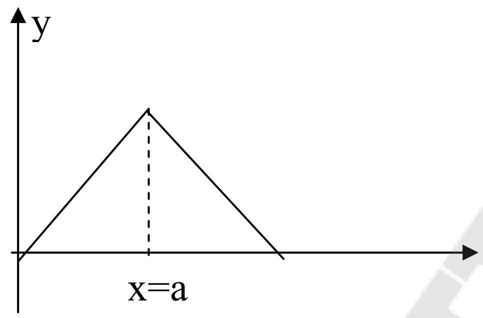
Производная при x=c существует по условию. Поэтому переходя у переделу при $\Delta x\to 0$, имеем:

$$f'(c)\le 0 \text{ и } f'(c)\ge 0 \Rightarrow f'(c)=0$$

Замечание 1.

Теорема справедлива и для такой дифференцируемой функции, которая на концах отрезка [a, b] не обращается в нуль, но принимает равные значения $f(a)=f(b)$.

Замечание 2. Для функции изображенной на чертеже утверждение не верно.



Теорема 2.5 (теорема Лагранжа о конечных приращениях).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b] и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка [a, b] найдется по крайней мере одна точка c $(a < c < b)$, что $f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$.

Доказательство. Обозначим:

$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

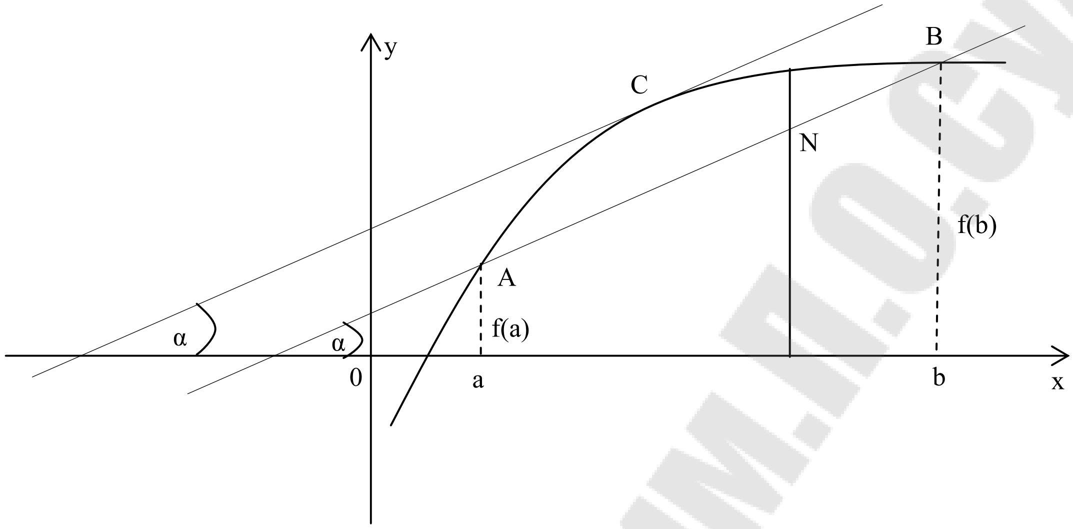
Рассмотрим некоторую вспомогательную функцию $F(x) = f(x)- f(a) -(x-a)Q$. Напишем уравнение хорды AB с угловым коэффициентом $Q=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ и проходящей через точку $(a,f(a)$.

$$y-f(a)=Q(x-a)$$

$$y=f(a)+Q(x-a)$$

$$F(x)=f(x)-[f(a)+Q(x-a)]$$

$F(x)$ для каждого значения x равняются разности ординат кривой $y=f(x)$ и хорды $y=f(a)+Q(x-a)$. $F(x)$ непрерывна и дифференцируема на отрезке [a,b] и обращается в нуль на концах отрезка, т.е. $F(a)=0$, $F(b)=0$, к *F(x)* применима теорема Роля, отсюда следует, что существует точка *c*, что $F'(c)=0$. $F'(x)=f'(x)-Q$, $F'(c)=f'(c)-Q=0$, $Q=f'(c)$. $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$



Теорема 2.6 (теорема Коши об отношении приращения двух функций).

Если две функции *f(x)* и *φ(x)* непрерывны и дифференцируемы внутри отрезка [a, b], *φ'(x)* нигде внутри отрезка [a, b] не обращается в нуль, то внутри [a, b] найдется такая точка *c*, что, a < c < b, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{\varphi'(\varepsilon)}.$$

Доказательство. Обозначим:

$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}, \qquad (2.5)$$

$\varphi(b)-\varphi(a)\neq 0$ т.к. в противном случае $f(b)=f(a)=0$ и теорема Роля: $\varphi(x)$ обращалась бы в нуль внутри отрезка.

Составим функцию *F(x) = f(x)- f(a) –Q[(φ(x)- φ(a)].* $F(a)=0$, $F(b)=0$

F(x) удовлетворяет на отрезке [a,b] условию теоремы Роля. Между *a* и *b* существует *c (a < c < b)*, что $F'(c)=0$. $F'(c)=f'(c)-Q\varphi'(c)$,

$$Q=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) получаем требуемое равенство.

2.15. Правило Лопиталя.

Пусть функции f(x) и φ(x) удовлетворяют теореме Коши и обращаются в нуль в точке x=a Є[a, b]

$$f(a)=\varphi(a)=0$$

$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не определено в точке *x=a*, но в точке x≠a , имеет смысл. Можно вычислить предел $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, при *x→a*. Вычисление этих пределов называется раскрытием неопределенностей $\frac{0}{0}$.

Например: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Теорема 2.7 (раскрытие неопределённостей вида $\frac{0}{0}$). Пусть *f(x)* и *φ(x)* непрерывны и дифференцируемы внутри отрезка [a, b], *φ'(x)* не обращается в нуль нигде внутри [a, b], $f(a)=\varphi(a)=0$. Тогда, если существует передел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Доказательство. Возьмем $x\in(a,b]$. По теореме Коши:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi(c)},\quad a<c<x.$$

$$f(a)=f(b)=0\Rightarrow\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

Если x→a, то и c→a. Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, то и $\lim\limits_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=A$; $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$; $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Теорема 2.8 (раскрытие неопределенностей $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть *f(x)* и *φ(x)* непрерывны и дифференцируемы при всех *x≠a* в окрестности точки *a,* причем *φ'(x)* не обращается в нуль, пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$ и пусть существует предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A \quad (2.7).$$

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$ (2.8)

Доказательство. В окрестности точки a возьмем две точки α и x так, чтобы $\alpha < x < a$ (или $a < x < \alpha$). По теореме Коши:

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)},\ (2.9)\ \ a<c<x.$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f(c)}{\varphi(c)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}\quad(2.10)$$

$$\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}};\qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\cdot\frac{1-\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}\quad(2.11)$$

Из (2.7) получим:

$$\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-A\right|<\varepsilon\quad(2.12)$$

$$A-\varepsilon<\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}<A+\varepsilon\quad(2.13)$$

Рассмотрим дробь:

$$\frac{1-\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}};\quad \begin{matrix} f(x)\to\infty \\ \varphi(x)\to\infty \end{matrix}\ \text{при}\ \begin{matrix} x\to\infty \\ x\to\infty \end{matrix}\quad \lim\frac{1-\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}=1$$

Пусть ε такое, что выполняется (2.12). При таком ε имеем из (2.13).

$$\left|\frac{1-\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}\right|<\varepsilon;\qquad 1-\varepsilon<\frac{1-\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}<1+\varepsilon\quad(2.14)$$

Теперь получим неравенство:

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon)<\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\cdot\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}<(1+\varepsilon)(A+\varepsilon)$$

Учитыва (2.11), теперь получим:

$$(A-\varepsilon)(1-\varepsilon) < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < (A+\varepsilon)(1+\varepsilon) \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$$

Замечание 1. Если $A=\infty$, то теорема остается справедливой.
Замечание 2. Теорема справедлива и для случая $x\to\infty$. В этом случае доказательство следует, если положить: $x=\frac{1}{z}$.

2.16. Раскрытие неопределённостей вида: $0\cdot\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty;\ \infty-\infty$

1. Неопределённость $0\cdot\infty$. Пусть выполняются следующие равенства: $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$. Теперь воспользуемся формулой:

$\lim[f(x)u(x)] = \lim\frac{u(x)}{\frac{1}{f(x)}}$. Данная неопределённость сводится к неопределённости, разобранной в пункте 2.20.

2. Неопределённости вида $0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty$ раскрываются следующим образом. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{u(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$.

Прологарифмируем выражение $y=f(x)^{u(x)}$, получим:
$\ln y = u(x)\cdot\ln f(x);\ \lim\ln y=\lim[u(x)\cdot\ln f(x)]$.

Пример. $\lim x^x$.

Решение. $y=x^x;\ \ln y = x\ln x$.

$$\ln(\lim y)=\lim\ln y=\lim[x\ln x],$$

$$\lim_{x\to a}[x\ln x]=\lim_{x\to a}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to a}\frac{1}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to a}(-x)=-\lim_{x\to a}x=0,$$

$\ln(\lim y)=0,\ \lim y=e^0=1,\ \lim x^x=1.$

Остальные неопределённости находятся аналогично.

2.17. Формулы Тейлора и Маклорена. Их приложение к разложению некоторых функций

Пусть функция $f(x)$ имеет производные вплоть до $(n+1)$-го порядка. Найдём полином $y = P_n(x)$, значения которого в точке $x = a$ равняются значению функции $f(x)$ в этой точке: $P_n(a) = f(a)$. Кроме того, $P_n'(a) = f'(a), \ldots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$.

Запишем полином в следующем виде:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n.$$

В результате дифференцирования получим:

$$P_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1},$$

. . . .

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot c_n.$$

$$f(a) = c_0;\ f'(a) = c_1;\ \ldots;\ f^{(n)}(a) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot c_n;$$

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{1}{1\cdot 2} f'(a),\ \ldots,\ c_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} f^{(n-1)}(a).$$

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Обозначим: $R_n(x) = f(x) - P_n(x);\ f(x) = P_n(x) + R_n(x)$.

Теперь получим равенство:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n(x).$$

Оценим $R_n(x)$ следующим образом:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x) \qquad (2.15)$$

Далее рассмотрим вспомогательную функцию:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} Q.$$

$$F(f) = f(x) - \frac{x-t}{1!} f'(t) - \ldots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q,$$

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1!} f''(t) - \ldots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t);$$

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} Q \tag{2.16}$$

Из (2.15) следует: $F(x) = 0$; $F(a) = 0$.

Далее, применяя теорему Ролля (для $a < \xi < x$), получим:

$$F'(\xi) = 0.$$

Из (2.16) следует:

$$-\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) + \frac{(x-\xi)^n Q}{n!} = 0;$$

$$Q = f^{(n+1)}(\xi); \; R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

При $a = 0$ получим частный случай формулы Тейлора – формулу Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{(x)^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{(x)^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x) \tag{2.17}$$

Приложение к разложению некоторых функций

1. $y = e^x$.

Применяем формулу (2.17):

$$f(0) = 1, \; f^k(0) = 1, \; k = 1, 2, \ldots, n$$

Получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

2. $f(x) = \sin x$.

$$f^{(k)}(x) = \sin(x + k \cdot \frac{\pi}{2}),$$

$$f(0) = 0, \; f^{(2m)}(0) = 0, \; f^{(2m-1)}(0) = \sin(m\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^{m-1}, \; m = 1, 2, \ldots$$

При $n = 2m$ получаем формулу:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots$$

ГЛАВА 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

3.1. Исследование функции на возрастание и убывание

Определение. Функция называется возрастающей па интервале, если на этом интервале большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Теорема 3.1. Справедливы утверждения :

1. Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a, b]$, возрастает на этом отрезке, то $f'(x) \geq 0$.

2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $f(x)$ возрастает на $[a, b]$.

Доказательство.

1. Пусть $f(x)$ возрастает. Отсюда следует, что

$f(x + \Delta x) > f(x)$ при $\Delta x > 0$,

$f(x + \Delta x) < f(x)$ при $\Delta x < 0$,

$\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$ в обоих случаях.

Значит, $\lim \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$ при $\Delta x \to 0$.Отсюда следует, что $f'(x) \geq 0$.

2. Пусть $f'(x) > 0$, $x \in (a, b)$. Возьмём $x_1 < x_2$. Применяя теорему Лагранжа, получим:

$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$ для $x_1 < c < x_2$.

Так как $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$, т.е. функция $f(x)$ возрастает.

Теорема 3.2. Справедливы утверждения:

1. Если функция $f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a, b]$, убывает на этом отрезке, то $f'(x) \leq 0$.

2. Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$, то $f(x)$ убывает на $[a, b]$.

Доказывается теорема аналогично, как и теорема 3.1 с очевидными изменениями.

3.2. Экстремумы функции

Определение. Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если в окрестности точки x_0 выполняется неравенство:

$$f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если в окрестности точки x_0 выполняется неравенство:

$$f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$$

Теорема 3.3 (необходимое условие существования экстремума)

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 максимум или минимум, то её производная в этой точке обращается в нуль:

$$f'(x_0) = 0.$$

Доказательство. Пусть в точке x_0 имеется максимум, т.е. $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$. Отсюда следует, что $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Теперь легко установить следующие соотношения:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0, \text{ если } \Delta x < 0;$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0, \text{ если } \Delta x > 0.$$

Далее, используя определение производной, а именно:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

получим, что $f'(x) \geq 0$, если $\Delta x \to 0-$,

$$f'(x) \leq 0, \text{ если } \Delta x \to 0+.$$

Но $f'(x)$ не зависит от способа стремления Δx к нулю. Следовательно, из последних двух неравенств вытекает: $f'(x_0) = 0$.

Точка x_0 называется *критической точкой*, или точкой *подозрительной на экстремум* функции $f(x)$, если производная $f'(x)$ в точке x_0 либо равна нулю, либо не существует.

Теорема 3.4 (достаточные условия существования экстремума)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_1 и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, сам – х ой точки x_1). Если при переходе через точку x_1 слева на право производная $f'(x)$ меняет знак с « – » на « + », то в точке

x_1 функция $f(x)$ имеет максимум. Если же $f'(x)$ меняет знак с « + » на « – », то в точке x_1 функция $f(x)$ имеет минимум.

Доказательство.

Пусть $f'(x) > 0$ при $x < x_1$, $f'(x) < 0$ при $x > x_1$.

Применяя теорему Лагранжа к разности $f(x) - f(x_1)$, получим:

$$f(x) - f(x_1) = f'(c)(x - x_1)$$

где $c \in (x, x_1)$.

1. Пусть $x < x_1$. Тогда

$$c < x_1,\ f'(c) > 0,\ f'(c)(x - x_1) < 0$$

Следовательно,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

т.е.

$$f(x) < f(x_1) \qquad (3.1)$$

2. Пусть $x > x_1$. Тогда

$$c > x_1,\ f'(c) < 0,\ f'(c)(x - x_1) < 0.$$

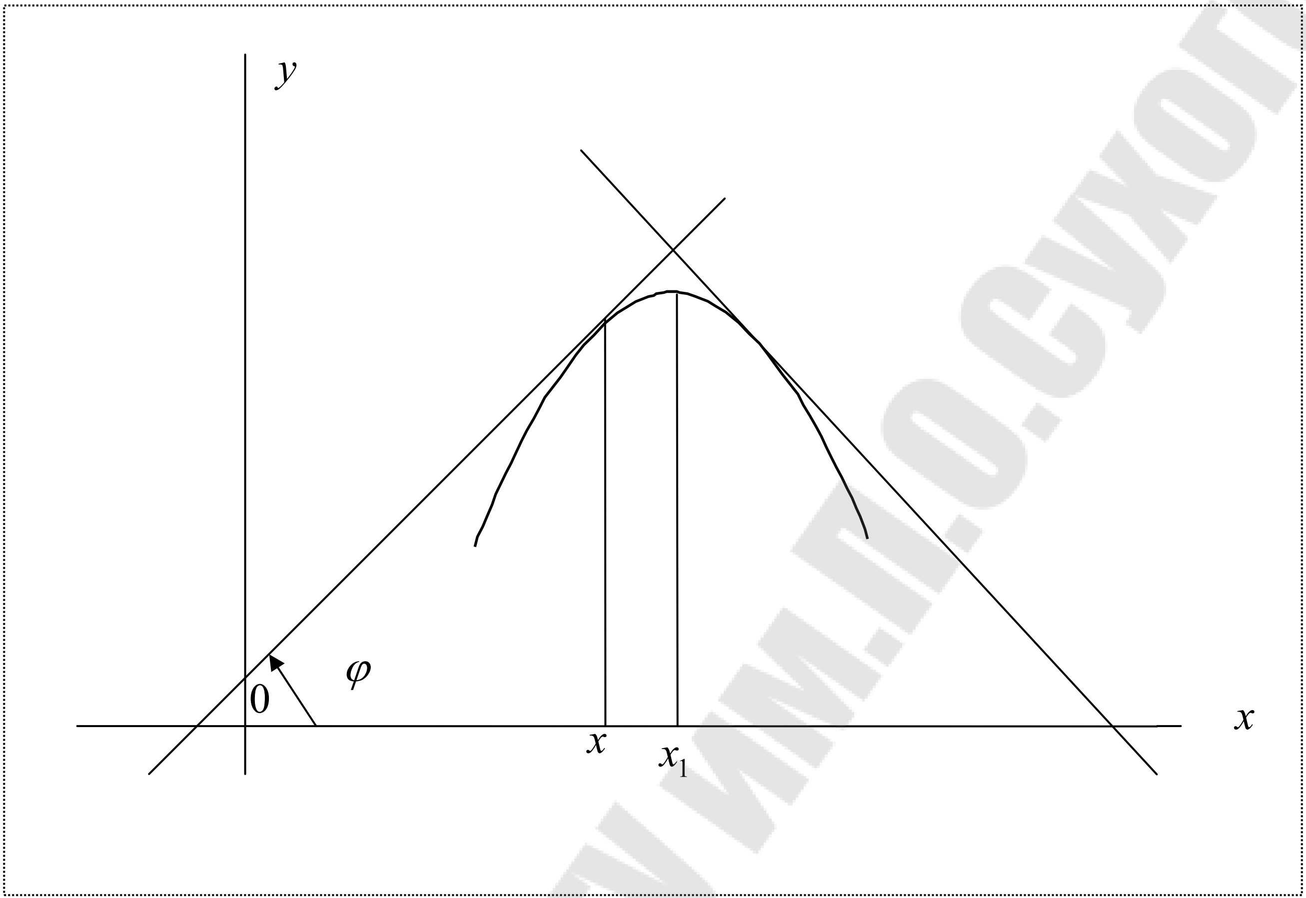
Следовательно,

$$f(x) - f(x_1) < 0,$$

$$f(x) < f(x_1) \qquad (3.2)$$

Из (3.1) и (3.2) следует, что в точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы о минимуме функции.



3.3. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной

Пусть при $x = x_1$, $f'(x) = 0$, существует $f''(x)$ и, кроме того, $f''(x)$ непрерывна в окрестности точки x_1. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.5. Пусть $f'(x_1) = 0$. Тогда при $f''(x_1) < 0$ функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_1, а при $f''(x_1) > 0$ функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_1.

Доказательство.

Пусть $f'(x_1) = 0$, $f''(x_1) < 0$. Найдётся окрестность точки x_1, в которой $f''(x) < 0$. Так как $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$, то из $\left[f'(x)\right]' < 0$ следует, что $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем точку $x = x_1$. Но $f'(x_1) = 0$. Значит, на этом отрезке при $x < x_1$ производная $f'(x) > 0$, а при $x > x_1$ производная $f'(x) < 0$, то есть производная $f'(x)$ при переходе через точку x_1 меняет знак с плюса на минус. Последнее означает, что в точке x_1 функция имеет максимум.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы, то есть при $f''(x_1) > 0$ функция $f(x)$ в точке x_1 имеет минимум.

Замечание. Если в точке x_1 имеем, что $f''(x_1) = 0$, то надо для исследования на экстремум применять первое правило (то есть с помощью первой просзводной).

3.4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Предполагаем, что на этом отрезке функция $f(x)$ имеет конечное число критических точек. Если наибольшее значение функция достигает на интервале (a, b), то очевидно, что это значение будет одним из максимумов функции (если максимумов несколько), а именно, наибольшим максимумом. Но может случится, что наибольшее значение функция достигает на одном из концов отрезка.

Аналогично можно сказать и о наименьшем значении функции.

Из всего вышесказанного следует правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$:

1) найти все критические точки функции;
2) проверить эти точки на наличие экстремумов;
3) в тех точках, в которых существуют экстремумы, вычислить значения функции;
4) вычислить значения функции на концах отрезка $[a, b]$, тот есть вычислить значения $f(a)$, $f(b)$;
5) из всех вышеперечисленных значений выбрать наибольшее число; это и будет наибольшим значением функции на отрезке; наименьшее из этих чисел будет наименьшим значением функции на отрезке $[a, b]$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $\left[-3, \frac{3}{2}\right]$.

Решение. $y' = 3x^2 - 3$. Далее решаем уравнение: $y' = 3x^2 - 3 = 0$. Находим корни этого уравнения: $x_1 = -1, x_2 = 1$. Так как точки, в которых производная не существует, отсутствуют, то выше найденные корни уравнения и только они будут критическими точками. Найдём значения функции в этих точках и вычислим значения функции на концах интервала:

$y(-1) = 5,\ y(1) = 1,\ y(-3) = -15,\ y(\frac{3}{2}) = 4\frac{1}{8}.$

Наибольшее значение функция достигает в точке $x = -1$. Значение функции в этой точке равно числу 5. Наименьшее – в точке $x = -3$. Значение функции в этой точке равно числу -15.

Ответ: $y(-1) = 5,\ y(-3) = -15.$

3.5. Нахождение асимптот функции

Прямая называется *асимптотой кривой*, если расстояние $\boldsymbol{d}$ (от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность) стремится к нулю.

1. *Вертикальные асимптоты.*

Если $\lim f(x) = \infty$ при $x \to a$ (или $x \to a+$, или $x \to a-$), то прямая $x = a$ есть вертикальная асимптота кривой $f(x)$. Обратно, если прямая $x = a$ есть асимптота, то выполняется одно из написанных выше равенств.

Пример. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}.$

Решение. $\lim \dfrac{x^2+1}{x} = \lim(x + \dfrac{1}{x}) = \infty,$ $x = 0$ – вертикальная асимптота.

2. *Наклонные асимптоты.*

Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту: $y = kx + b$.

По определению: $\lim MP = 0;\ \dfrac{MP}{MN} = \cos\varphi;$

$$MN = \frac{MP}{\cos\varphi};\ \lim_{x \to +\infty} MN = 0 \tag{3.3}$$

φ – const, $|MN| = |QM - QN| = |y - \overline{y}| = |f(x) - kx - b|$

$$\lim_{x \to +\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \tag{3.4}$$

Итак, если $y = kx + b$ есть асимптота, то выполняется (3.4). Справедливо и обратное.

Формулы для вычисления чисел $k; b$:

$$k = \lim_{x \to +\infty}\frac{f(x)}{x};\ \ b = \lim_{x \to +\infty}\left[f(x) - kx\right]$$

3.6. Общая схема исследования функций

Для исследования функции и построения графика целесообразно провести следующие пункты:

1. Найти область определения и область значений функции.
2. Найти области возрастания и убывания функции.
3. Найти экстремумы функции (если таковых нет, то найти области выпуклости-вогнутости и точки перегиба функции).
4. Найти точки пересечения функции с осями координат.
5. Выяснить вопрос о существовании асимптот (вертикальных и горизонтальных)

По полученным данным построить график функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справ. пособие. В 2-х ч.: ч.1 / А.И. Герасимович, Н.А. Рысюк. – Мн.: Выш. шк., 1989. – 287 с.
2. Гурский, Е.И. Руководство к решению задач по высшей математике: Учеб. пособие. В 2-х ч. / Е.И. Гурский, В.П. Домашов, В.К. Кравцов, А.П. Сильванович; Под общ. ред. Е.И. Гурского. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 349 с.
3. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. – Мн.: ТетраСистемс, 2002. – 640 с.
4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: В 2 т. / Н.С. Пискунов – М.:Наука, 1985. – 429 с.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 234 с.
6. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: Учеб. пособие. В 4-х ч.: ч.1 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Выш. шк., 2004. – 270 с.

Гойко Владимир Иосифович
Тепляков Виктор Герардович
Цитринов Андрей Викторович

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Пособие
по дисциплинам «Высшая математика» и «Математика» для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

Подписано к размещению в электронную библиотеку
ГГТУ им. П. О. Сухого в качестве электронного
учебно-методического документа 15.11.13.

Рег. № 14Е.
http://www.gstu.by