

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический  
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Механика»

А. М. Селютин, Г. Н. Захаренко, А. А. Рюмцев

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ  
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ  
ПЛОСКОСТЬЮ. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ  
ПОВЕРХНОСТЕЙ**

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ  
по дисциплине «Инженерная графика»  
для студентов технических специальностей  
дневной и заочной форм обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2022

УДК 514.181.2(075.8)  
ББК 22.151.34я73  
С29

*Рекомендовано к изданию научно-методическим советом  
машиностроительного факультета ГГТУ им. П. О. Сухого  
(протокол № 5 от 07.06.2021 г.)*

Рецензент: доц. каф. «Металлургия и технологии обработки  
материалов» канд. техн. наук, доц. *Ю. Л. Бобарикин*

**Селютин, А. М.**

С29 Начертательная геометрия. Пересечение поверхности плоскостью. Взаимное пересечение поверхностей : учеб.-метод. пособие по дисциплине «Инженерная графика» для студентов техн. специальностей днев. и заоч. форм обучения / А. М. Селютин, Г. Н. Захаренко, А. А. Рюмцев. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2022. – 80 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц; 32 Mb RAM; свободное место на HDD 16 Mb; Windows 98 и выше; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-493-3.

Изложены основные теоретические положения, а также методики решения задач и варианты индивидуальных заданий для контроля знаний.

Для теоретической и практической подготовки по начертательной геометрии и инженерной графике студентов технических специальностей дневной и заочной форм обучения.

**УДК 514.181.2(075.8)  
ББК 22.151.34я73**

**ISBN 978-985-535-493-3**

© Селютин А. М., Захаренко Г. Н.,  
Рюмцев А. А., 2022  
© Учреждение образования «Гомельский  
государственный технический университет  
имени П. О. Сухого», 2021



## Предисловие

Настоящее учебно-методическое пособие, предназначенное для изучения учебных дисциплин «Начертательная геометрия и инженерная графика», «Инженерная графика», разработано с целью оказания помощи студентам технических специальностей первого курса дневной и заочной форм обучения в процессе выполнения графических работ по темам «Пересечение поверхности плоскостью и построение разверток» и «Взаимное пересечение поверхностей».

Данное пособие по своему содержанию полностью соответствует образовательному стандарту и программе учебной дисциплины и позволяет студентам практическим путем закрепить теоретические знания, полученные на лекциях, выполняя задания по начертательной геометрии, связанные с темой «Поверхности».

В книге изложены теоретические основы соответствующей части данного курса, в практической части представлены методики решения задач, сформулированы требования к оформлению чертежей и порядок приема заданий, даны контрольные вопросы для самопроверки, приведен список использованной и рекомендованной литературы.

Настоящее пособие содержит задания различного уровня сложности по каждой изучаемой теме и содействует выработке способностей к анализу и синтезу пространственных форм. Изображения, построенные по правилам, изучаемым в начертательной геометрии, позволяют мысленно представить форму предметов и их взаимное расположение в пространстве, исследовать геометрические свойства, присущие изображаемому предмету.

Таким образом, выполнение заданий, представленных в данном учебно-методическом пособии, способствует качественному усвоению студентами академических компетенций, развитию пространственного воображения и геометрического мышления, формирует умения и навыки, приучает студентов к систематическим занятиям по предмету.

## 1. Цель и содержание задания

Цель задания – изучить способы построения линий пересечения поверхностей и простейших разверток, приобрести практические навыки применения их при выполнении чертежей технических форм.

Содержание задания:

- Задание 1. Сечение поверхности плоскостью. Выполняется на формате А3.

Построить три проекции линии пересечения заданной поверхности плоскостями частного или общего положения, установить натуральную величину фигуры в сечении и построить развертку усеченной части тела.

- Задание 2. Выполняется на двух форматах А3. Необходимо в двух случаях построить линии пересечения поверхностей.

Построить три проекции линии пересечения заданных поверхностей. Выбрать оптимальный способ решения задачи в зависимости от характера пересекающихся поверхностей: многогранные, многогранная и криволинейная, криволинейные.

## 2. Требования к оформлению графических материалов и порядок приема заданий

Каждая задача выполняется на отдельном листе чертежной бумаги формата А3 в масштабе 1 : 1. Рамка и основная надпись заполняются согласно требованиям ЕСКД. Все построения необходимо выполнять простым карандашом с использованием чертежного инструмента. При окончательной обводке чертежа необходимо соблюдать требования ГОСТ 2.303–68 «Линии».

Видимые части проекций заданных фигур вычерчиваются сплошными основными линиями, а линии невидимого контура – штриховыми; оси проекций, линии проекционной связи, вспомогательные линии построения – сплошными тонкими, с указанием на них стрелок, поясняющих последовательность решения задачи. Все линии построения сохраняются. Допускается полученный результат (проекции построенной графической фигуры) обвести цветным карандашом.

Обозначения проекций фигур и символическое обозначение точек следует применять те, которые приняты на кафедре. Все надписи и обозначения наносят чертежным шрифтом размера 5–7 мм в соответствии с ГОСТ 2.304–81 «Шрифты чертежные».

Условия и образцы выполнения задач размещены в данном учебном пособии. Номер варианта, если это специально не оговорено преподавателем, выбирается по номеру фамилии студента в списке в журнале группы. Студенты получают задания согласно графику выдачи, сдачи и защиты графических работ.

Объем теоретических знаний и практических навыков регламентирован в разделе «Примерные контрольные вопросы» данного учебно-методического пособия. Консультации и прием задания проводятся в индивидуальном порядке преподавателем, ведущим практические занятия. Для этого еженедельно назначаются консультации и выделяются часы для самостоятельной работы студентов в аудитории под руководством преподавателя.

При оценке защищаемой работы преподаватель учитывает самостоятельность выполнения работы, срок сдачи и защиты, качество графической работы, уровень теоретических знаний и практических навыков, соблюдение ГОСТов.

### **3. Методика решения задач**

Решение задач рекомендуется проводить в такой последовательности:

- анализ условия;
- составление алгоритма (плана) решения;
- осуществление намеченного плана на чертеже;
- доказательство правильности решения.

Цель анализа заключается в необходимости выяснения, какими свойствами обладают данные и искомые геометрические фигуры, а также установить связь между ними. Для этого следует прочесть чертеж, т. е. уяснить по имеющимся на чертеже проекциям геометрических фигур, какие фигуры заданы, как они расположены в пространстве относительно плоскостей проекций и друг относительно друга.

Далее составляют алгоритм решения задачи, определяющий порядок и содержание операций, необходимых для решения задачи.

В соответствии с принятым алгоритмом решения на основе теоретических положений начертательной геометрии производят построения на чертеже.

Правильность полученного результата зависит как от выбора рационального пути решения, так и от точности выполнения графических построений.

Суть доказательства правильности решения заключается в том, что найденная линия (поверхность) удовлетворяет всем условиям задачи и что все проделанные операции при решении опираются на инвариантные свойства ортогонального параллельного проецирования, теоремы, определения и правила.

Ниже даны указания к решению задач, разобраны в качестве примеров задачи, подобные задачам индивидуального задания, и приведены примерные вопросы для самопроверки, а также типичные ошибки. При этом студентам предлагаются только те поверхности, которые наиболее широко распространены в общем машиностроении.

Образцы выполнения заданий представлены в табл. П.1.1–П.3.1 приложений 1–3.

Примеры исполнения графических работ приведены на рис. П.4.1–П.4.5 в приложении 4.

#### **4. Теоретические основы**

В курсе начертательной геометрии поверхности разделяют на две группы: гранные и кривые.

В задании 1 требуется построить линию пересечения плоскостью гранной или кривой поверхности.

В задании 2 все пересекающиеся поверхности могут быть в следующих сочетаниях:

- пересечение двух гранных поверхностей;
- пересечение кривой и гранной поверхностей;
- пересечение двух кривых поверхностей.

В задаче 2 заданы сочетания трех поверхностей. Это позволяет студентам овладеть практическими навыками применения методов вспомогательных секущих плоскостей и вспомогательных секущих сфер.

Опыт показывает, что в большинстве случаев неумение студентов решать отдельные позиционные и метрические задачи объясняется их незнанием геометрических образов, неумением опознавать их по каким-либо признакам на чертеже. Особенно это относится к кривым поверхностям. Как правило, незнание способов образования этих поверхностей влечет за собой все остальные трудности при построении линий пересечения поверхности плоскостью и поверхностей между собой.

Студенты должны опознавать основные геометрические образы по каким-либо признакам и самостоятельно, используя законы обра-

зования их поверхностей, решать поставленные задачи. Исходя из вышеуказанного, рассмотрим теоретические основы образования кривых поверхностей.

Поверхность можно рассматривать как совокупность последовательных положений линии в пространстве, перемещающихся по какому-либо закону. Например, плоскость – это поверхность, образованная перемещением прямой линии вдоль двух параллельных или пересекающихся прямых. Подвижная линия называется образующей; неподвижные линии, задающие закон перемещения образующей, называются направляющими.

Поверхности вращения получают путем вращения образующей вокруг неподвижной оси (рис. 1). При этом каждая точка образующей  $M$  описывает окружность с центром на оси вращения. Плоскости, перпендикулярные к оси поверхности, пересекают поверхность вращения по окружностям, называемым параллелями. Линия пересечения поверхности вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, называется меридианом. На рис. 1 меридианом является образующая кривая.

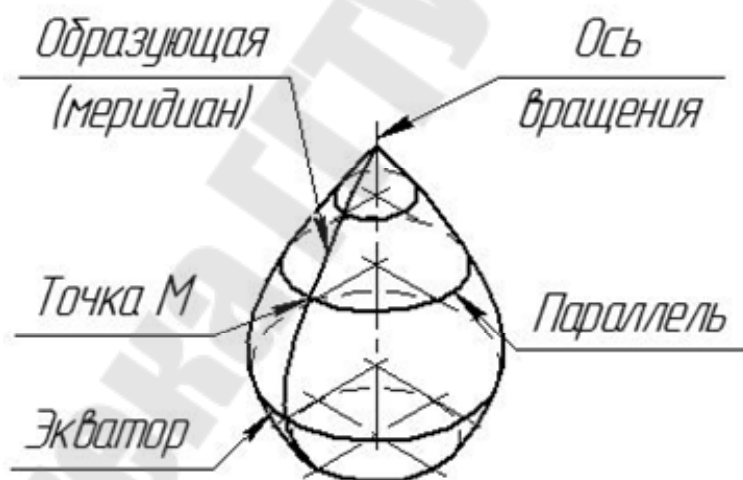


Рис. 1

Образующая может быть прямой линией или кривой, плоской или пространственной.

К линейчатым поверхностям относятся поверхности, которые могут быть образованы перемещением в пространстве прямой линии. Все остальные поверхности – нелинейчатые.

Одна и та же поверхность может быть образована различными способами.



Описанный способ образования поверхности вращения называется кинематическим.

Другим способом образования поверхности и ее образования на чертеже является задание поверхности множеством принадлежащих ей точек и линий. При этом точки и линии выбирают так, чтобы они давали возможность с достаточной степенью точности определять форму поверхности и решать на ней различные метрические или позиционные задачи.

Множество точек или линий, определяющих поверхность, называется ее каркасом.

Определителем поверхности называется совокупность независимых условий, однозначно задающих поверхность.

## **5. Построение линии пересечения поверхности плоскостью (задача 1)**

Для выполнения задания необходимо проработать темы «Пересечение поверхности плоскостью (Построение сечений)» и «Построение разверток поверхностей», а также вспомнить разделы курса, касающиеся поверхностей, принадлежности точки и линии поверхности, пересечения плоскостей и способов преобразования ортогональных проекций.

Вспомните решение следующих элементарных задач:

- построение точки встречи прямой с плоскостью (частного и общего положения);
- построение линии пересечения двух плоскостей (частного и общего положения);
- преобразование чертежа плоскости общего положения в проецирующую плоскость и в плоскость уровня.

Сечением называется замкнутая плоская фигура, получаемая в результате пересечения заданной плоскостью с поверхностями, ограничивающими данное тело в месте сечения.

В зависимости от формы тела фигура сечения может представлять собой многоугольник, плавную замкнутую кривую или их совокупность.

Задача построения сечения тела плоскостью сводится к нахождению линий пересечения плоскости с поверхностями, ограничивающими тело.

При построении решения задачи важно вначале определить характер искомой линии пересечения. Зная это, в ряде случаев можно исполь-

зовать геометрические свойства этих линий, что существенно упрощает построения на чертеже и позволяет получать более точные результаты. В равной степени это относится к плоским сечениям гранных и кривых поверхностей. В отдельных случаях линию пересечения находят без преобразования эпюра, а в ряде случаев для более простого решения задачи используют необходимые преобразования чертежа.

Натуральная величина фигуры в сечении может быть определена одним из следующих способов:

- заменой плоскостей проекций;
- плоско-параллельным перемещением;
- вращением вокруг прямой уровня (фронтали или горизонтали);
- совмещением.

Разверткой поверхности какого-либо тела называется фигура, получаемая совмещением поверхности этого тела с плоскостью чертежа.

Построение разверток поверхностей является технической задачей и представляет большой интерес, особенно при конструировании из листового материала различных сооружений, форм для металлических отливок, сосудов, трубопроводов, резервуаров, кожухов. При этом иногда развертки выполняются на бумаге в натуральную величину и служат выкройкой для изготовления детали в металле.

С той или иной степенью точности можно построить развертку практически любой поверхности.

Точную развертку можно получить только для гранных тел и для так называемых развертываемых поверхностей. К последним относятся те кривые линейчатые поверхности, у которых смежные прямолинейные образующие параллельны или пересекаются в одной точке. Остальные поверхности называются неразвертываемыми. Для них строят приближенную развертку.

Поверхность и ее развертку можно рассматривать как две геометрические фигуры, между точками которых установлено взаимно-однозначное соответствие. Поэтому можно сформулировать следующие свойства развертки поверхностей:

1. Длины двух соответствующих линий поверхности и ее развертки равны между собой.
2. Угол между линиями на поверхности равен углу между соответствующими линиями на развертке.
3. Прямой на поверхности соответствует такая же прямая на развертке.
4. Параллельным прямым на поверхности соответствуют параллельные прямые на развертке.

Следствием первого свойства является то, что замкнутая линия на поверхности и соответствующая замкнутая линия на развертке ограничивают одинаковую площадь.

Построение разверток поверхностей таких тел, как прямая призма, прямой круговой цилиндр, правильная пирамида, прямой круговой конус (а именно такие поверхности предложены в задании), выполняется весьма просто, без применения каких-либо специальных приемов.

При общем случае задания поверхности развертки строятся одним из следующих способов:

- триангуляции;
- нормального сечения;
- раскатки.

Для построения разверток неразвертываемых поверхностей применяются и другие способы, например, способ конусов, способ цилиндров.

В задании требуется построить полную развертку усеченной части тела, поэтому к построенной развертке боковой поверхности необходимо пристроить основание и натуральную величину фигуры в сечении.

### **5.1. Пересечение многогранников плоскостью и построение разверток**

В сечении многогранника плоскостью получается плоская фигура – многогранник (рис. 2), число вершин которого соответствует числу ребер многогранника, пересекаемых секущей плоскостью. Очевидно, что стороны фигуры в сечении являются линиями пересечения граней многогранника с секущей плоскостью, а вершины – точки встречи с нею ребер многогранника. Поэтому задача на построение проекций фигуры сечения многогранника плоскостью относится к построению линии пересечения граней многогранника с секущей плоскостью. Этот способ решения задачи называется способом граней (задача на нахождение прямых линий пересечения плоскостей). Если задачу сводят к нахождению точек встречи ребер многогранника с секущей плоскостью, то реализуют способ ребер (задача на нахождение точек встречи прямых с плоскостью). Этот способ более прост, и на практике чаще всего используется. На самом деле выбор способа зависит от положения секущей плоскости, ребер и граней многогранника относительно плоскости проекций.

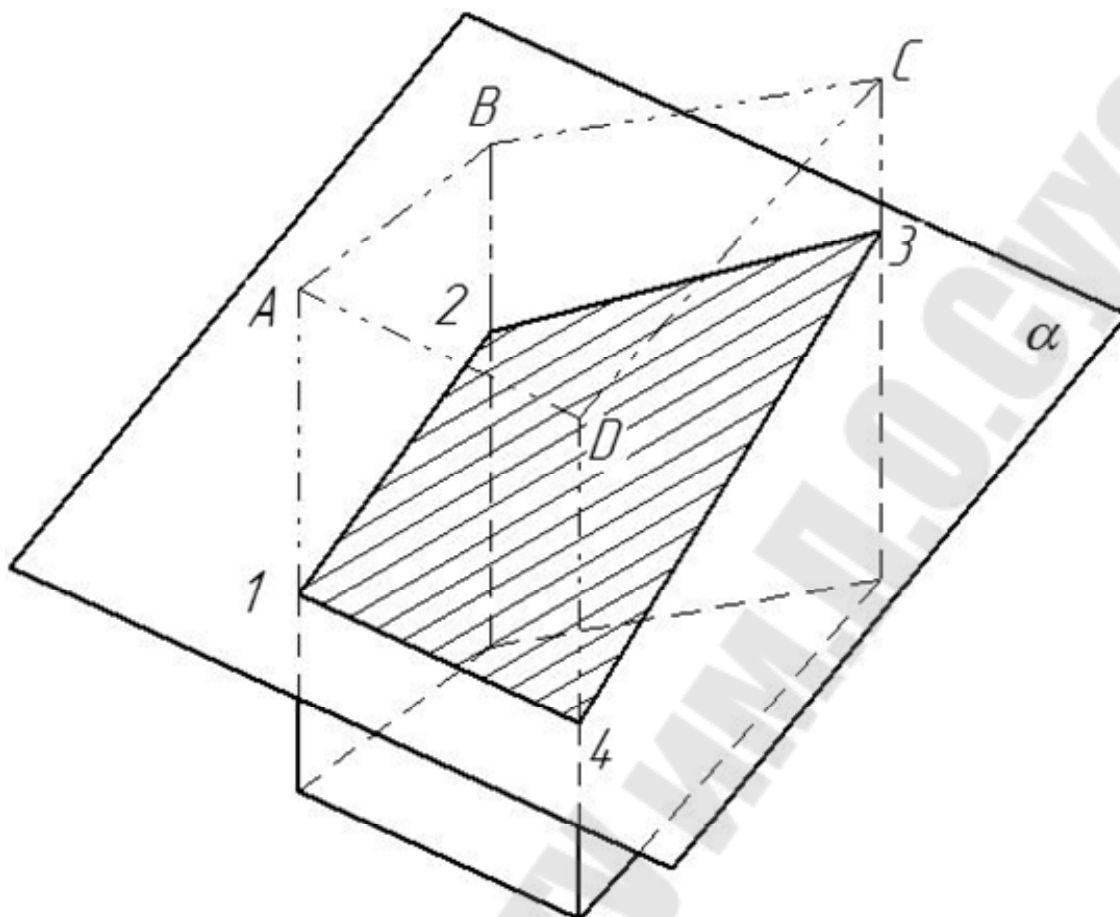


Рис. 2

Рассмотренные в этом разделе примеры построения сечений демонстрируют, в том числе и возможность выбора того или иного способа при решении конкретной задачи.

Развертка многогранника представляет собой плоскую фигуру, полученную последовательным совмещением всех граней тела с плоскостью чертежа таким образом, чтобы грани примыкали друг к другу по линиям сгиба.

**Для построения развертки многогранника необходимо твердо усвоить, что развертки строятся на натуральных величинах всех его ребер или граней.**

#### Пример 1

На рис. 3 представлена пятигранная призма, которую пересекает плоскость общего положения, заданная своими следами  $\alpha(\alpha_V, \alpha_H)$ .

Фигура в сечении зависит от того, пересекает ли плоскость все боковые ребра призмы или некоторые боковые ребра не встречаются с плоскостью  $\alpha$ :

– в первом случае она будет составлена только из отрезков пря-

мых пересечения боковых граней плоскостью  $\alpha$  и представлять собой многоугольник с числом сторон, соответствующим числу боковых граней призмы;

– во втором случае одна или две стороны многоугольника сечения будут являться отрезками прямых пересечения плоскостью  $\alpha$  с плоскостями оснований. В этом случае число сторон многоугольника сечения не определяется числом боковых граней призмы.

Заданный в условии эпюр (рис. 3) не показывает в явной форме, пересекает ли плоскость  $\alpha$  основание призмы. Для выяснения этого вопроса необходимо провести построение линии пересечения плоскости  $\alpha$  с плоскостью верхнего и нижнего основания.

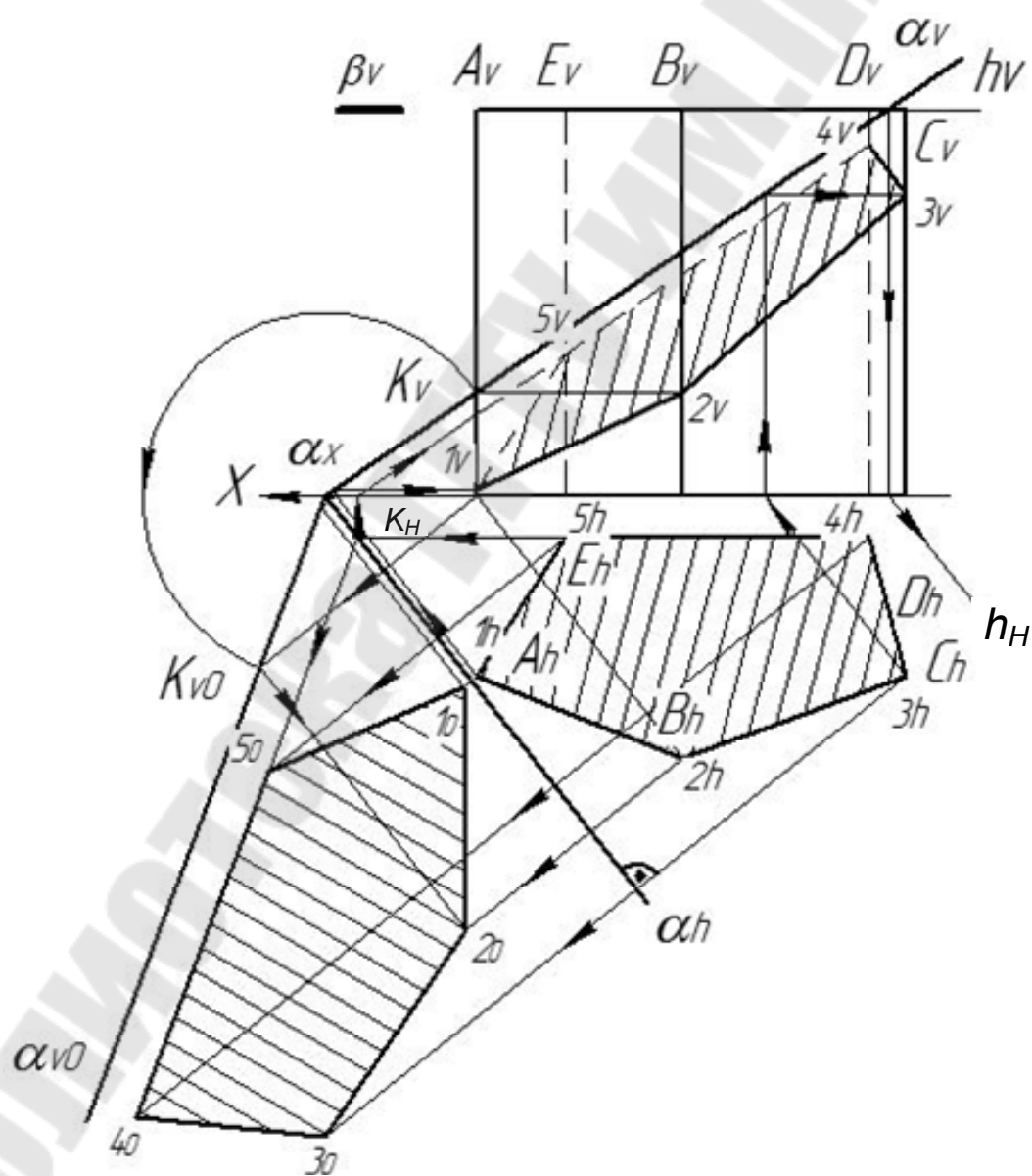


Рис. 3

Плоскость верхнего основания ( $\beta \parallel H$ ) пересекается с плоскостью  $\alpha$  по горизонтали  $h(h_V, h_H)$ ; горизонтальная проекция  $h_H$  не пересекает горизонтальную проекцию верхнего основания и, следовательно, плоскость  $\alpha$  не пересекает верхнее основание призмы.

Нижнее основание – пятиугольник  $ABCDE$ , лежащий на плоскости  $H$ .

Так как след  $\alpha_H$  не пересекает горизонтальную проекцию нижнего основания ( $A_H B_H C_H D_H E_H$ ), то плоскость  $\alpha$  не пересекает и нижнее основание призмы.

Для определения многоугольника сечения находим точки пересечения ребер призмы с секущей плоскостью (способ ребер). Здесь горизонтальные проекции ( $1_H 2_H 3_H 4_H 5_H$ ) искомых точек совпадают с горизонтальными проекциями ребер благодаря их проецирующему по отношению к плоскости проекций  $H$  положению. Зная это, находим фронтальные проекции ( $1_V 2_V 3_V 4_V 5_V$ ) точек, пользуясь условием, что сами точки (1, 2, 3, 4, 5) лежат и на секущей плоскости  $\alpha$ . Это сделано с помощью фронтали плоскости  $\alpha$  для точек 4 и 5 и горизонталей плоскости  $\alpha$  – для точек 1, 2 и 3. Ход построений ясен из рис. 3.

Соединяя последовательно найденные точки, получим проекции искомой линии пересечения.

Для построения полной развертки усеченной части призмы (рис. 4) необходимо выяснить натуральные величины боковых граней усеченной призмы, нижнего основания и пятиугольника сечения.

Натуральные величины боковых граней можно построить, воспользовавшись тем, что все ребра на фронтальную плоскость проекций проецируются в натуральную величину.

Истинная величина фигуры в сечении построена способом совмещения.

Совмещение плоскости  $\alpha$  с плоскостью проекций  $H$  произведено вращением вокруг ее следа  $\alpha_H$ . Точка  $K$ , принадлежащая следу  $\alpha_V$ , движется по дуге окружности  $KO$ , расположенной в плоскости, перпендикулярной к оси вращения  $\alpha_H$ , а горизонтальная проекция  $K_H$  точки  $K$  движется по прямой  $K_O \perp H$ . Так как отрезок  $[\alpha_X K_{V_0}]$  совмещенного следа  $\alpha_{V_0}$  определится в точке пересечения прямой  $K_H K_{V_0}$  с дугой окружности радиуса  $\alpha_X K_V$ , проведенной из центра  $\alpha_X$ , то соединяя прямой точки  $K_{V_0}$  и  $\alpha_X$ , получаем направление совмещенного следа  $\alpha_{V_0}$ . Построение вершин  $1_0, 2_0, 3_0$  и  $4_0$  фигуры сечения производим с помощью горизонталей и фронтали плоскости  $\alpha$ .

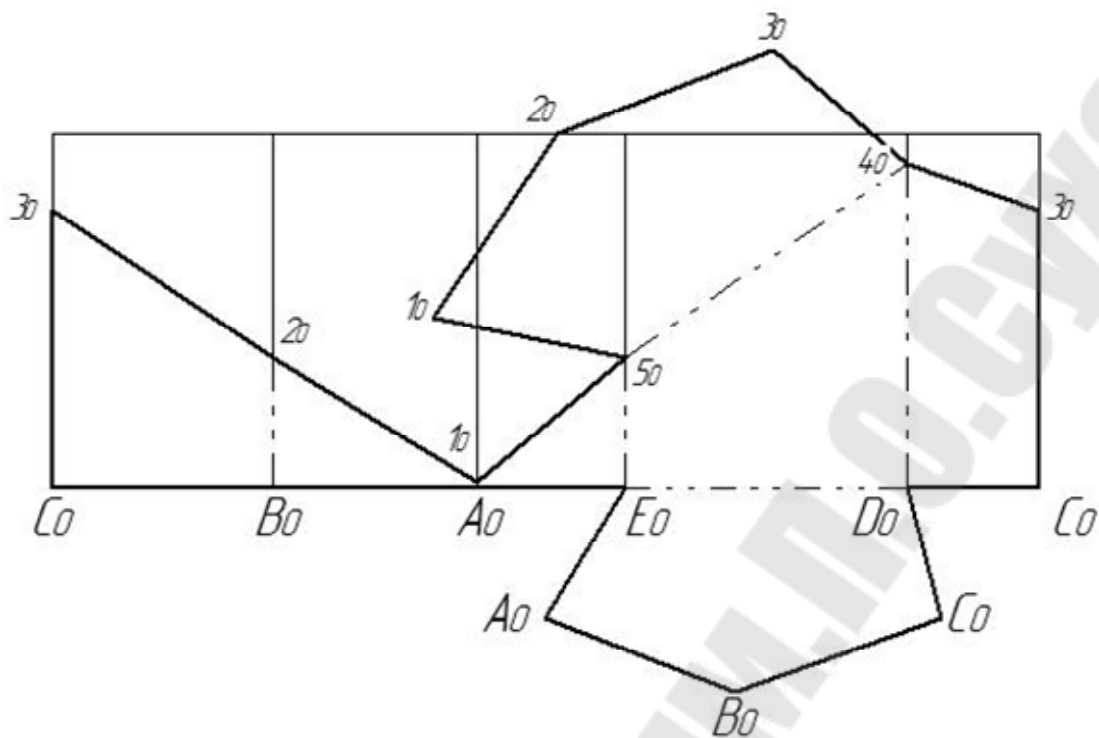


Рис. 4

Для построения (рис. 4) развертки проводим горизонтальную прямую и на ней от произвольной точки  $A$  откладываем последовательно отрезки соответственно конгруэнтные  $[A_H B_H]$ ;  $[B_H C_H]$ ;  $[C_H D_H]$ ;  $[D_H E_H]$ ;  $[E_H A_H]$ . Из полученных точек восстанавливаем перпендикуляры и на них откладываем величины, равные соответствующим отрезкам, взятым на фронтальной проекции для усеченной части призмы. Соединив точки 1, 2, 3, 4, 5, получим развертку боковой поверхности усеченной части призмы. Для получения полной развертки пристраиваем нижнее основание (например, к стороне  $DE$ ) и сечение (например, к отрезку  $[4-5]$ ).

Следует соблюдать выбор типов линий при вычерчивании чертежа развертки. Линии реза вычерчиваются линиями основного контура. Линии сгиба показывают тонкими линиями с использованием различного сочетания тире и точек. Причем операции сгиба, выполняемые в одном технологическом процессе, показываются в одинаковом графическом исполнении.

Чтобы убедиться в правильности построения, необходимо проверить равенство отрезков  $[1-2]$ ;  $[2-3]$ ;  $[3-4]$ ;  $[4-5]$ ;  $[5-1]$  ломаной линии на развертке, соответственно, отрезкам  $[1_0-2_0]$ ;  $[2_0-3_0]$ ;  $[3_0-4_0]$ ;  $[4_0-5_0]$ ;  $[5_0-1_0]$  – сторонам истинной величины сечения.

### Пример 2

На рис. 5 представлен случай, когда секущая плоскость пересекает верхнее и нижнее основания. Фигура сечения имеет форму шестиугольника, вершины и стороны которого построены способом вспомогательных секущих плоскостей.

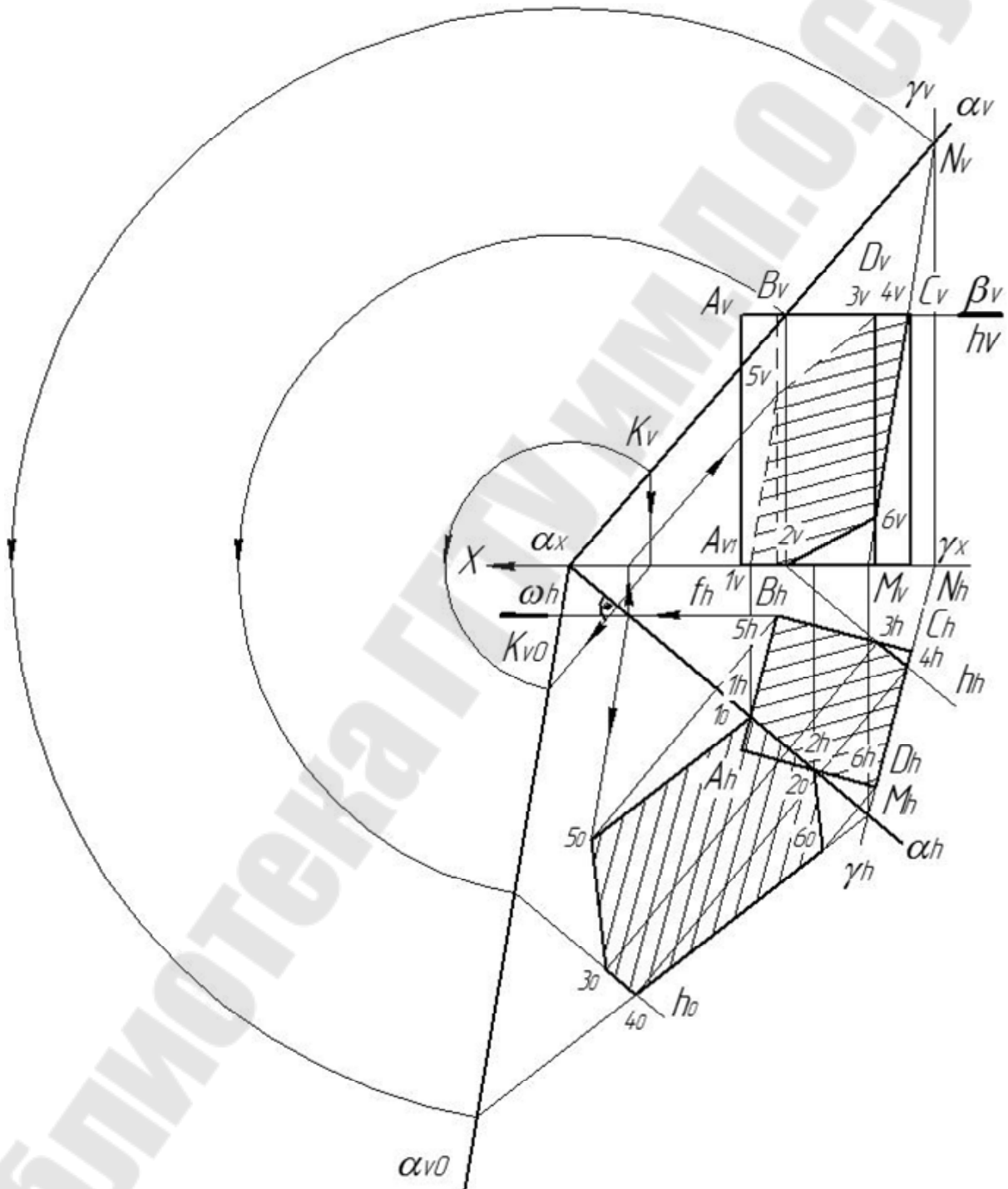


Рис. 5



Отрезок [3–4] строится как линия пересечения верхнего основания призмы с плоскостью  $\alpha$ .

Для этого грань его основания  $ABCD$  заключили в плоскость  $\beta$ . Линия пересечения плоскости  $\beta$  с плоскостью  $\alpha$  – горизонталь  $h(h_V)$ . Строим горизонтальную проекцию этой горизонтали  $h_H$ .

Отрезок [3–4] найденной горизонтали является одной из сторон фигуры сечения.

Отрезок [4–6] строится как линия пересечения грани  $CC_1DD_1$  с плоскостью  $\alpha$  (используется способ граней).

Грань  $CC_1DD_1$  заключена в горизонтально-проецирующую плоскость  $\gamma$ , которая пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $MN$ . Отрезок [4–6] этой прямой – искомая линия.

Отрезок [1–2] является линией пересечения нижнего основания призмы плоскостью  $\alpha$ . Отрезок [1–2] совпадает со следом  $\alpha_H$ .

Вершина 5 фигуры сечения строится как точка пересечения ребра  $BB_1$  и плоскости  $\alpha$  с помощью вспомогательной плоскости  $\omega$ . Линия пересечения плоскостей  $\omega$  и  $\alpha$  – фронталь  $f(f_H, f_V)$ .

Отрезки [2–6], [1–5], [5–3] получены путем соединения найденных вершин с помощью прямых линий.

Построение развертки призмы в данном случае мало отличается от ранее рассмотренного примера. Нужно лишь на развертке найти точки 1, 2, 3, 4.

Эти точки определяются легко, так как известны натуральные величины отрезков  $1A$ ,  $2A$ , и  $3C$ ,  $4C$ , которые проецируются в натуральную величину на плоскости проекций  $H$ .

Истинная величина фигуры в сечении построена способом совмещения. Построение вершин  $4_0$  и  $6_0$ ,  $3_0$ ,  $4_0$ ,  $5_0$  фигуры сечения производим с помощью прямой  $MN$ , горизонтали  $h$  и фронтали  $f$  плоскости  $\alpha$ .

### **Пример 3**

Призма пересекается плоскостью общего положения, заданной четырехугольником (рис. 6).

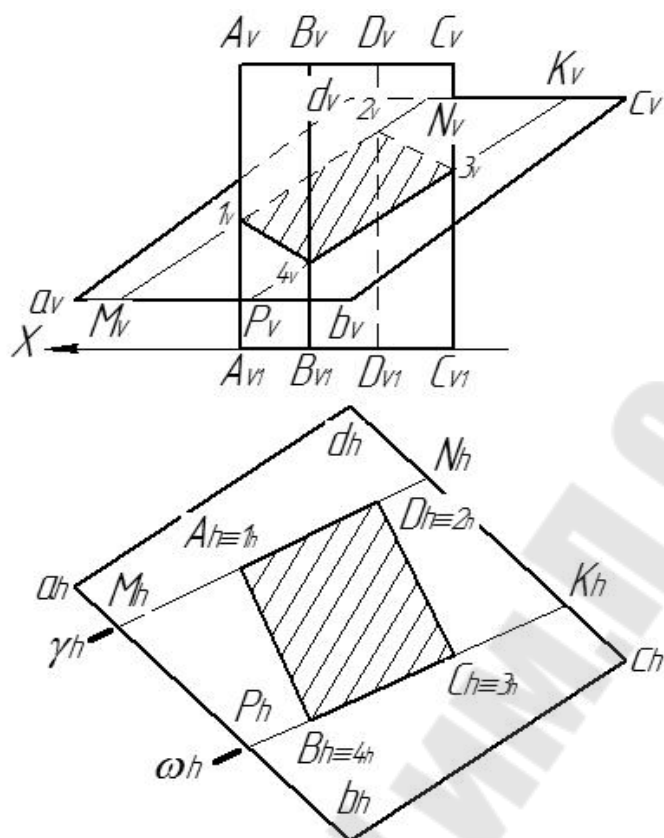


Рис. 6

Для построения сечений используем способ граней.

Проведем горизонтально-проецирующую плоскость  $\gamma$  через грань  $AA_1DD_1$  (след  $\gamma_H$  проходит через  $A_HD_H$ ). По горизонтальной проекции  $M_HN_H$  линии пересечения плоскостей  $\gamma$  и четырехугольника  $abcd$  находим фронтальную проекцию  $M_VN_V$ . На  $M_VN_V$  выделяем отрезок  $[1_V-2_V]$ , лежащий в грани  $A_VA_1V D_VD_1V$ , который и будет фронтальной проекцией стороны многоугольника сечения. Горизонтальная проекция  $[1_H-2_H]$  стороны многоугольника сечения совпадает с горизонтальной проекцией грани призмы. Для определения всего сечения достаточно найти еще одну точку многоугольника, лежащую на грани  $BB_1CC_1$ .

Для этого проводим через нее плоскость  $\omega \perp H$ . Все построения аналогичны предыдущим. Имея две стороны многоугольника сечения  $[1-2]$  и  $[3-4]$ , легко найти остальные, так как вершины сечения будут общими, и остается только соединить их последовательно.

Истинный вид сечения можно определить одним из способов преобразования эпюра – вращением вокруг горизонтали или перемещением плоскостей проекций.

Построение развертки осуществляется так же как в предыдущих примерах.

Если секущая плоскость задана треугольником, двумя пересекающимися прямыми и т. п., то план решения остается прежним.

#### Пример 4

Рассмотрим особенности построения проекций плоского сечения пирамиды. На рис. 7 секущая плоскость  $\alpha(\alpha_v, \alpha_h)$  общего положения задана следами. Как в случае призмы, проекция сечения определяется или последовательным построением точек встречи ребер с секущей плоскостью, или построением прямых, по которым грани пирамиды пересекаются секущей плоскостью.

Для построения многоугольника сечения пирамиды, боковые грани которой являются плоскостями общего положения, удобнее применить способ ребер. Вспомогательные плоскости могут быть фронтально- или горизонтально-проецирующими.

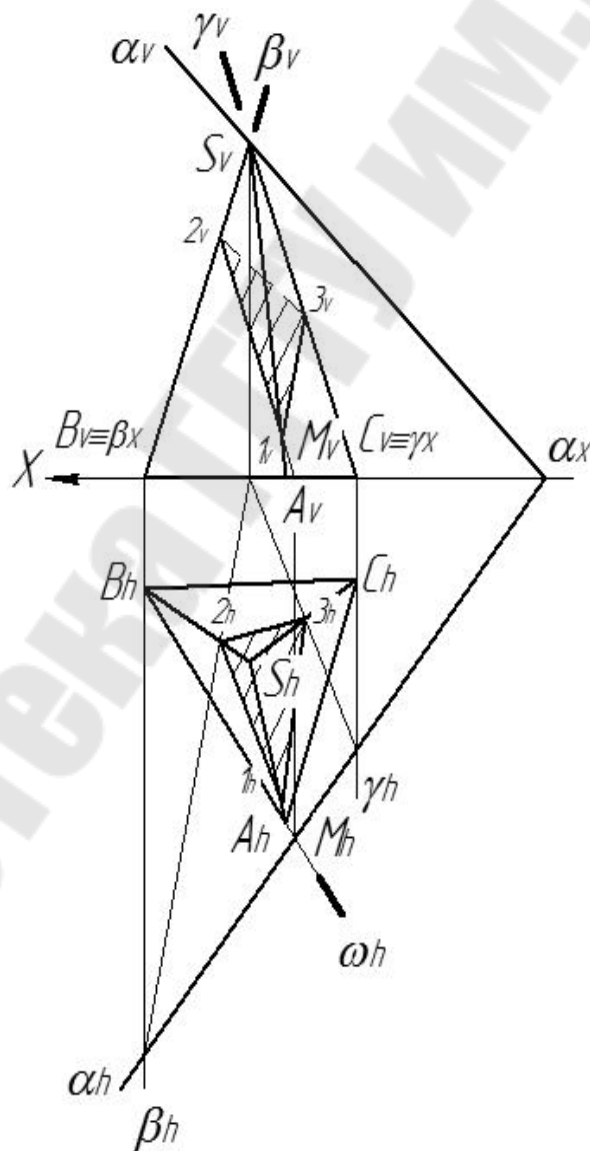


Рис. 7

Точки  $2(2_V, 2_H)$  и  $3(3_V, 3_H)$  на ребрах пирамиды  $SB$  и  $SC$  находим при помощи фронтально-проецирующих плоскостей  $\beta$  и  $\gamma$ . Точку  $1(1_V, 1_H)$  можно найти таким же способом, но если учесть, что сторона  $AB$  основания пирамиды является горизонтальным следом  $\omega_H$  плоскости грани  $SAB$ , то, продолжив горизонтальную проекцию стороны основания  $AB$  до пересечения с горизонтальным следом  $\alpha_H$  секущей плоскости, получим горизонтальную проекцию  $MH$  общей точки плоскостей  $\alpha$  и  $\omega$  ( $\triangle ABS$ ).

Второй общей точкой тех же плоскостей является уже найденная точка  $2(2_V, 2_H)$ . Соединив точки  $M(M_V, M_H)$  и  $2(2_V, 2_H)$ , получим линию пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\omega$  ( $\triangle ABC$ ). Отрезок  $[1-2]$  этой линии в пределах грани  $SAB$  является одной из сторон сечения. Треугольник  $1-2-3$  – искомое сечение.

В отдельных случаях для нахождения точек пересечения ребер пирамиды с секущей плоскостью удобно применять в качестве вспомогательных профильно-проецирующие плоскости.

Такой способ позволяет находить обе проекции каждой точки, не пользуясь линией проекционной связи, что в некоторых случаях дает более точные результаты. Например, в случае, когда угол наклона проекции ребра к оси  $OX$  близок к  $90^\circ$ .

### **Пример 5**

На рис. 8 представлена пирамида  $SABC$ , пересекаемая плоскостью  $\alpha(\alpha_V, \alpha_H)$ . Плоскость  $\alpha$  является плоскостью общего положения, боковые ребра и боковые грани пирамиды – соответственно, прямыми и плоскостями общего положения.

Многоугольник сечения можно определить путем нахождения точек пересечения ребер пирамиды с секущей плоскостью. Решение этой задачи значительно упрощается, если секущая плоскость  $\alpha$  будет проецирующей.

Для решения данного примера использован способ перемены плоскостей проекций. Заменяем плоскость проекций  $V$  на новую  $V_1$  так, чтобы плоскость  $\alpha$  была фронтально-проецирующей, и решаем задачу в системе плоскостей проекций  $V_1/H$ .

На преобразованном эюре видно, что секущая плоскость не пересекает основание.

Проекции на плоскости  $V_1$  точек пересечения боковых ребер пирамиды с секущей плоскостью  $\alpha$  находятся на пересечении проекций этих ребер на плоскости  $V_1$  со следом  $\alpha V_1$  (проекции точек  $1_{V_1}, 2_{V_1}, 3_{V_1}$ ).

По найденным проекциям на новую фронтальную плоскость  $V_1$  вершин треугольника сечения строим их горизонтальные проекции и далее – фронтальные проекции на плоскость  $V$ . Соединяя вершины между собой, получаем проекции всего треугольника сечения 1–2–3.

Для построения развертки усеченной части пирамиды необходимо иметь сначала натуральные величины усеченных боковых граней, для построения которых достаточно определить натуральные величины ребер  $SA, SB, SC$ .

Для определения натуральной величины ребра с помощью прямоугольного треугольника возьмем за один из катетов горизонтальную проекцию. Тогда разность координат концов отрезка для любого бокового ребра будет равна высоте пирамиды  $SO$ .

Пользуясь такими соображениями, проводим следующие построения.

Откладываем отрезок  $[SO]$  в стороне от фронтальной проекции пирамиды. От точки  $O$  под прямым углом откладываем величины горизонтальных проекций ребер ( $S_H A_H, S_H B_H, S_H C_H$ ).

Полученные гипотенузы и представляют собой натуральную величину соответствующих ребер пирамиды. На соответствующих ребрах находим точки 1, 2, 3.

Для определения натуральной величины ребер можно использовать и метод вращения вокруг проецирующих осей (его разновидность – метод плоскопараллельного перемещения), например, вокруг оси  $SO$ , перпендикулярной плоскости проекций  $H$  и проходящей через вершину пирамиды.

Для определения истинной величины треугольника сечения используем метод перемены плоскостей проекций. Выбираем новую плоскость проекций  $H_1$  так, чтобы треугольник 1–2–3 был параллелен ей. Тогда проекция  $1_0-2_0-3_0$  будет истинной величиной.

Для нахождения истинной величины можно использовать способ совмещения плоскости  $\alpha$  с одной из плоскостей проекций.

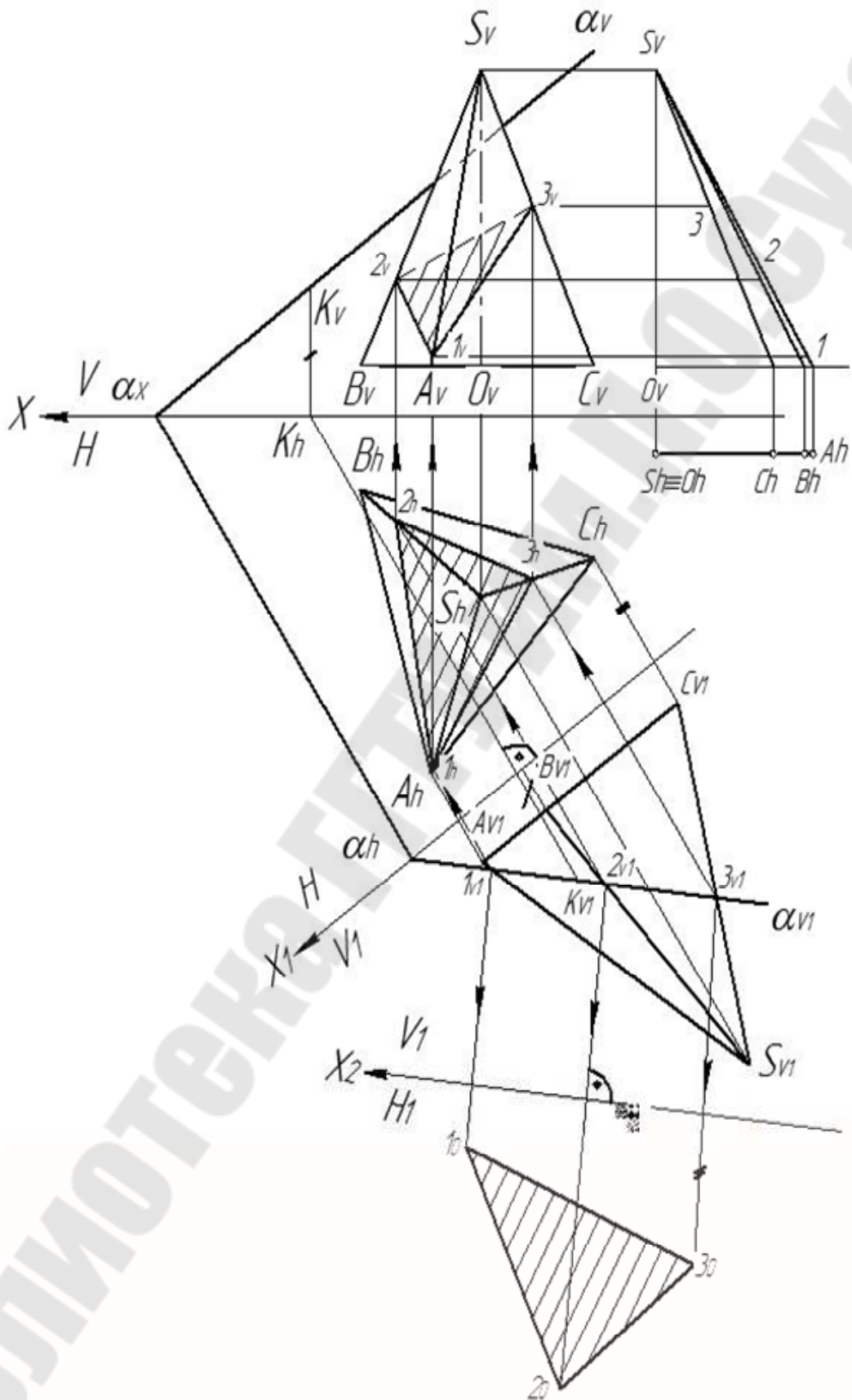


Рис. 8

Для построения развертки (рис. 9) задаем произвольную точку  $S_0$  и строим последовательно в натуральную величину грани, зная их три стороны (метод триангуляции). Затем на стороны  $S_0A_0$ ,  $S_0B_0$ ,  $S_0C_0$  наносим точки  $1_0$ ,  $2_0$ ,  $3_0$ . Соединяем их ломаной линией  $1_0-2_0-3_0-1_0$ . После этого необходимо проверить, равны ли по величине соответствующие отрезки на развертке боковой поверхности и на истинной величине фигуры в сечении. Пристраиваем основание  $A_0B_0C_0$  к какой-либо стороне развертки боковой поверхности. В завершение пристраиваем истинную величину сечения  $1_0-2_0-3_0$ , скажем, к стороне  $[2_0-3_0]$ .

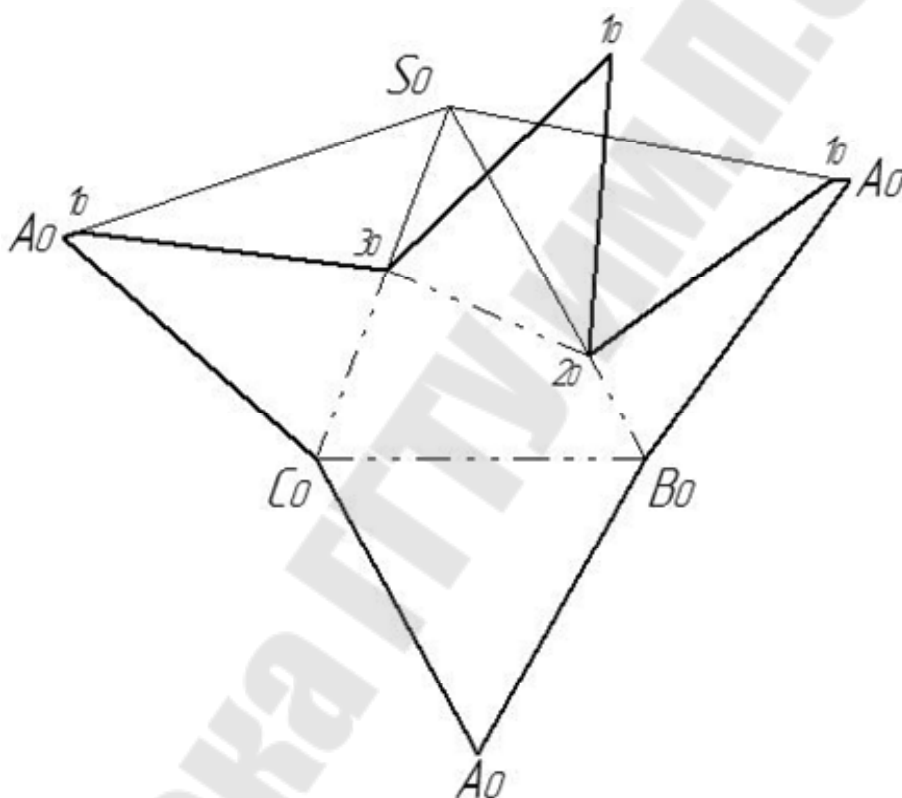


Рис. 9

Следует напомнить, что необходимо соблюдать выбор типов линий при вычерчивании чертежа развертки. Линии реза вычерчиваются линиями основного контура. Линии сгиба показываются тонкими линиями с использованием различного сочетания тире и точек. При этом операции сгиба, выполняемые в одном технологическом процессе, показываются в одинаковом графическом исполнении. Отсеченные части боковых ребер пирамиды показываются тонкими сплошными линиями.

## **5.2. Пересечение тел вращения плоскостью и построение разверток**

При пересечении тел вращения плоскостью получаются различные плоские кривые линии, проекции которых строят по проекциям ряда точек, определяемым соответствующими способами. В общем случае в результате получаются лекальные кривые, которые строят, соединяя плавной кривой через опорные, характерные и дополнительные точки.

Опорными точками построения называются точки, определяющие фигуру в сечении: верхние и нижние, т. е. точки, наиболее и наименее удаленные от плоскостей проекций; левые и правые, т. е. точки, лежащие на крайних из образующих их поверхностей во всех проекциях эюра.

Характерными называют точки, зная которые можно с достаточной степенью достоверности построить закономерную лекальную кривую, пользуясь схемами, изложенными в справочной литературе. Через такие точки проводятся осевые линии фигур в сечении во всех проекциях эюра.

После обязательного построения опорных и характерных точек перечень точек строящейся лекальной кривой уплотняется посредством дополнительных точек. Правила построения их проекций аналогичны тем, что используются при построении опорных и характерных точек.

При построении линии пересечения кривой поверхности и плоскости методом вспомогательных секущих поверхностей эти плоскости выбирают таким образом, чтобы они пересекали кривую поверхность по линиям, приспособленным для точного графического построения, или линиям, легко определяемым на чертеже. Наиболее желательными в этом отношении являются сечения в виде прямых линий и окружностей, так как изображение их осуществляется с помощью линейки и циркуля.

### **5.2.1. Пересечение цилиндра плоскостью**

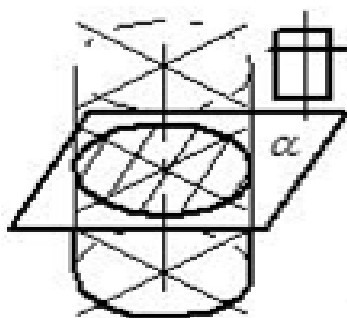
При пересечении кругового цилиндра плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости относительно оси симметрии могут получиться:



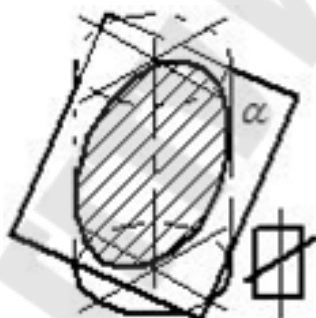
– окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения цилиндра (рис. 10);

– эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси вращения цилиндра под углом, отличным от прямого (рис. 11);

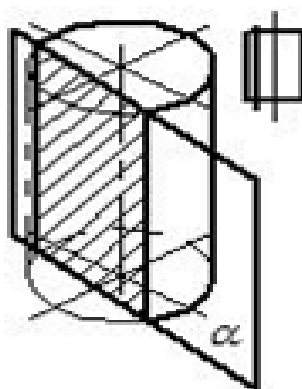
– прямоугольник, если секущая плоскость параллельна оси вращения цилиндра (рис. 12).



*Рис. 10*



*Рис. 11*



*Рис. 12*

### Пример

В этом примере секущая плоскость  $\alpha(\alpha_V, \alpha_H)$  наклонена к оси цилиндра (рис. 13), поэтому боковая поверхность цилиндра пересекается ею по эллипсу.

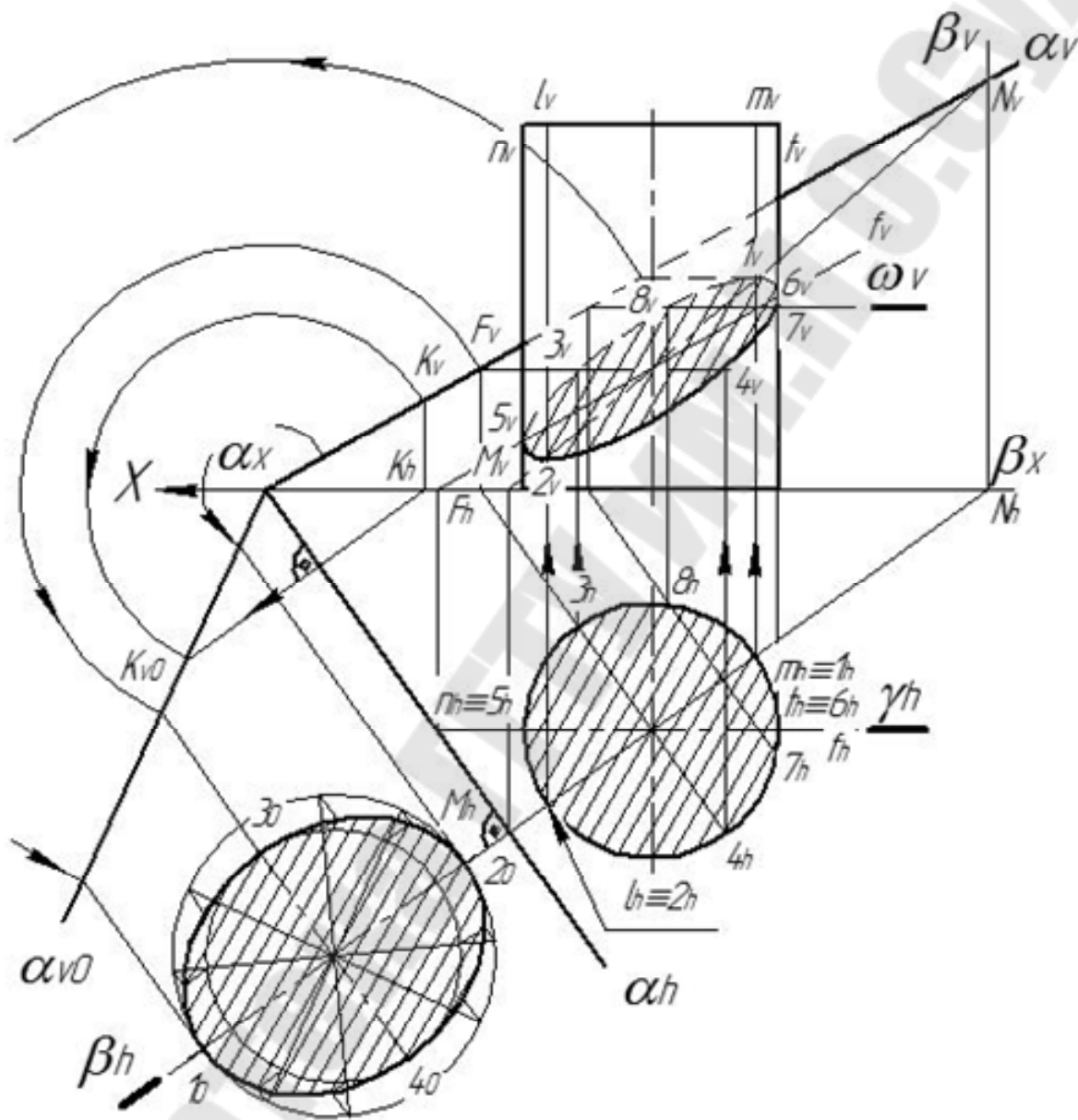


Рис. 13

### Построение опорных точек

Наивысшая и самая нижняя точки линии пересечения (точки 1 и 2) определяются с помощью вспомогательной горизонтально-проецирующей плоскости  $\beta$ , проведенной через ось вращения цилиндра перпендикулярно секущей плоскости  $\alpha$ .

Плоскость  $\beta$  пересекает плоскость  $\alpha$  по линии  $MN$ , а цилиндр – по образующим  $l$  и  $m$ .

Полученные образующие  $l$  и  $m$  пересекаются с линией  $MN$  в искомым точках 1 и 2, являющихся конечными точками большой оси эллипса.

Построение точек 3 и 4 малой оси эллипса проводится следующим образом.

Большая ось эллипса лежит на прямой  $MN$  наибольшего наклона секущей плоскости  $\alpha$ , а малая 3–4, перпендикулярная к ней, является отрезком горизонтали плоскости  $\alpha$ , проходящей через середину (точку  $O$ ) большой оси.

Так как эллипс расположен на поверхности цилиндра, образующие которого расположены перпендикулярны к плоскости проекций  $H$ , то он проецируется в плоскость  $H$  в виде окружности.

Его большая ось 1–2 проецируется отрезком  $[1_H-2_H]$ , а малая 3–4 в натуральную величину – отрезком  $[3_H-4_H]$ , перпендикулярным к  $[1_H-2_H]$  и проходящим через его середину – точку  $O_H$ .

Так как малая ось эллипса [3–4] является отрезком горизонтали  $4F$  плоскости  $\alpha$ , то построение ее фронтальной проекции  $4_V F_V$  – по горизонтальной проекции 3–4 с помощью той же горизонтали  $4F$ .

Точки 5 и 6 являются точками перехода видимого контура сечения в невидимый.

Для построения их проведем плоскость  $\gamma$ , проходящую через ось вращения цилиндра и очерковые образующие  $n$  и  $t$ .

Плоскость  $\gamma$  пересекает плоскость  $\alpha$  по фронтале  $f$ , а фронталь  $f$  пересекает образующие  $n$  и  $t$  в искомым точках 5 и 6 – точках перехода видимой части фронтальной проекции эллипса в невидимую.

### ***Построение дополнительных (промежуточных) точек***

Построение этих точек можно производить при помощи горизонтальных плоскостей.

Каждая такая плоскость  $\omega$  пересекает цилиндр по окружности, а плоскость  $\alpha$  – по горизонтали  $h$ , которые пересекаются в искомым точках 7 и 8.

Фронтальные проекции окружности сечения и горизонтали сливаются с фронтальным следом плоскости  $\omega$ , а горизонтальные проекции пересекаются в точках  $7_H$  и  $8_H$ , являющихся проекциями искомым точек.

По горизонтальным проекциям  $7_H$  и  $8_H$  точек 7 и 8 строим фронтальные проекции  $7_V$  и  $8_V$ .

Аналогично строятся и другие промежуточные точки лекальной линии пересечения.

Соединяем полученные точки плавной кривой линией.

Кривая от точки 5 через точки 2, 4, 7 до точки 6 на фронтальной плоскости проекций является видимой, а остальная часть – невидимой.

### ***Построение проекций линии пересечения способом перемены плоскостей проекций***

В ряде случаев бывает целесообразно для построения линии пересечения или для определения опорных точек этой линии прибегать к преобразованию чертежа, при котором заданная плоскость общего положения  $\alpha(\alpha_V, \alpha_H)$  становилась бы проецирующей по отношению к новой плоскости проекций.

На рис. 14 к данным плоскостям проекций добавлена плоскость проекций  $V_1$ .

Плоскость  $\alpha$  проецируется на плоскость  $V_1$  в виде прямой  $\alpha V_1$ .

Сечение цилиндра плоскостью  $\alpha$  проецируется в виде отрезка [11–21], совпадающего с линией  $\alpha V_1$ .

Ход построения точек фронтальной проекции сечения отмечен стрелками.

Расстояния от этих точек от оси проекций  $X_1$  берутся равными расстояниям от оси проекций  $X$  соответствующих точек на плоскости  $V_1$  (для точек 7 и 8 берется расстояние, равное  $Z$ ).

Истинный вид сечения может быть также определен способом совмещения секущей плоскости  $\alpha$  с плоскостью проекций  $H$ .

Эллипс может быть построен по большой и малой осям, длины которых найдены путем совмещения конечных точек 10 и 20 для большей оси, 30 и 40 – для малой оси.

В примере (рис. 14) истинный размер эллипса найден способом перемены плоскостей проекций.

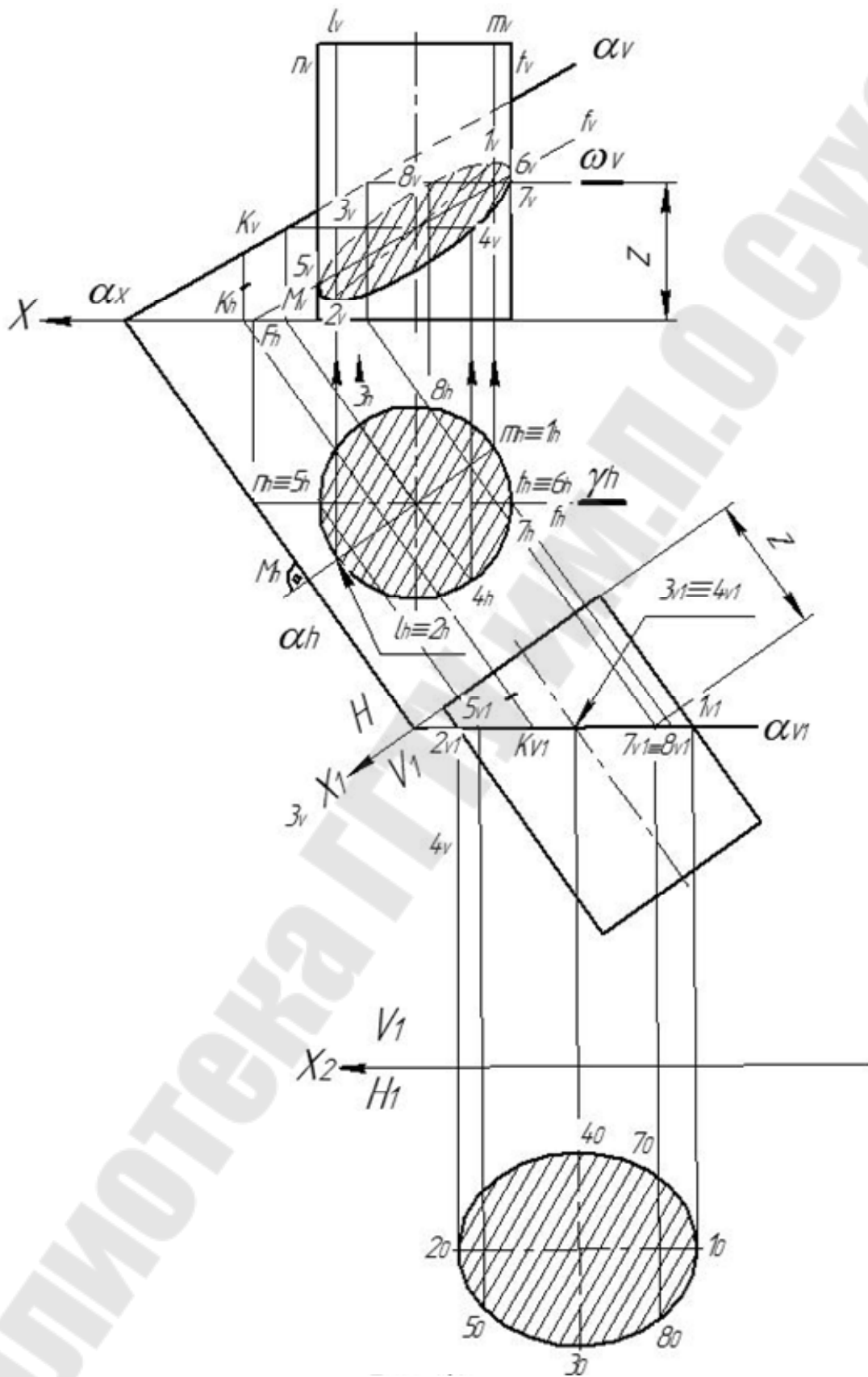


Рис. 14

Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра, не усеченного плоскостью, представляет собой прямоугольник с основанием, равным длине окружности основания цилиндра, и высотой, равной высоте цилиндра (рис. 15).

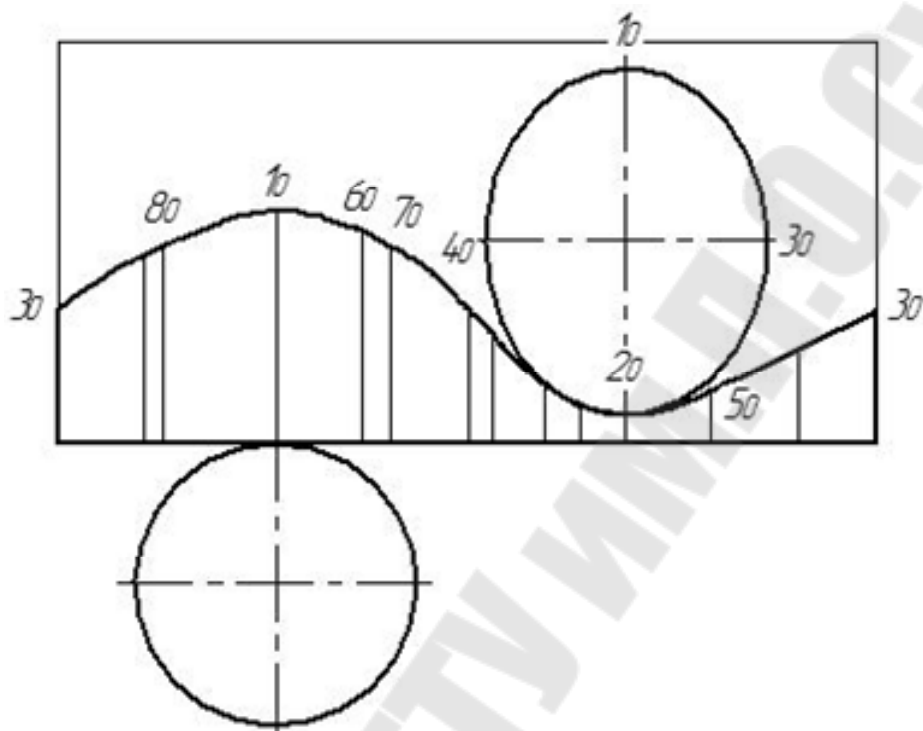


Рис. 15

Для того чтобы избежать вычислений, связанных с определением длины окружности основания, обычно вписывают в основание цилиндра правильный многоугольник (обычно 12-угольник, в нашем случае – 14-угольник) и его периметр принимают за длину основания прямоугольника.

При построении развертки боковой поверхности усеченной части цилиндра на развертку необходимо нанести точки, принадлежащие линии пересечения, и затем эти точки соединить плавной кривой линией. Проводим на развертке боковой поверхности 14 образующих, наносим, соответственно, на эти образующие точки 1, 2, 3, ..., взяв расстояние от этих точек до нижнего основания фронтальной проекции. Для получения полной развертки усеченной части пристраиваем нижнее основание и фигуру сечения.

### 5.2.2. Пересечение конуса плоскостью

При пересечении кругового конуса плоскостью в зависимости от положения секущей плоскости относительно оси вращения и образующим конуса могут получаться:

- Окружность, если секущая плоскость перпендикулярна оси вращения конуса (рис. 16).

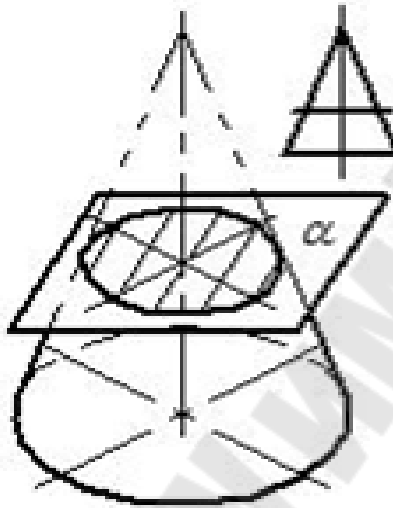


Рис. 16

- Эллипс, если секущая плоскость наклонена к оси вращения конуса под углом, отличающимся от прямого, и пересекает все образующие конуса (рис. 17).

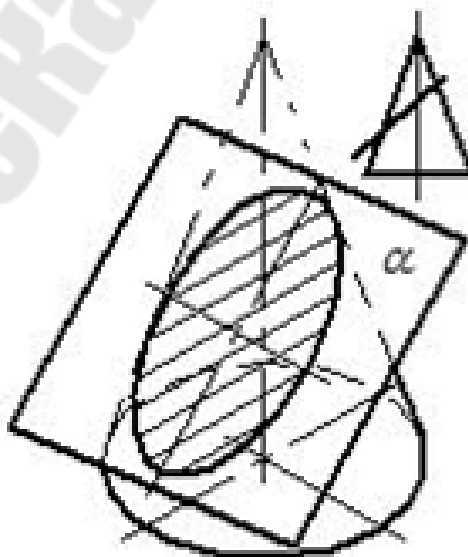


Рис. 17

- Гипербола, если секущая плоскость параллельна оси вращения конуса (рис. 18).

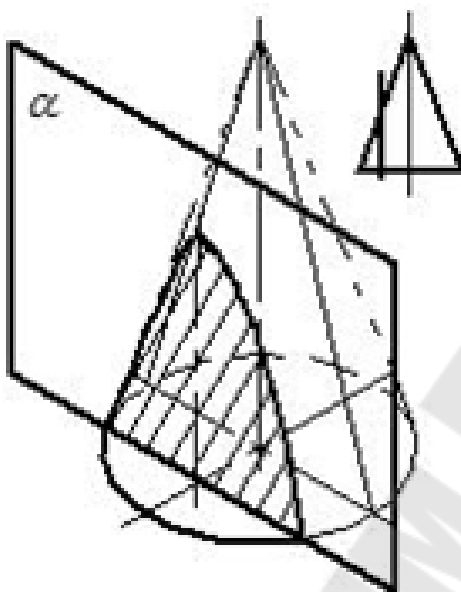


Рис. 18

- Парабола, если секущая плоскость параллельна какой-либо образующей конуса (рис. 19).

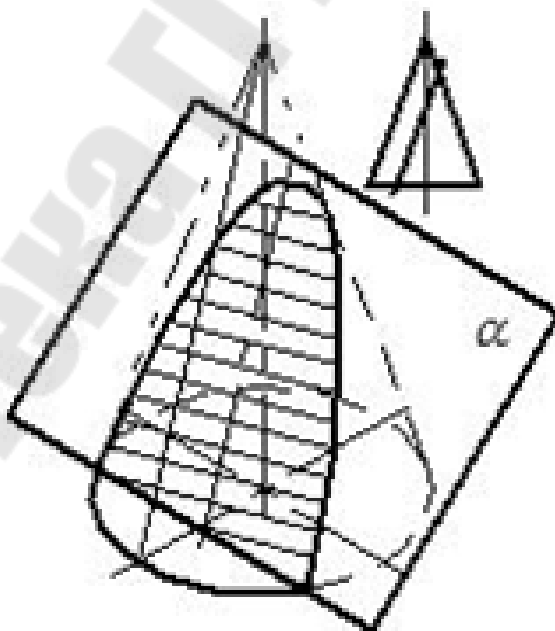


Рис. 19



- Треугольник, если секущая плоскость проходит через вершину конуса (рис. 20).

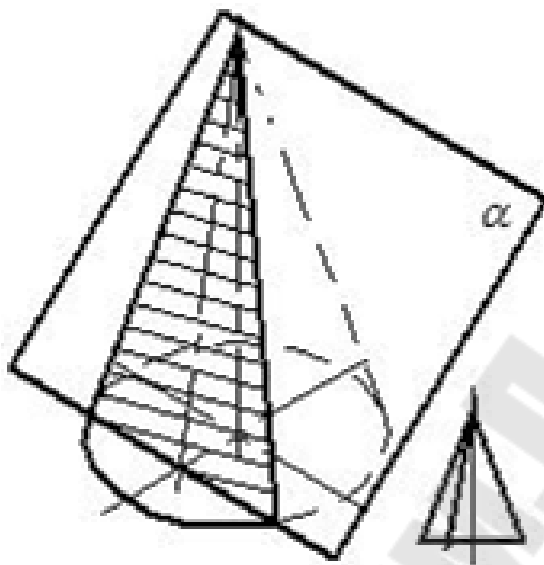


Рис. 20

Проекции фигуры сечения конуса плоскостью в общем случае строят аналогично проекциям фигуры в сечении пирамиды плоскостью (в конус вписывают многогранную пирамиду), а в частных случаях – аналогично случаю построения проекций фигуры сечения прямого кругового цилиндра плоскостью.

На рис. 21 построена линия пересечения конуса вращения плоскостью общего положения  $\alpha(\alpha_V, \alpha_H)$ .

#### **Определение опорных точек**

В сечении получается эллипс, для построения которого определяем опорные точки.

Наивысшая точка 1 и самая нижняя точка 2 определяются с помощью вспомогательной плоскости  $\beta$ , проведенной через ось вращения конуса, перпендикулярно к секущей плоскости  $\alpha$ . Плоскость  $\beta$  сечет конус по образующим  $SQ$  и  $ST$ , а плоскость  $\alpha$  – по линии наибольшего наклона  $m$ . Точки пересечения 1 и 2 образующих  $SQ$  и  $ST$  с линией  $m$  являются наивысшей и самой нижней точками. Они определяют большую ось эллиптического сечения конуса.

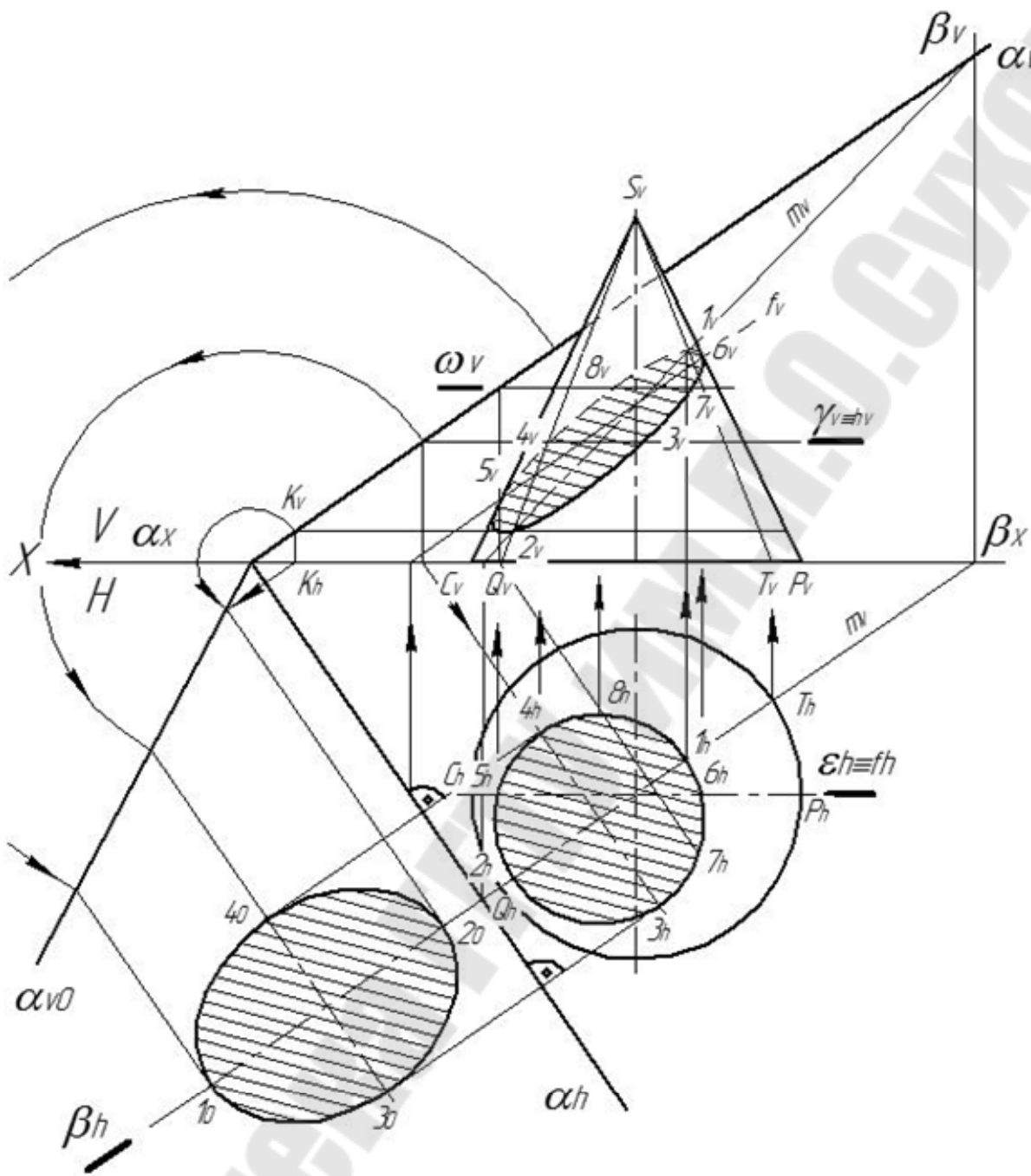


Рис. 21

Большая ось 1–2 лежит на линии  $m$  наибольшего наклона плоскости  $\alpha$ , тогда малая ось 3–4, перпендикулярная большей, должна лежать на горизонтали плоскости  $\alpha$ , проходящей через середину отрезка [1–2] – центр эллипса – точку  $O$ .

Рассечем конус и плоскость  $\alpha$  горизонтальной плоскостью уровня  $\gamma$ , проходящей через точку  $O_v$ , делящую [1<sub>v</sub>–2<sub>v</sub>] пополам. Плоскость  $\gamma$  пересекает конус по окружности, а плоскость  $\alpha$  – по горизон-

тали  $h$ . Горизонталь пересекает окружность сечения в точках 3 и 4, определяющих конечные точки малой оси эллипса.

Проведем вспомогательную плоскость  $\eta$ , параллельную фронтальной плоскости проекций  $V$  и проходящую через ось вращения конической поверхности.

Эта плоскость пересекает плоскость  $\alpha$  по фронтоли  $f(f_H, f_V)$ , а коническую поверхность – по образующим  $SC$  и  $SP$ . Точки 5 и 6, в которых пересекаются фронталь  $f$  с образующими  $SC$  и  $SP$ , являются граничными точками.

Их фронтальные проекции  $5_V$  и  $6_V$  делят фронтальную проекцию эллипса сечения на видимую и невидимую части.

### ***Построение промежуточных точек***

На рис. 21 показано также построение промежуточных точек 7 и 8 линии пересечения. Положение проекций этих точек определено с помощью вспомогательной плоскости  $\omega$ , проведенной параллельно  $H$ .

### ***Построение проекций линии пересечения с помощью способа перемены плоскостей проекций***

Плоскость  $V_1$  (рис. 22) перпендикулярна плоскости  $\alpha$  и, следовательно, проецируется на нее в виде прямой  $\alpha_{V_1}$ .

Конус проецируется на плоскость  $V_1$  в виде треугольника, а сечение его плоскостью  $\alpha$  – в виде отрезка прямой  $[1_{V_1}-2_{V_1}]$ .

Эта проекция позволяет, не пользуясь вспомогательными плоскостями, найти точки на любых образующих конуса. Предпочтительнее определять точки, лежащие на очерковых образующих конуса в плоскостях проекций  $V$  и  $V_1$ .

Ход построений горизонтальной и фронтальной проекций сечения по проекции  $[1_{V_1}-2_{V_1}]$  отмечен стрелками. Истинную величину эллипса сечения строим путем совмещения плоскости  $\alpha$  с плоскостью проекций  $H$ . Допускается построить эллипс геометрически по характеристическим точкам, определяющим его большую и малую оси симметрии, руководствуясь одной из схем, описанных в справочниках по черчению.

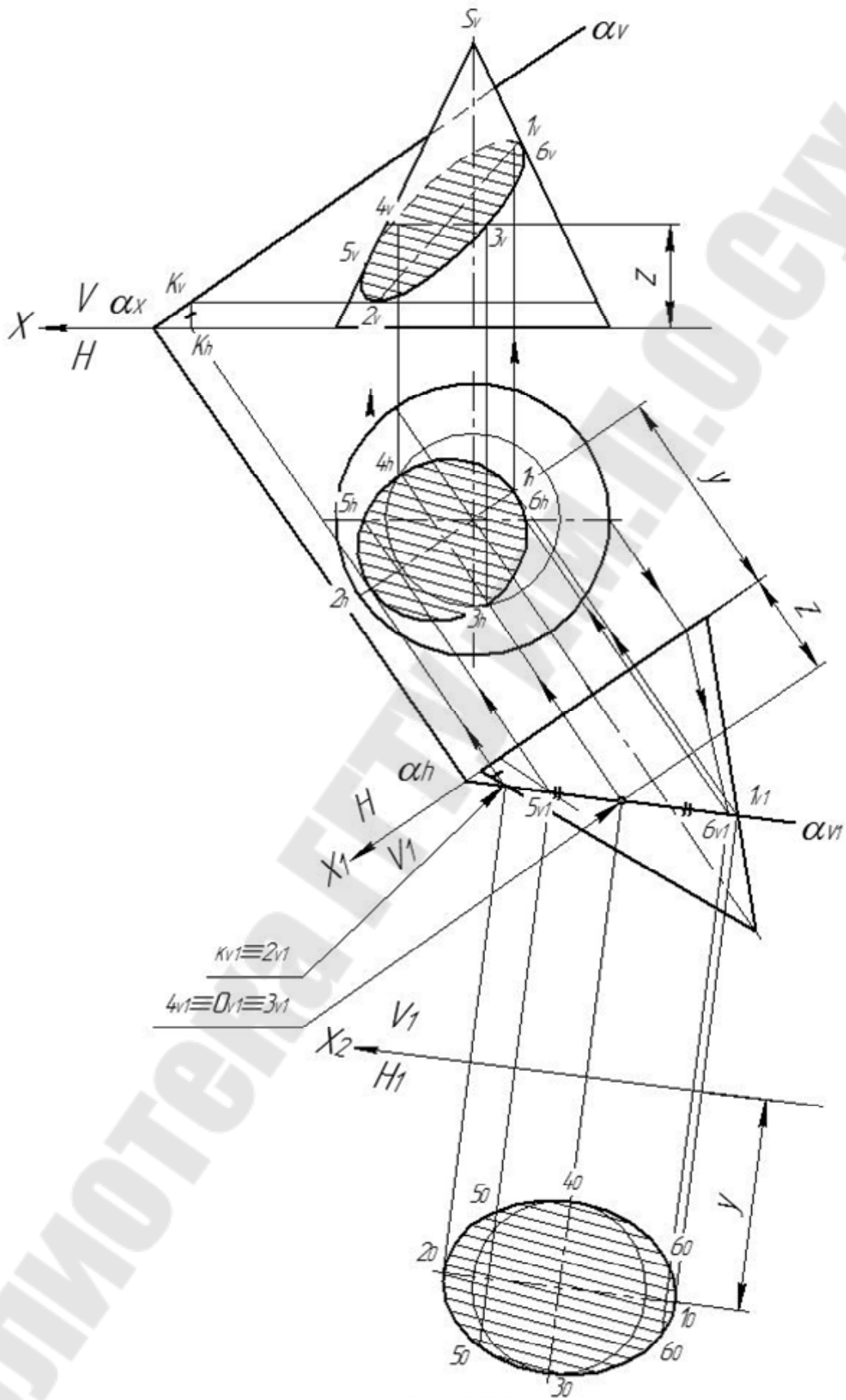


Рис. 22

Боковая поверхность конуса разворачивается в круговой сектор (рис. 23). Центральный угол сектора вычисляется по формуле

$$\alpha = R/l \cdot 360^\circ,$$

где  $R$  – радиус окружности основания конуса;  $l$  – длина образующей конуса.

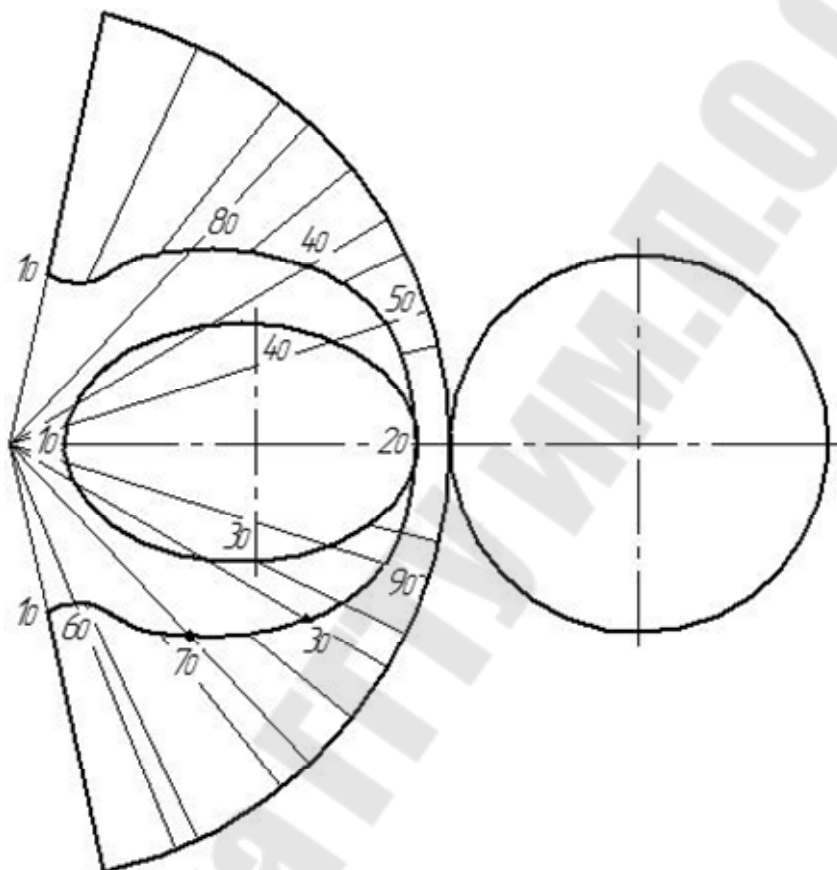


Рис. 23

Чтобы избежать вычислений, связанных с определением длины дуги сектора и угла  $\alpha$ , обычно вписывают в основание конуса правильный многоугольник. Тогда развертку боковой поверхности прямого кругового конуса с достаточной практической точностью заменяет развертка правильной пирамиды, вписанной в данный конус.

В нашем примере через все полученные точки сечения проводились образующие конуса. Натуральная величина отрезков образующих, заключенных между основанием конуса и фигурой в сечении, определяется вращением образующих до положения, параллельного плоскости проекций  $V$ . То есть определяли положение промежуточных точек на очерковых образующих  $K_1 \dots K_9$ .

На свободном поле чертежа радиусом, равным очерковой образующей, проведем дугу окружности (рис. 23) и от произвольной точки на ней откладываем дуги, равные хордам, измеренным по горизонтальной проекции основания конуса для соответствующих точек. На соответствующих образующих откладываются натуральные величины отсеченных частей образующих. Соединив с помощью лекала точки  $K_1...K_9$ , получим развертку боковой поверхности усеченного конуса. Пристроив нижнее основание и истинную величину эллипса в сечении, получим полную развертку усеченной части конуса.

Далее приведены варианты заданий к задаче 1.

Напоминаем, что номер варианта, если преподавателем не оговорено иное, соответствует номеру фамилии студента в учебном журнале группы.

## 6. Взаимное пересечение поверхностей (задание 2)

Проработайте теоретический материал «Пересечение поверхностей». Обратите внимание на общий случай, реализующийся с помощью вспомогательных секущих плоскостей, условия применения метода вспомогательных секущих сфер и на частные случаи пересечения поверхностей вращения.

Для успешного выполнения задания необходимо проработать и уметь практически выполнять следующие действия:

- выделение на поверхности семейств определяющих линий (если возможно, простейших);
- строить проекции точек и линий на поверхности;
- знать свойства проекций фигур с проецирующей поверхностью.

Две поверхности пересекаются в общем случае по пространственной замкнутой линии, каждая точка которой принадлежит обоим из заданных поверхностей.

Для построения линии пересечения находят ряд точек, общих для обеих поверхностей, и соединяют их линиями с учетом их характера и видимости.

В общем случае для определения линии пересечения двух кривых поверхностей применяют метод вспомогательных секущих плоскостей. Например, проводят ряд (семейство) секущих плоскостей (рис. 24)  $\omega_i$ . Каждая из них пересекает поверхность  $\alpha$  по линиям семейства  $k$ , а поверхность  $\beta$  – по линиям семейства  $l$ . Соответствующим

щие линии этих семейств пересекаются в точках, принадлежащих обеим поверхностям, т. е. искомой линии пересечения поверхностей:  $k_1 \cap l_1 = M_1, M_2; k_2 \cap l_2 = M_3, M_4$  и т. д.

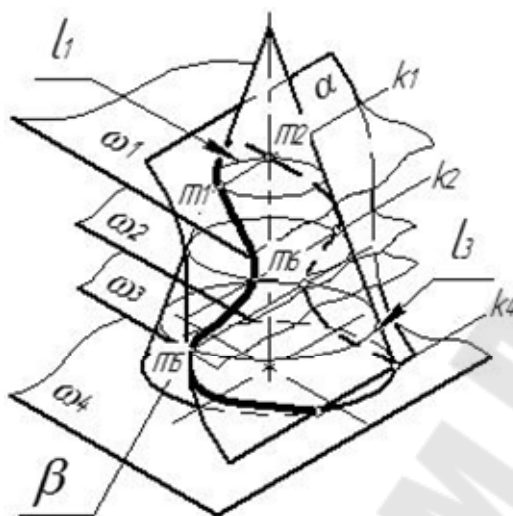


Рис. 24

**Алгоритм решения задачи:**

1. Вводим вспомогательную секущую поверхность  $\omega_1$ .
2. Строим линии пересечения поверхности  $\omega_1$  с заданными поверхностями  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\omega_1 \cap \alpha = l_1; \omega_1 \cap \beta = k_1$ .
3. Находим точку (точки) пересечения найденных линий:  $M(M) = l_1 \cap k_1$ .
4. Повторяя операцию 3, получаем множество таких точек и проводим через них искомую линию пересечения:  $M_1 \dots M_n \in m$ .

В качестве вспомогательных рекомендуется выбирать поверхности, которые в пересечении с данными поверхностями дают линии, проекции которых являются простейшими – прямыми или окружностями. Этот выбор зависит от следующих условий:

- вида заданных поверхностей;
- взаимного расположения заданных поверхностей;
- их положения относительно плоскостей проекций.

Приступая к решению задачи, сначала следует охарактеризовать заданные поверхности: их вид, положение в пространстве относительно плоскостей проекций, взаимное расположение, семейства простейших линий на этих поверхностях.

При решении задач на пересечение двух поверхностей целесообразно заранее определить характер искомой линии пересечения, что

существенно облегчит поиск опорных и характеристических точек и построение собственно линии.

Поверхность порядка  $n_1$  пересекается с поверхностью порядка  $n_2$  по кривой линии, порядок которой равен произведению порядков линий  $n_1$  и  $n_2$ .

Далее решение проводится в следующей последовательности:

- определяют, если это возможно, опорные точки: высшие, низшие, точки, в которых изменяется видимость, и т. д.;
- определяют вид вспомогательных поверхностей и зоны их ввода на чертеже;
- находят несколько промежуточных точек;
- соединяют найденные точки лекальной линией с учетом видимости ее участков.

Чаще всего в качестве простейших вспомогательных поверхностей используют плоскости и сферы, в связи с чем из общего случая выделяют в основном два, которые называются способом вспомогательных секущих плоскостей и способом вспомогательных секущих сфер.

Две соосные поверхности вращения пересекаются между собой по окружностям, число которых равно числу точек пересечения их образующих. Это свойство лежит в основе метода вспомогательных секущих сфер.

Условия, при которых может быть применен метод вспомогательных секущих сфер, формулируются следующим образом:

1. Две пересекающиеся поверхности должны являться поверхностями вращения.
2. Оси вращения данных поверхностей должны пересекаться между собой.
3. Плоскость, образованная пересекающимися осями симметрии, должна быть параллельна какой-либо плоскости проекций.

Первоначальной целью проведения построений линии пересечения поверхностей является получение достоверно построенной искомой линии хотя бы в одной из плоскостей проекций. Тогда преимуществом метода вспомогательных секущих поверхностей является возможность построения достоверной линии пересечения поверхностей только по одной проекции.

В случаях, когда одна из поверхностей находится в проецирующем положении, решение задачи уже присутствует на чертеже и на-



ходится на вырожденной проекции проецирующей поверхности. Решение задачи сводится к построению недостающих проекций по признакам принадлежности точек прямым или кривым линиям, проведенным на этих поверхностях. Решение задачи справедливо для любой поверхности в сочетании с пересекающей ее проецирующей.

Графические построения упрощаются, если условия задачи описываются требованиями частых случаев пересечения, например, условиям теоремы Монжа.

Таким образом, правильно выполненный предварительный анализ условий задачи позволяет существенно снизить объем графических построений без потери качества получаемого изображения на чертеже.

Рассмотрим несколько примеров.

### **Пример 1**

Необходимо построить линии пересечения соосных поверхностей вращения (рис. 25).

Точное решение представлено во фронтальной плоскости проекций. Коническая и сферическая поверхности соосны. Так как сферическая поверхность имеет множество осей симметрии, то цилиндрическая и сферическая поверхности также соосны. Следовательно, плоскости окружностей во фронтальной плоскости проекций считаются своими вырожденными проекциями – прямыми линиями, проведенными между точками пересечения образующих пересекающихся поверхностей.

Тогда горизонтальная проекция линий пересечения строится по фронтальной. Причем, так как плоскости окружностей в пересечении конической и сферической поверхностей являются горизонтальными плоскостями, то эти окружности в горизонтальную плоскость проекций строятся без искажений.

Плоскость окружности в пересечении цилиндрической и сферической поверхностей наклонена к горизонтальной плоскости проекций. В горизонтальную плоскость проекций эта окружность проецируется в виде эллипса, который строится по его характеристическим точкам, определяющим размеры большой и малой осей эллипса.

При построении горизонтальных проекций необходимо правильно отображать видимость линий.

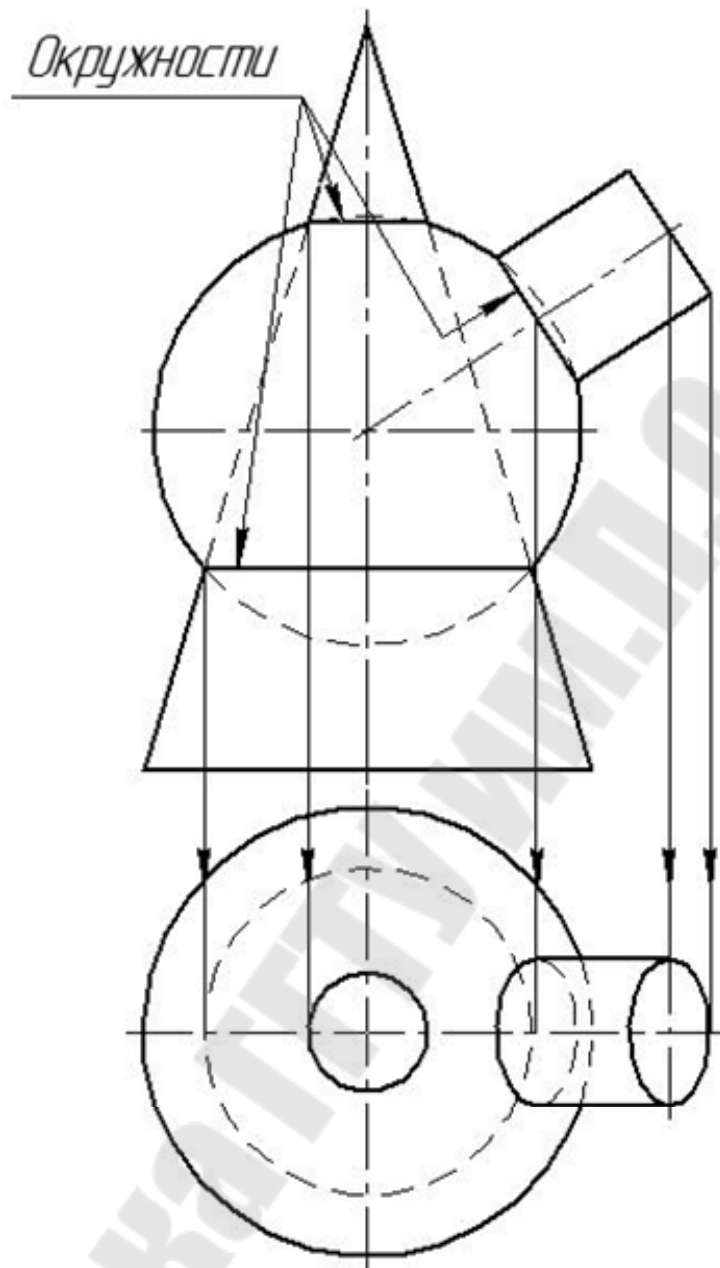


Рис. 25

### Пример 2

Необходимо построить линии пересечения поверхностей вращения в условиях применимости теоремы Монжа (рис. 26).

Это теорема о трех окружностях, сформулированная Жаном Д'Аламбером и доказанная Гаспаром Монжем.

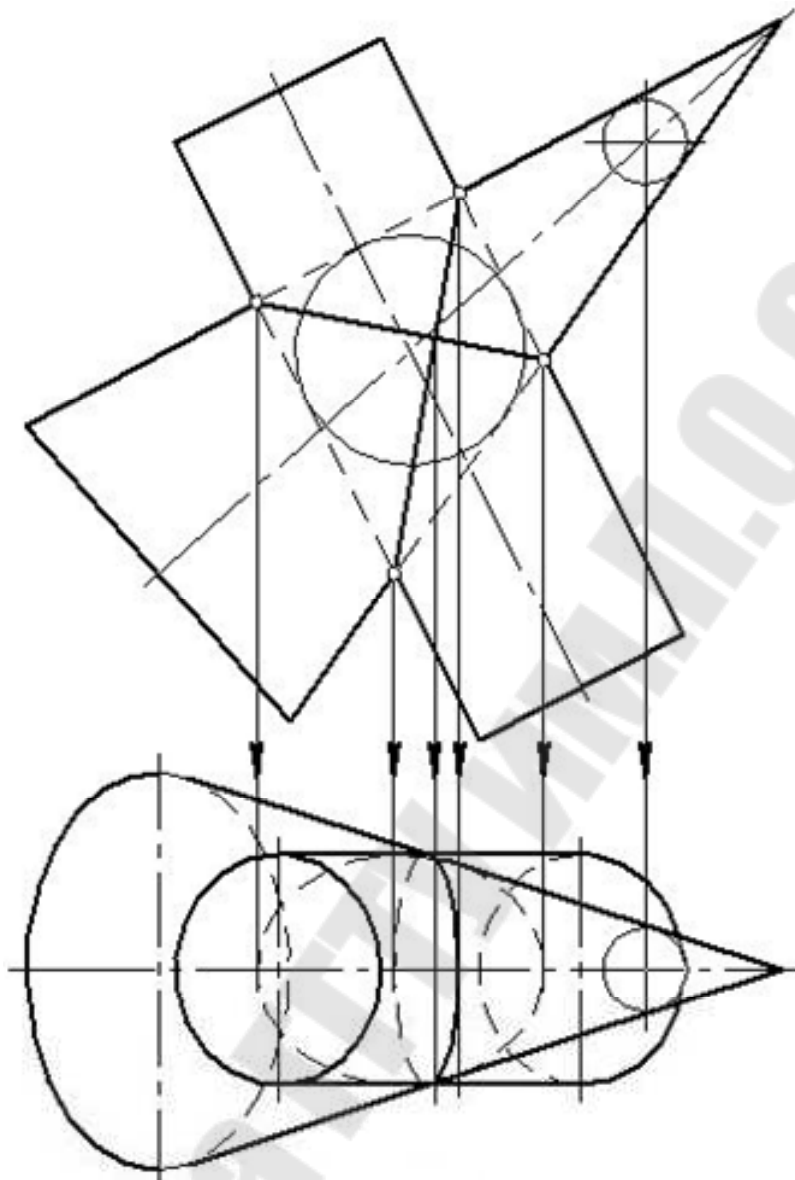


Рис. 26

В упрощенном виде теорему читают так: если две поверхности вращения второго порядка описаны около третьей поверхности вращения второго порядка, или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Причем плоскости кривых проходят через прямую, соединяющую точки двойного соприкосновения.

Точное решение представлено во фронтальной плоскости проекций. Пространственная замкнутая кривая линия пересечения данных поверхностей распалась на две плоские кривые – эллипсы. Плоскости эллипсов перпендикулярны фронтальной плоскости проекций.

Следовательно, плоскости эллипсов во фронтальной плоскости проекций читаются своими вырожденными проекциями – прямыми линиями, проведенными между точками пересечения образующих пересекающихся поверхностей.

В горизонтальную плоскость проекций эти эллипсы проецируются без искажений по их характеристическим точкам, определяющим размеры больших и малых осей эллипсов.

При построении горизонтальных проекций эллипсов необходимо правильно отображать видимость линий.

На рис. 26 показано правильное построение очерков конуса вращения в плоскостях проекций. Необходимо помнить, что в конус вращения всегда вписывается сфера, а все образующие конуса тогда являются касательными к ее поверхности. Центр сферы в плоскости проекции проецируется по линии проекционной связи, а очерк вписанной в конус сферической поверхности во всех плоскостях проекций имеет одинаковый диаметр.

### **Пример 3**

Необходимо построить линию пересечения гранных поверхностей (рис. 27).

В случае пересечения гранных поверхностей в общем случае возникает пространственная замкнутая ломаная линия, каждый участок которой является отрезком прямой. Для построения этой линии необходимо найти опорные точки построения, которые возникают в точках пересечения ребер первой поверхности с гранями второй и в точках пересечения ребер второй поверхности с гранями первой. Прямолинейные участки строящейся ломаной образуются вследствие пересечения граней поверхностей между собой.

При построении проекций ломаной необходимо правильно отображать видимость линий, понимая, что видимые линии принадлежат видимым граням. Для правильного отображения важно правильно определить видимость ребер обеих поверхностей уже на исходном чертеже. В случаях затруднений при определении видимости ребер следует использовать метод конкурирующих точек.

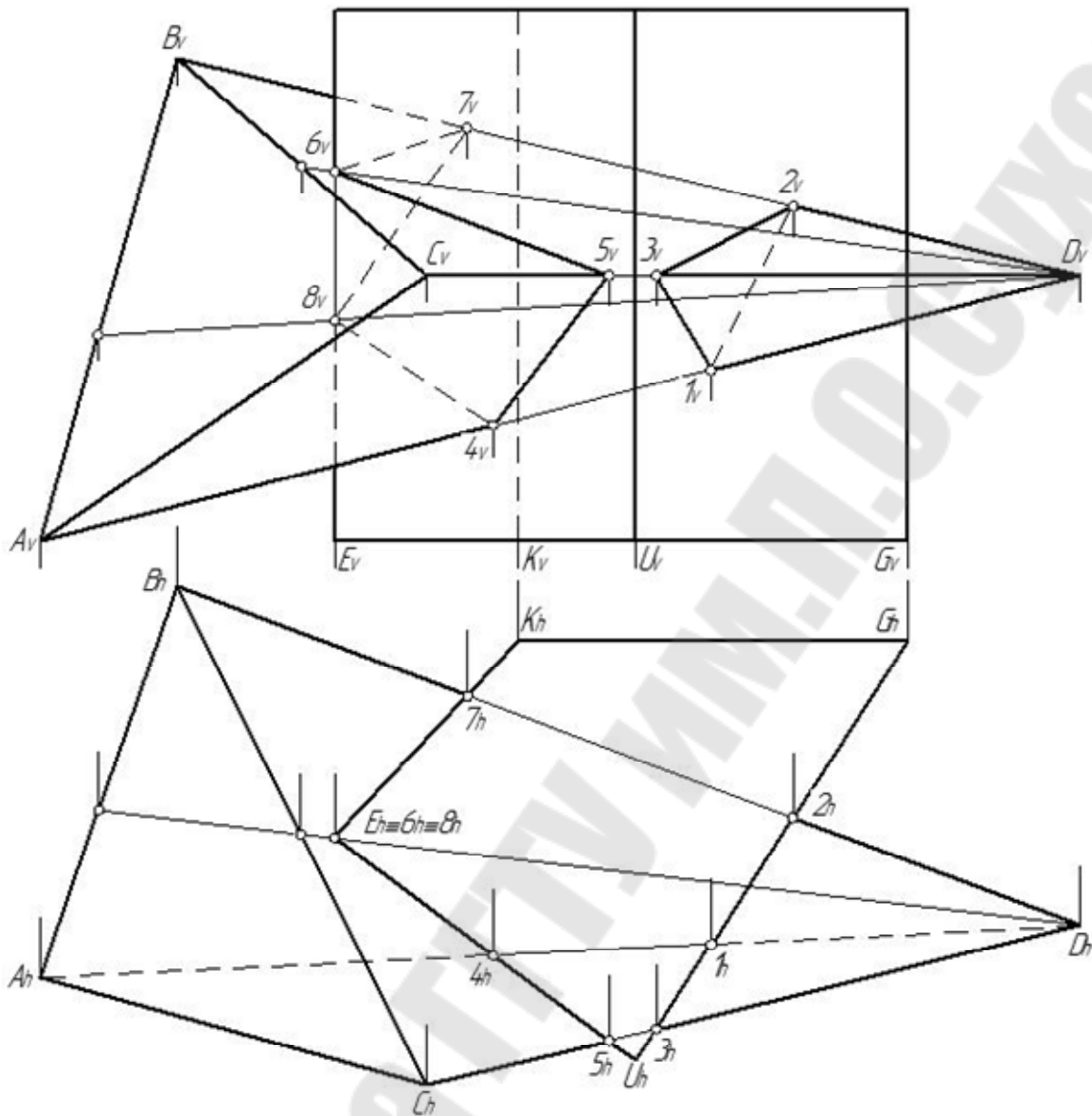


Рис. 27

На рис. 27 боковая поверхность призмы занимает проецирующее положение по отношению к горизонтальной плоскости проекций. Следовательно, решение задачи уже имеется на чертеже благодаря собирательному свойству проецирующего геометрического образа. Горизонтальная проекция показывает, что линия пересечения поверхностей распадается на две:  $1_H-2_H-3_H$  и  $4_H-5_H-6_H-7_H-8_H$ . Построение фронтальных проекций точек  $1_V, 2_V, 3_V, 4_V, 5_V, 7_V$  проводится по линиям проекционных связей на фронтальных проекциях соответствующих боковых ребер пирамиды.

Точки  $6_V$  и  $8_V$  принадлежат боковому ребру  $E$  призмы и их определение осуществляется по признаку принадлежности точки плоско-

сти: точка принадлежит плоскости, если принадлежит прямой, лежащей в этой плоскости. Ребро  $E$  призмы пересекает две боковые грани пирамиды:  $ABD$  и  $BCD$ :  $(\cdot)6 \in BCD$ ;  $(\cdot)8 \in ABD$ .

Соединение найденных точек в замкнутые ломаные линии производится последовательным переходом из одной боковой грани пирамиды в следующую, смежную с ней, с учетом видимости участков ломаной.

#### Пример 4

Необходимо построить линию пересечения поверхностей вращения, применив метод вспомогательных секущих плоскостей (рис. 28).

На рис. 28 даны две пересекающиеся поверхности  $\alpha \cap \beta$ :

– поверхность  $\alpha$ : прямой круговой конус с вершиной  $S(S_H, S_V)$  и диаметр окружности основания  $AB(A_H B_H, A_V B_V)$ ;

– поверхность  $\beta$ : фронтально-проецирующая поверхность цилиндра вращения с осью  $J(J_H, J_V)$  и образующей  $CD(C_H D_H, C_V D_V)$ .

Анализ их взаимного расположения показывает, что имеет место глубокая врезка цилиндра в конус. Следовательно, линия пересечения будет одна пространственная кривая четвертого порядка.

Анализ положения поверхностей относительно плоскостей проекций позволяет сделать вывод, что фронтальная проекция линии пересечения задана по условию –  $1_V, 2_V, 3_V, 4_V, 5_V, 6_V, 7_V, 8_V, 9_V, 10_V, 11_V, 12_V, 13_V, 14_V$ , так как поверхность цилиндра является фронтально-проецирующей.

#### Алгоритм построения точек пересечения $1_V, 2_V, \dots, 14_V$ :

1. Вводим вспомогательную секущую плоскость  $\omega \parallel H$ .
2.  $\omega_2 \cap \alpha_V = \Pi(R_2)$  – окружность  $\Pi$  радиуса  $R_2$ .  $\omega_2 \cap \beta_V = E_V \equiv F_V$  – фронтальная проекция очерковой образующей цилиндра.
3.  $\Pi(R_2) \cap E_H F_H = 2$  и  $14$  – искомые точки, принадлежащие линии пересечения.

Многочисленное применение вспомогательной плоскости  $\omega$  позволяет построить все обозначенные на рис. 28 проекции точек пересечения  $\alpha$  и  $\beta$ .

Построение проекций *опорных точек*: фронтальная проекция цилиндра – окружность с центром  $J_V$  (рис. 28). Часть ее, наложенная на фронтальную проекцию конуса, и будет являться фронтальной проекцией искомой линии пересечения:

$$1_V, 2_V \equiv 14_V; 3_V \equiv 13_V; 4_V \equiv 12_V; 5_V \equiv 11_V; 6_V \equiv 10_V; 7_V \equiv 9_V, 8_V.$$

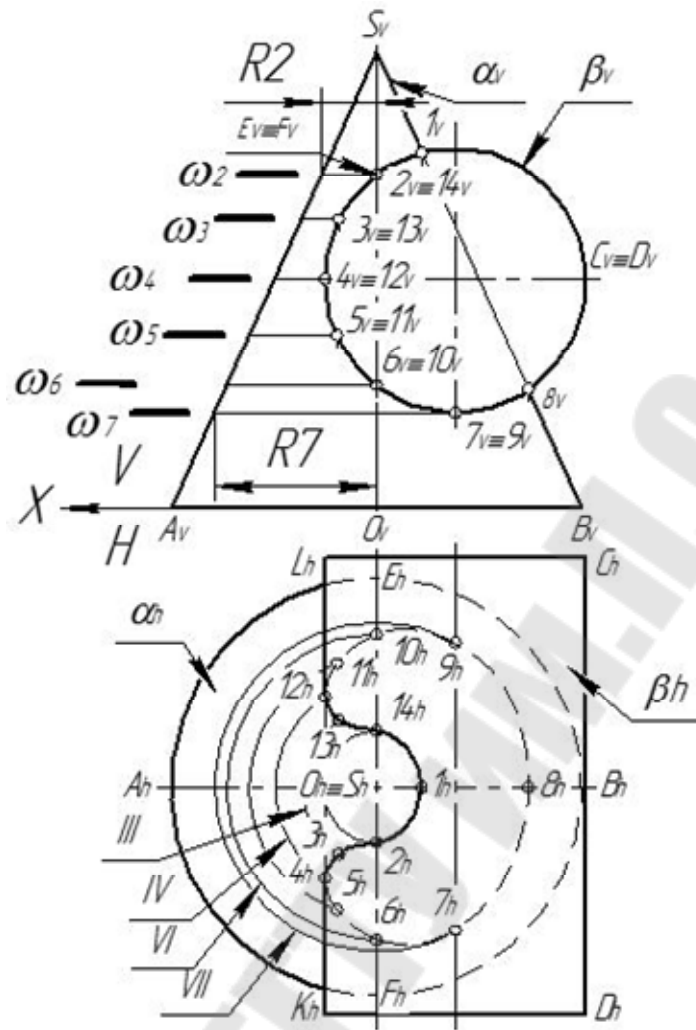


Рис. 28

Из этих точек фронтальными проекциями точек будут:

1. Самая верхняя –  $1_V$ .
2. Самая нижняя –  $7_V \equiv 9_V$ .
3. Самые левые и пара точек, являющихся границами видимости горизонтальной проекции линии пересечения, –  $4_V \equiv 12_V$ .
4. Самая правая –  $8_V$ .

Построение горизонтальной проекции всех намеченных точек следует начинать с опорных.

Горизонтальные проекции точек  $1_H$  и  $8_H$  лежат на горизонтальной проекции образующей конуса  $S_H B_H$ . Таким образом, по  $1_V$  строим  $1_H$ , по  $8_V \rightarrow 8_H$ , проведя соответствующие линии проекционных связей.

Горизонтальные проекции всех остальных точек строим с помощью метода вспомогательных секущих плоскостей, применяя приведенный выше алгоритм.

Например, точки 4 и 12, фронтальные проекции которых  $4_V \equiv 12_V$  принадлежат очерковой образующей цилиндра, являются границей видимой и невидимой частей горизонтальной проекции линии пересечения. Чтобы построить  $4_H$  и  $12_H$ , проведем горизонтальную вспомогательную секущую плоскость. Ее фронтальный след пройдет через  $4_V \equiv 12_V$  и ось вращения цилиндра  $J_V$ . Она рассекает цилиндр по очерковой образующей, а конус – по окружности IV радиуса  $R_4$ . Там, где окружность IV пересекает очерковую образующую, и лежат горизонтальные проекции  $4_H$  и  $12_H$  точек 4 и 12.

Горизонтальные проекции самых нижних точек  $7_H$  и  $9_H$  строятся аналогично: проводим горизонтальную плоскость  $\omega_7$ ; фронтальный след ее пройдет через  $7_V \equiv 9_V$ . Она пересечет конус по окружности VII радиуса  $R_7$  и коснется цилиндра по самой нижней образующей, горизонтальная проекция которой совпадает с осью  $J_H$  цилиндра. Там, где окружность VII пересечет  $J_H$ , и будут горизонтальные проекции  $7_H$  и  $9_H$  точек 7 и 9. Аналогично строим горизонтальные проекции всех остальных точек. Плавной линией – сплошной  $4_H, 3_H, 2_H, 1_H, 14_H, 13_H, 12_H$ , соединяем видимую часть линии, принадлежащую верхнему полуцилиндру, линией невидимого контура – пунктирной – соединяем точки  $4_H, 5_H, 6_H, 7_H, 8_H, 9_H, 10_H, 11_H, 12_H$ , лежащие на нижнем полуцилиндре.

### **Пример 5**

Полусфера  $\alpha$  пересекается с трехгранной призматической поверхностью  $\beta$  (рис. 29).

Анализ условия задачи позволяет сделать вывод о том, что каждая грань призмы рассекает сферу по окружности, плоскость которой в двух гранях 1, 2, 3, 4, 5 и 5, 6, 7, 8, 9, 10 – горизонтально-проецирующая, а в третьей 1, 11, 10 – фронтальная.

Фронтальные проекции окружностей, лежащих в горизонтально-проецирующих плоскостях, являются эллипсами. Часть окружности во фронтальную плоскость проекций спроецируется в натуральную величину.

### **Опорные точки**

При пересечении многоугольника с кривой поверхностью опорными являются точки пересечения ребер многогранника с кривой поверхностью. В нашем случае – горизонтальные проекции опорных точек  $1_H, 5_H$  и  $10_H$ .



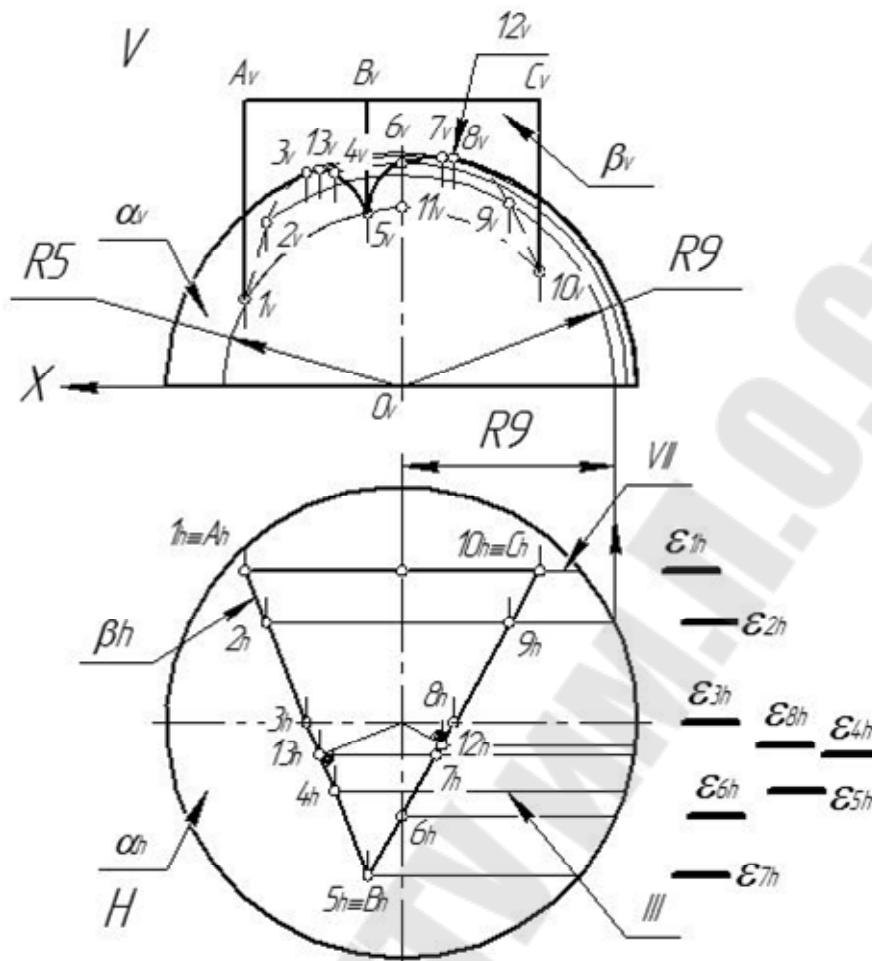


Рис. 29

Кроме этих к опорным относятся точки, определяющие границы видимости фронтальной проекции линии пересечения. В нашем случае горизонтальные проекции  $3_H$  и  $8_H$  – пересечение главного меридиана сферы с боковыми гранями призмы. Точки 12 и 13 – наивысшие точки.

Построение фронтальных проекций опорных и промежуточных точек выполняется с помощью вспомогательных фронтальных плоскостей  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_7$ , горизонтальные следы которых  $\varepsilon_{H1}, \dots, \varepsilon_{H7}$ .

**Алгоритм построения:**

1.  $\varepsilon_{H7} \cap \alpha_h = I(R_5)$  – окружность радиуса  $R_5$ .
2.  $B \in \varepsilon_{H7}$ ;  $B_1(B_H \equiv B_{H1}, B_V, B_{V1})$  – переднее ребро призмы.
3.  $I(R_5) \cap B_V, B_{V1} = 5_V$ .

Каждая из этих плоскостей рассекает сферу по окружности, например,  $R_5$  и  $R_{10}$ , а призму – по ребрам 5 и 10 (или для других плоскостей – по горизонтально-проецирующим прямым 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9), фронтальные проекции которых совпадут с линиями связи.

Точки пересечения фронтальных проекций окружностей и фронтальных проекций соответствующих прямых определяют фронтальные проекции линии пересечения:  $1_V, 2_V, 3_V, 4_V, 5_V, 6_V, 7_V, 8_V, 9_V, 10_V, 11_V, 12_V, 13_V$ . Видимая часть линии – на передней четверти сферы между точками 3, 4, 5, 6, 7, 8. Невидимая – на задней четверти сферы, за главным меридианом – 3, 2, 1, 11, 10, 9, 8.

### Пример 6

Даны два пересекающихся круговых конуса с вершинами  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 30).

Задача решается методом вспомогательных секущих сфер, так как метод вспомогательных секущих плоскостей не всегда обеспечивает простейшее решение. В данном случае, если применить плоскости частного положения, например, горизонтальные, то вертикально стоящий конус будет рассечен по окружностям, а наклонный – по эллипсам. Точное построение эллипса, а также гиперболы или параболы трудоемко. Нужно применять плоскости общего положения, проходящие через вершины конусов. В этом случае решение задачи значительно осложнится. Поэтому в рассматриваемом примере предпочтение следует отдать методу вспомогательных секущих сфер.

Проанализируем взаимное расположение фигур:

- оси конусов пересекаются в точке  $O$  ( $O_H, O_V$ );
- плоскость пересекающихся осей вращения конусов параллельна фронтальной плоскости проекций  $V$ , т. е.  $S_1OS_2$  ( $S_{1V}O_VS_{2V}$ ,  $S_1 \equiv O_V, S_{1H}$ )  $ПВ$ .

Эти два условия определяют применимость метода концентрических сфер.

Центр вспомогательных секущих сфер располагается в точке пересечения осей, т. е. сфера соосна с каждой из конических поверхностей. А так как по условию конусы круговые и являются поверхностями вращения, то они при этом пересекутся со сферой по окружностям, плоскости которых перпендикулярны осям соответствующего конуса.

Так как плоскость, образованная пересекающимися осями, является фронтальной, то плоскости окружностей будут фронтально-проецирующими. Следовательно, во фронтальную плоскость проекций эти окружности спроецируются в отрезки прямых, точки пересечения которых будут определять искомую линию пересечения.

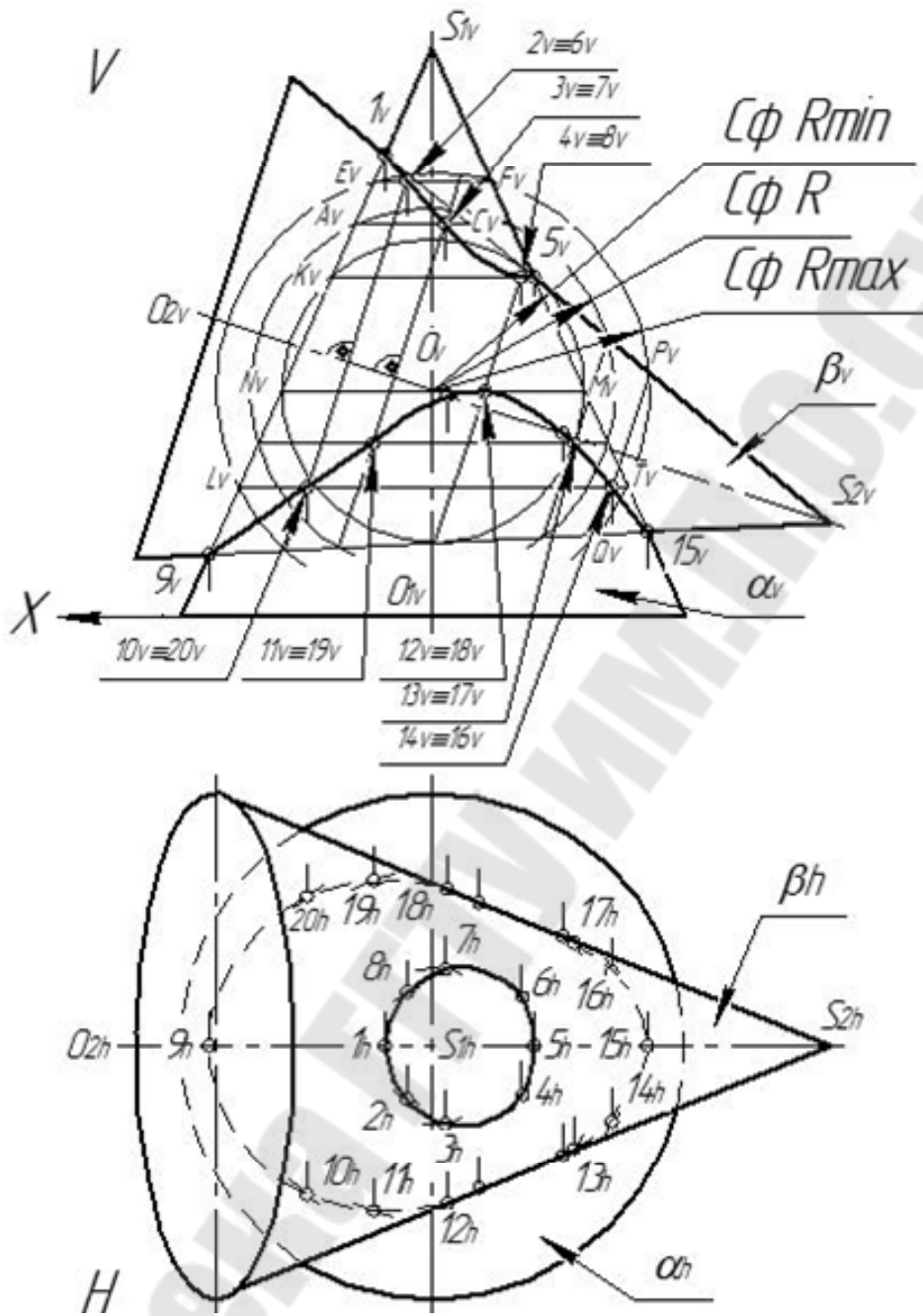


Рис. 30

**Алгоритм построения** рассмотрим на примере сферы  $R_{\max}$  (рис. 30):

1. Сфера  $S_{\phi} R_{\max} \cap \alpha = [E_V F_V]$  (окружность  $\Pi H$ );  
Сфера  $S_{\phi} R_{\max} \cap \alpha = [L_V T_V]$  (окружность  $\Pi H$ ).
2. Сфера  $S_{\phi} R_{\max} \cap \beta = [A_V B_V]$  (окружность  $\Pi V$ );  
Сфера  $S_{\phi} R_{\max} \cap \beta = [P_V Q_V]$  (окружность  $\Pi V$ ).
3.  $[E_V F_V] \cap [A_V B_V] = 2_V \equiv 8_V \rightarrow 2_H, 8_H$ ;  
 $[L_V T_V] \cap [A_V B_V] = 10_V \equiv 20_V \rightarrow 10_H, 20_H$ ;  
 $[L_V T_V] \cap [P_V Q_V] = 14_V \equiv 16_V \rightarrow 14_H, 16_H$ .

Опорные точки  $1(1_H, 1_V)$ ,  $5(5_H, 5_V)$ ,  $9(9_H, 9_V)$ ,  $15(15_H, 15_V)$  находятся на пересечении фронтальных очерков и по их фронтальным проекциям находим горизонтальные – на следе фронтальной плоскости симметрии, т. е. на  $S_H \equiv O_H, S_1h$ .

Минимальная сфера – Сф  $R_{\min}$  вписывается в наклонный конус с вершиной  $S_1(S_{1V}, S_{1V})$ . Ее фронтальная проекция касается поверхности конуса по окружности, спроецировавшейся в прямую  $(C_V D_V)$ . Эта же сфера (Сф  $R_{\min}$ ) пересекает прямой конус по двум окружностям  $[K_V 5_V]$  и  $[M_V N_V]$ . Пересекаясь с окружностью  $C_V D_V$ , они определяют фронтальные проекции двух пар точек линии пересечения  $[C_V D_V] \cap [K_V 5_V] = (4_V \equiv 6_V)$  и  $[C_V D_V] \cap [M_V N_V] = (12_V \equiv 18_V)$ .

Горизонтальные проекции  $4_H$  и  $6_H$  строятся на горизонтальной проекции окружности диаметром, равным отрезку  $[K_V 5_V]$ , и, соответственно, горизонтальные проекции  $12_H$  и  $18_H$  – на горизонтальной проекции окружности диаметром  $[M_V N_V]$ .

Максимальная сфера Сф  $R_{\max}$  выбирается несколько меньше расстояния от центра  $O_V$  до удаленной опорной точки ( $1_V$  или  $9_V$ ). Она пересекает прямой конус по окружностям, фронтальные проекции которых – отрезки  $[E_V F_V]$  и  $[L_V T_V]$ , а наклонный – по окружностям –  $[A_V B_V]$  и  $[P_V Q_V]$ . Фронтальные проекции этих окружностей, соответственно, пересекаются в точках, являющихся фронтальными проекциями точек строящейся линии пересечения:

$$\begin{aligned} [E_V F_V] \cap [A_V B_V] &= 2_V \equiv 8_V; \\ [L_V T_V] \cap [A_V B_V] &= 10_V \equiv 20_V; \\ [L_V T_V] \cap [P_V Q_V] &= 14_V \equiv 16_V. \end{aligned}$$

Горизонтальные проекции  $2_H$  и  $8_H$  точек 2 и 8 лежат на горизонтальной проекции окружности диаметром  $[E_V F_V]$  и, соответственно,  $10_H$  и  $20_H$  – на окружности  $[L_V T_V]$ ;  $14_H$  и  $16_H$  – также на окружности  $[L_V T_V]$ . Аналогично строят точки с помощью промежуточной сферы Сф  $R$ . Это точки  $3_V \equiv 7_V$ ,  $11_V \equiv 19_V$ ,  $13_V \equiv 17_V$ . На рис. 30 диаметры вспомогательных окружностей не обозначены.

### Пример 7

Построить линию пересечения поверхностей – цилиндрической  $\alpha$  и закрытого тора  $\beta$  (рис. 31).

Анализ условия задачи показывает, что оси вращения заданных поверхностей пересекаются, а плоскость, образованная пересекающимися осями, параллельна плоскости проекций  $V$ . Общая плоскость симметрии  $\gamma \perp V$ . При этих условиях можно применить метод концентрических сфер с центром в точке  $O = J_\beta \cap J_\alpha$ .

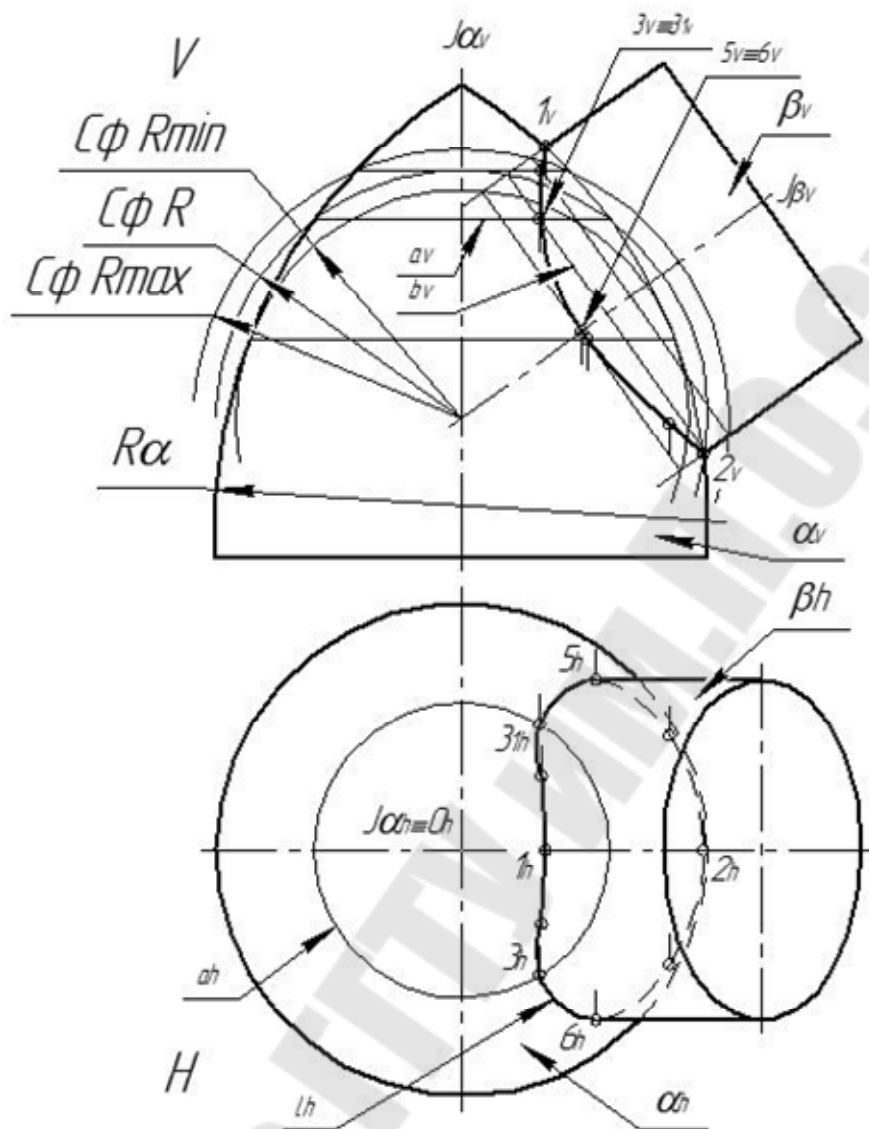


Рис. 31

План решения соответствует общему алгоритму.

**Последовательность построений на чертеже**

Определение высшей 1 и низшей 2 точек аналогично предыдущему примеру.

Определяем проекции общего центра вспомогательных сфер:  $O_V = J_{\alpha V} \cap J_{\beta V}$ ,  $O_H \equiv J_{\alpha H}$ . Величина радиуса сферы изменяется в пределах  $R_{\max} > R > R_{\min}$ . В данной задаче  $R_{\max}$  определяется как  $|O_V 1_V|$ ;  $R_{\min}$  – как радиус сферы, касательной к поверхности тора. Находим  $3_V(3'_{1V}) = \alpha_V \cap \beta_V$ .

Для нахождения какой-либо промежуточной точки, например,  $3(3_1)$ , вводим в решение задачи вспомогательную сферу  $C\phi R$ , задав

ее фронтальный очерк – окружность с центром  $O_V$ . Построим отрезки  $a_V$  и  $b_V$  – фронтальные проекции окружностей, по которым Сф  $R$  пересекает, соответственно,  $\alpha$  и  $\beta$ . Находим  $3_V$  ( $3_{1V}$ ) =  $a_V \cap b_V$ . Горизонтальные проекции  $3_H$  и  $3_{1H}$  определяем на окружности  $a_H$ .

Построим аналогичным образом несколько промежуточных точек. Соединим одноименные проекции всех найденных точек кривыми  $l_V$  и  $l_H$  с учетом видимости.

Видимость линии  $l$  в проекции на плоскость проекций  $V$  определяется проекциями  $1_V$  и  $2_V$ . Видимость линии  $l$  в проекции на плоскость проекций  $H$  определяется проекциями  $5_H$  и  $6_H$  точек 5 и 6 на очерковых образующих цилиндра.

## 7. Типичные ошибки, допускаемые при выполнении заданий

1. Недостаточно внимательное ознакомление с лекционным материалом и примерами, приведенными в данном методическом пособии. Вследствие этого неверно выбирается оптимальный путь решения конкретной поставленной задачи.

2. Ошибки при применении алгоритмов способов преобразования чертежа.

3. Неверно строится развертка боковой поверхности пирамиды вследствие отсутствия анализа положения ребер пирамиды относительно плоскостей проекций: являются ли они прямыми частного или общего положения? Если ребра представляют из себя прямые общего положения, то следует определить их натуральную величину, так как развертки строятся только на натуральных величинах всех необходимых отрезков.

4. Аналогично, при построении развертки усеченной поверхности пирамиды необходимо обращать внимание на отрезки ребер, какого они положения: частного или общего.

5. При построении развертки усеченной поверхности конуса вращения необходимо правильно определять натуральные величины отрезков образующих, используя в качестве эталонов очерковые образующие.

6. При выполнении задачи 2 задания 2 встречаются варианты, где нужно вычерчивать проекции конуса, ось которого параллельна одной из плоскостей проекций, но наклонена ко второй плоскости проекций. Неверно строятся очерки конуса вращения в этих плоско-

стях проекций. Необходимо помнить, что в конус вращения всегда вписывается сфера, а все образующие конуса тогда являются касательными к ее поверхности. Центр сферы в плоскости проекции проецируется по линии проекционной связи, а очерк вписанной в конус сферической поверхности во всех плоскостях проекций имеет одинаковый диаметр.

## 8. Примерные контрольные вопросы

1. Как определить натуральную величину отрезка прямой общего положения?
2. Как определить натуральную величину плоской фигуры методом вращения относительно проецирующей прямой?
3. Как определить натуральную величину плоской фигуры методом вращения относительно прямой уровня?
4. Как определить натуральную величину плоской фигуры методом перемены плоскостей проекций?
5. Изложите общий принцип алгоритма для решения задачи определения линии пересечения поверхности плоскостью.
6. Сформулируйте возможные варианты решения задачи по определению линии пересечения многогранника плоскостью.
7. В чем заключается решение задачи по определению сечения многогранника плоскостью с помощью способа граней и способа ребер?
8. Как строится линия пересечения цилиндра вращения, конуса вращения плоскостью?
9. Какие точки линии пересечения называются опорными? Какие точки линии пересечения называются характерными?
10. Какие линии получаются при пересечении цилиндра вращения, конуса вращения плоскостью?
11. Что называется разверткой поверхности?
12. Как строится развертка боковой поверхности пирамиды методом триангуляции?
13. Как строится развертка боковой поверхности призмы методом нормального сечения?
14. Как построить развертки боковых поверхностей цилиндра вращения, конуса вращения?

15. В каком случае развертки будут полными?
16. Как строятся развертки усеченной части поверхностей призмы, пирамиды, цилиндра вращения, конуса вращения?
17. Какой тип линии пересечения возникает при взаимном пересечении гранных поверхностей?
18. Какой тип линии пересечения возникает при взаимном пересечении кривых и гранных поверхностей?
19. Какой тип линии пересечения возникает при взаимном пересечении кривых поверхностей?
20. Как формулируется алгоритм решения задачи по определению линии пересечения поверхностей?
21. На каком основании осуществляется выбор поверхности-посредника?
22. Какие рекомендации по подбору вспомогательных секущих плоскостей можно сделать для случаев пересечения цилиндров, конусов, призм и пирамид?
23. В каких случаях для построения линии пересечения одной поверхности вращения другою рекомендуется применить вспомогательные секущие плоскости, параллельные плоскости проекций?
24. По каким линиям пересекаются между собой поверхности вращения, имеющие общую ось?
25. Как можно использовать случай, когда одна из проекций линии пересечения совпадает с проекцией цилиндрической или призматической поверхности?
26. В каких случаях возможно и целесообразно применять метод вспомогательных секущих сфер?
27. Какие линии пересечения получаются при взаимном пересечении двух поверхностей вращения, описанных вокруг общей для них сферы или вписанных в сферу?
28. Сформулируйте условия, при которых линия пересечения поверхностей второго порядка распадается на две плоские кривые.



## Литература

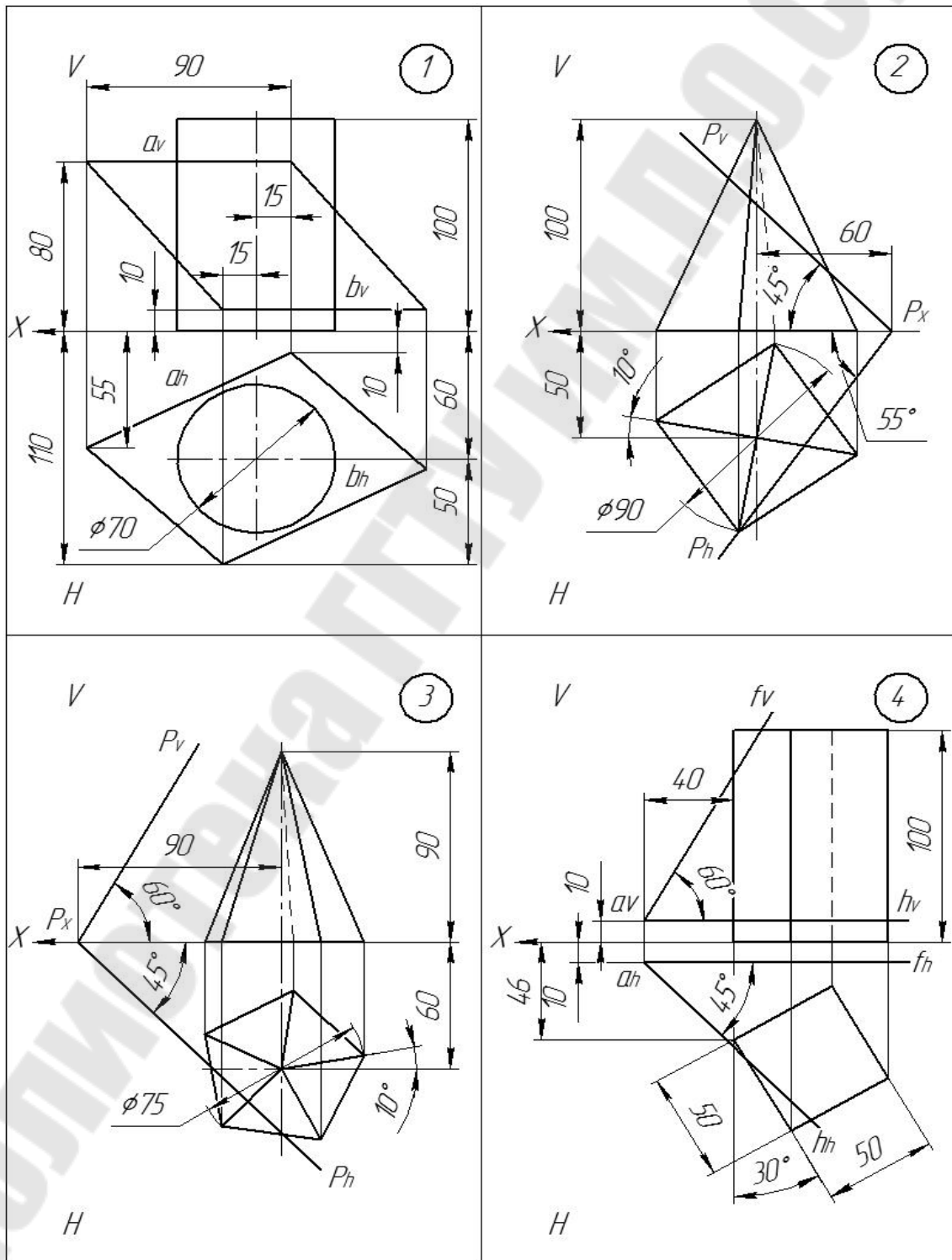
1. Арустамов, Х. А. Сборник задач по начертательной геометрии / Х. А. Арустамов. – М. : Машиностроение, 1978. – 445 с.
2. Бубенников, А. В. Начертательная геометрия / А. В. Бубенников. – М. : Высш. шк., 1985. – 228 с.
3. Гордон, В. О. Курс начертательной геометрии / В. О. Гордон, М. А. Семенцов-Огиевский. – М. : Наука, 1988. – 272 с.
4. Гордон, В. О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии / В. О. Гордон, Ю. Б. Иванов, Т. Е. Солнцева. – М. : Высш. шк., 1977. – 352 с.
5. Фролов, С. А. Начертательная геометрия / С. А. Фролов. – М. : Машиностроение, 1978. – 240 с.
6. Кокошко, А. Ф. Основы начертательной геометрии : учеб. пособие для вузов / А. Ф. Кокошко. – Минск : ТетраСистемс, 2013. – 191 с.

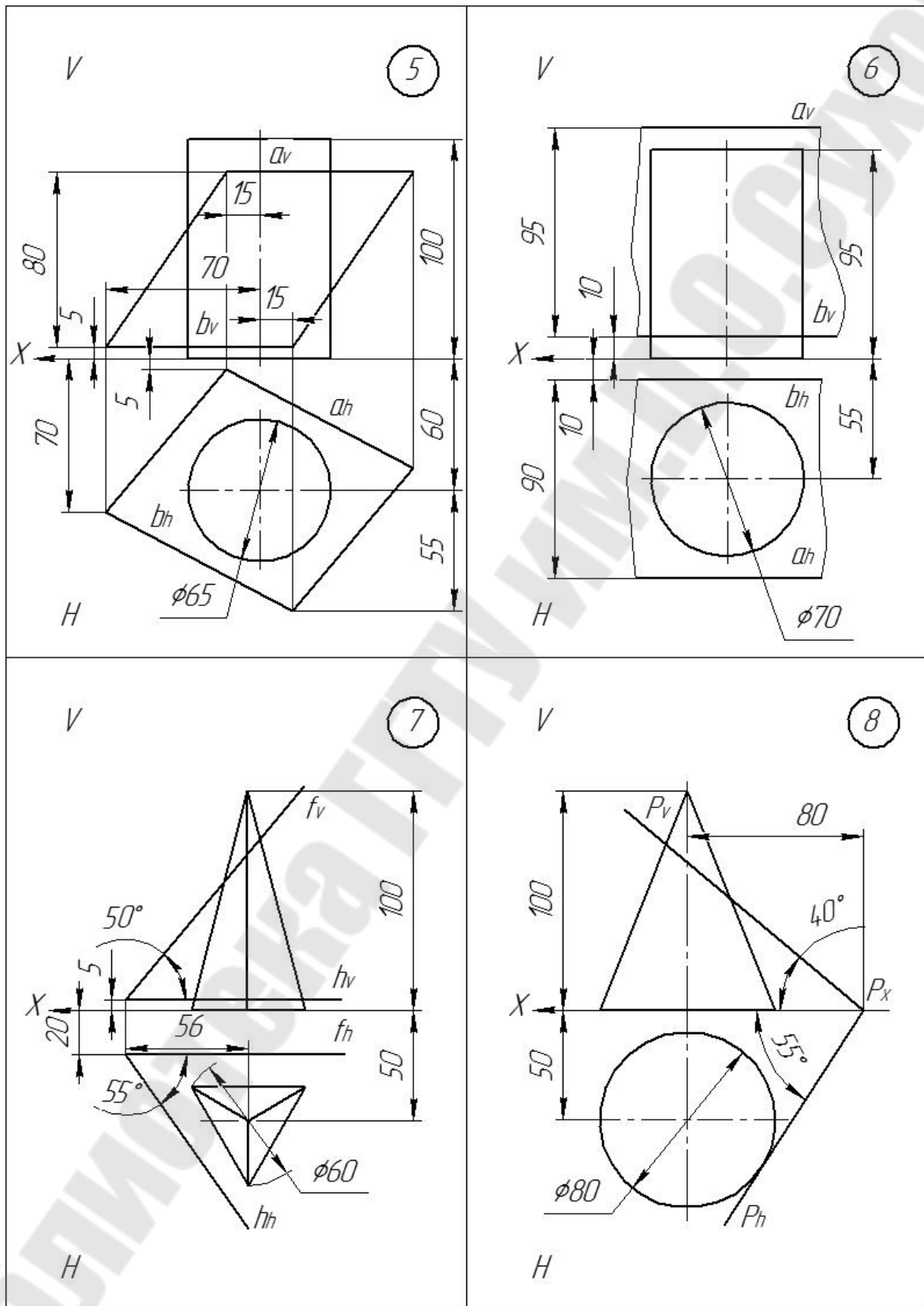
# Приложения

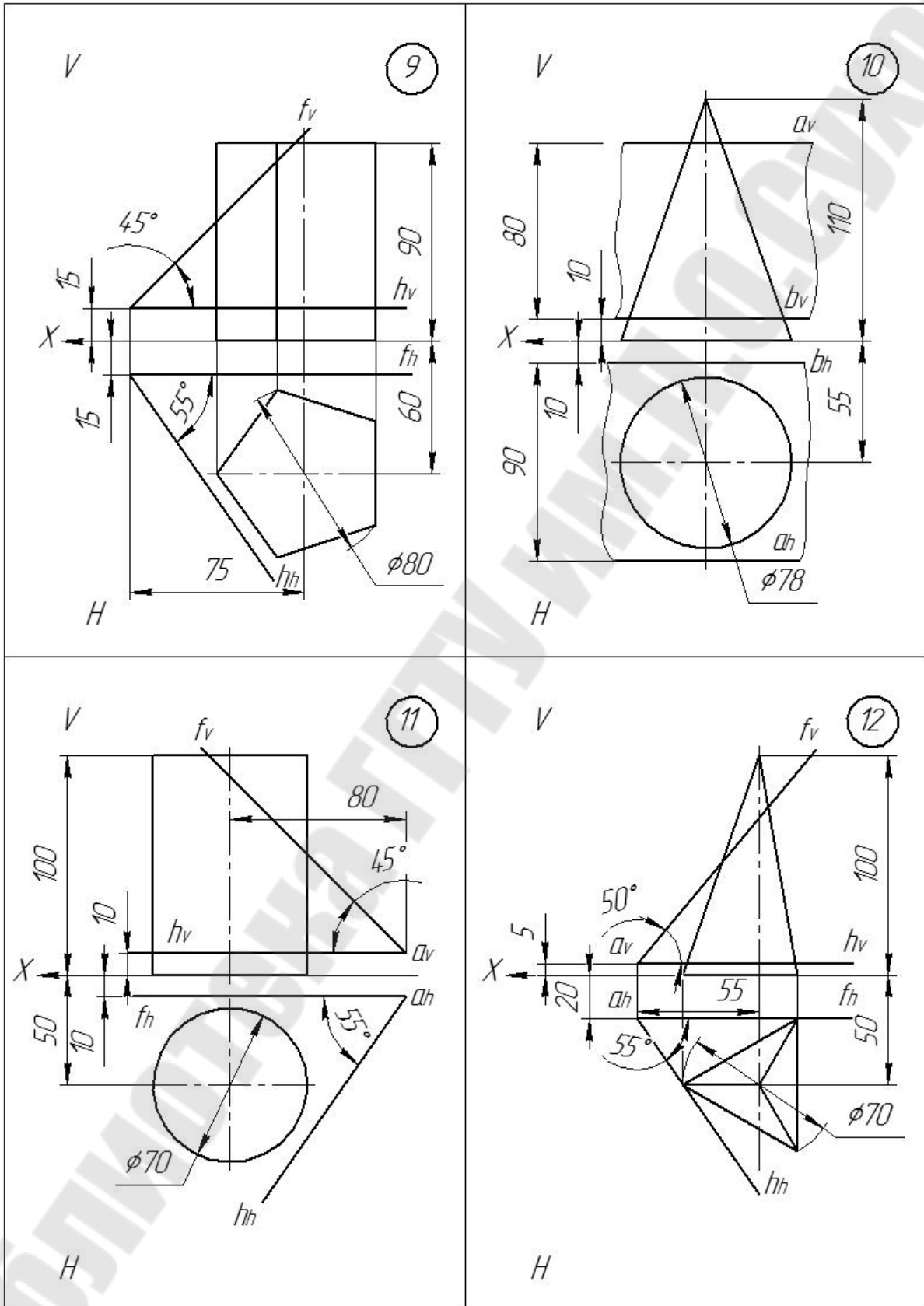
## Приложение 1

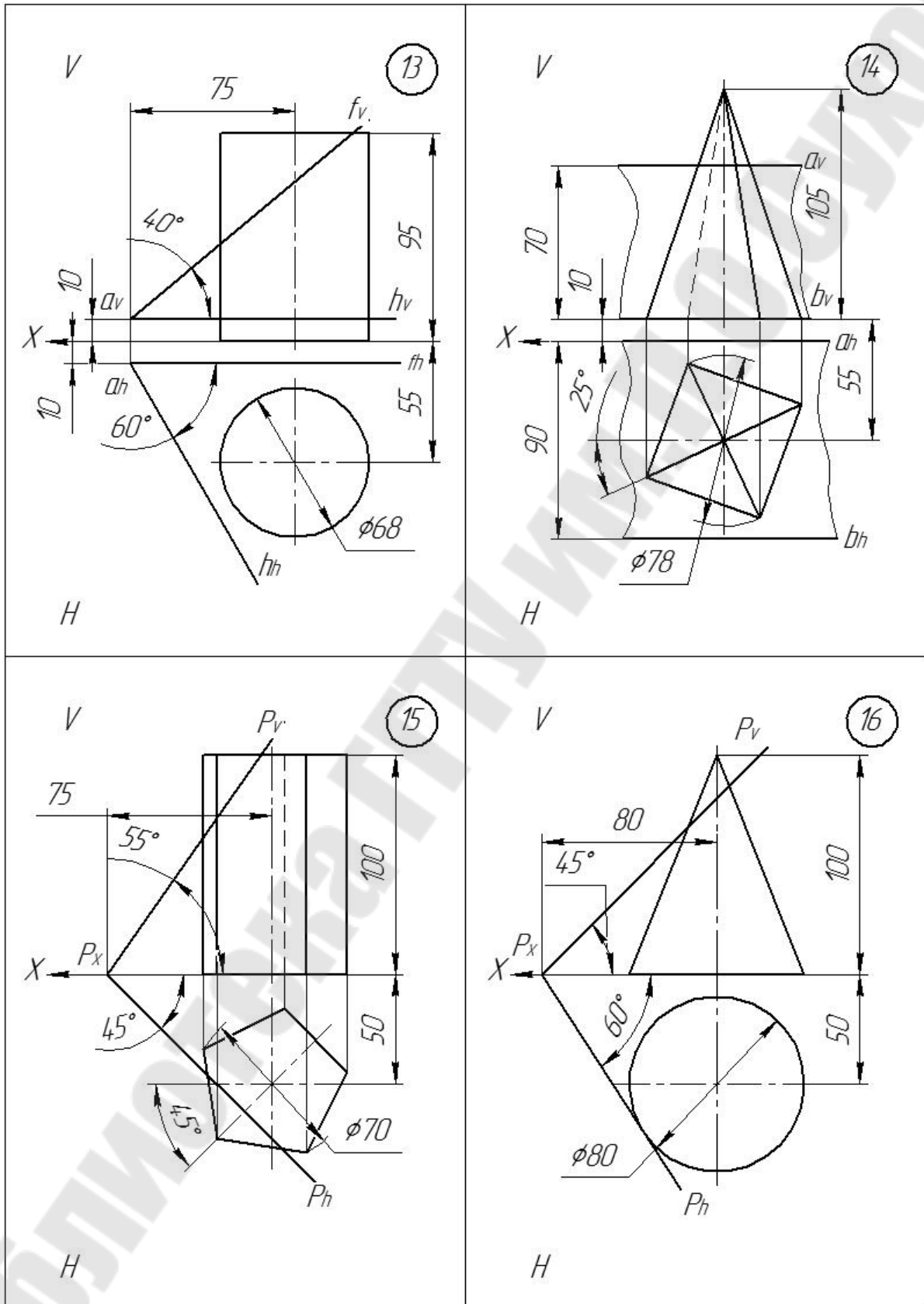
### Варианты заданий 1

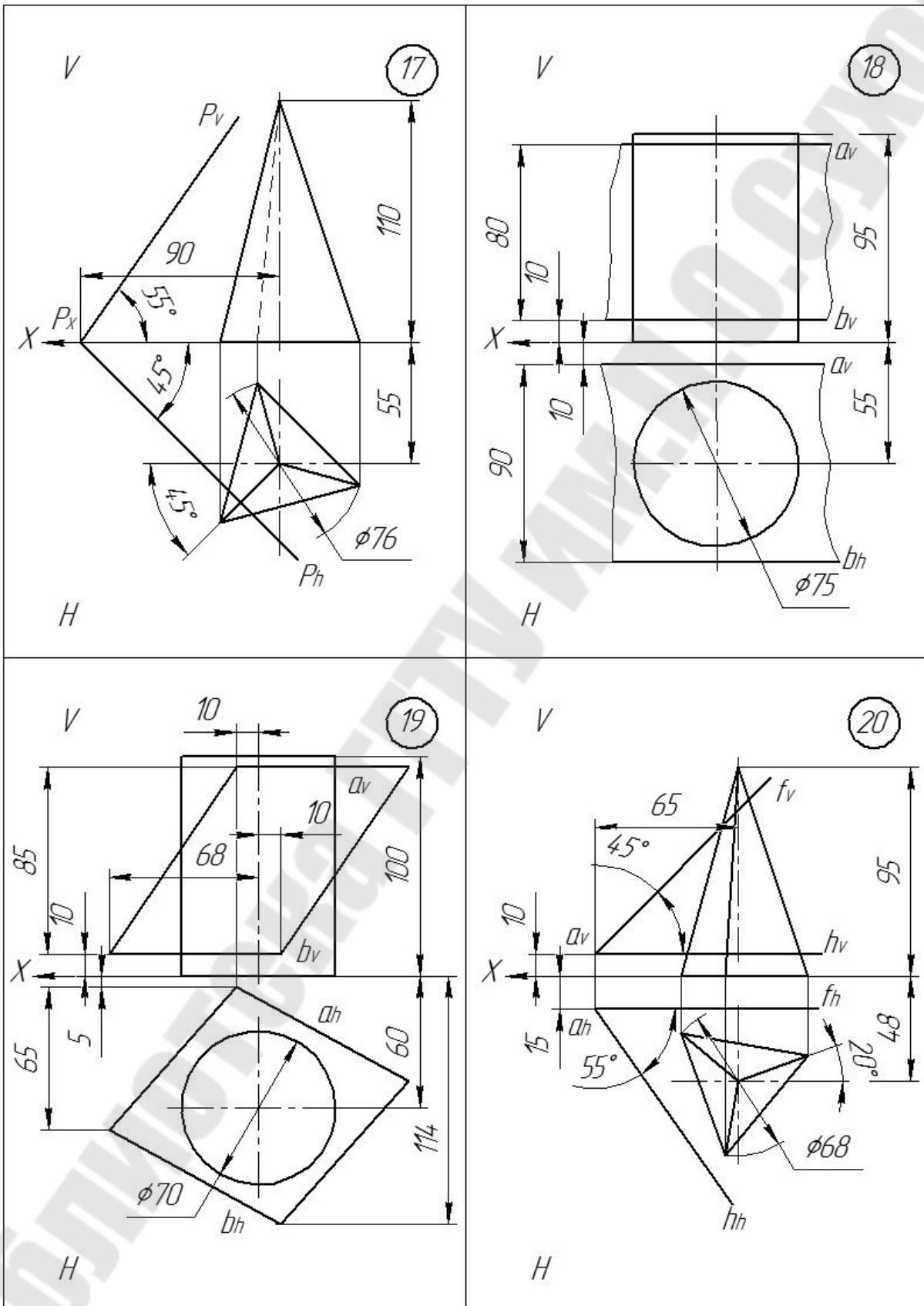
Таблица П.1.1

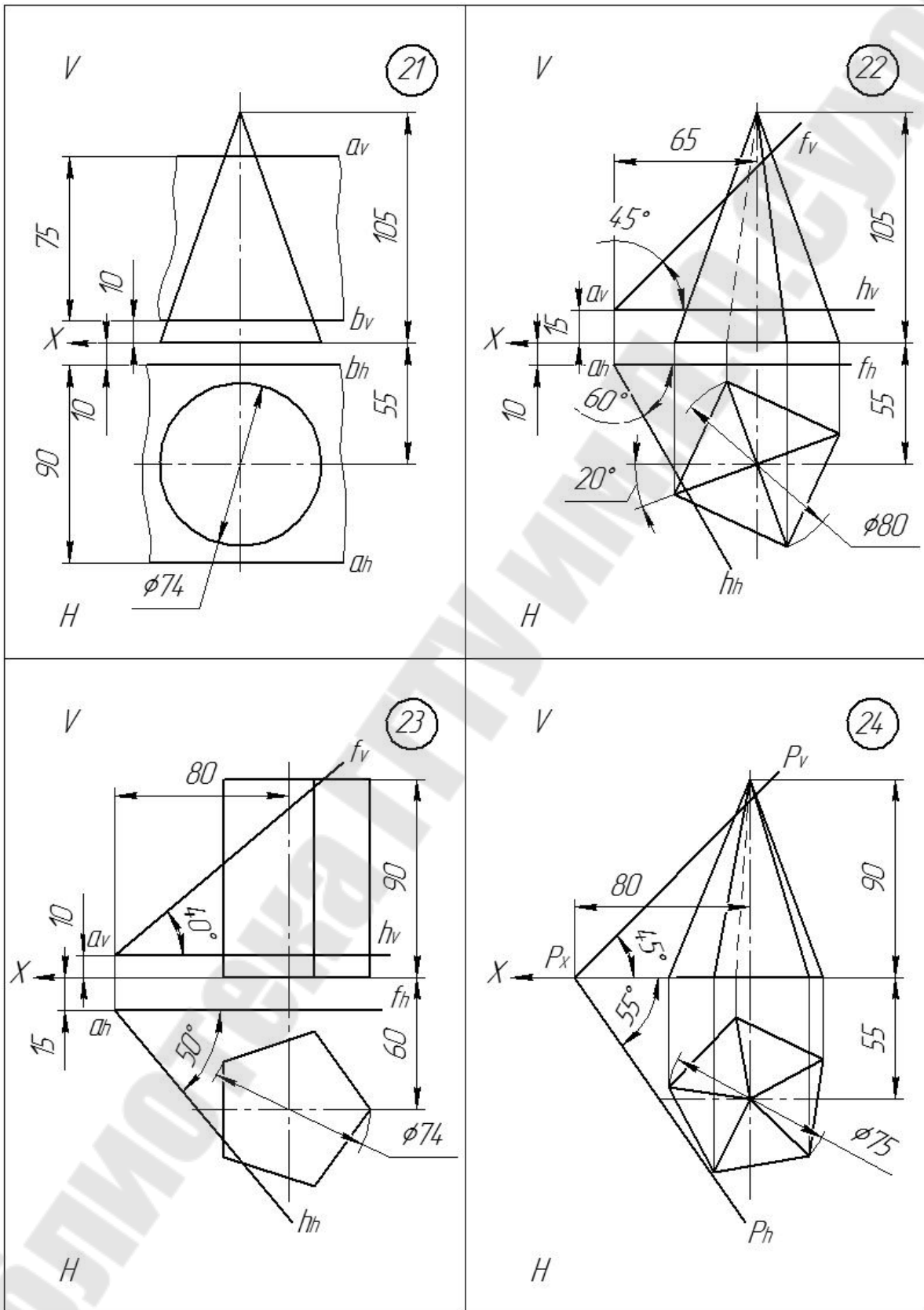








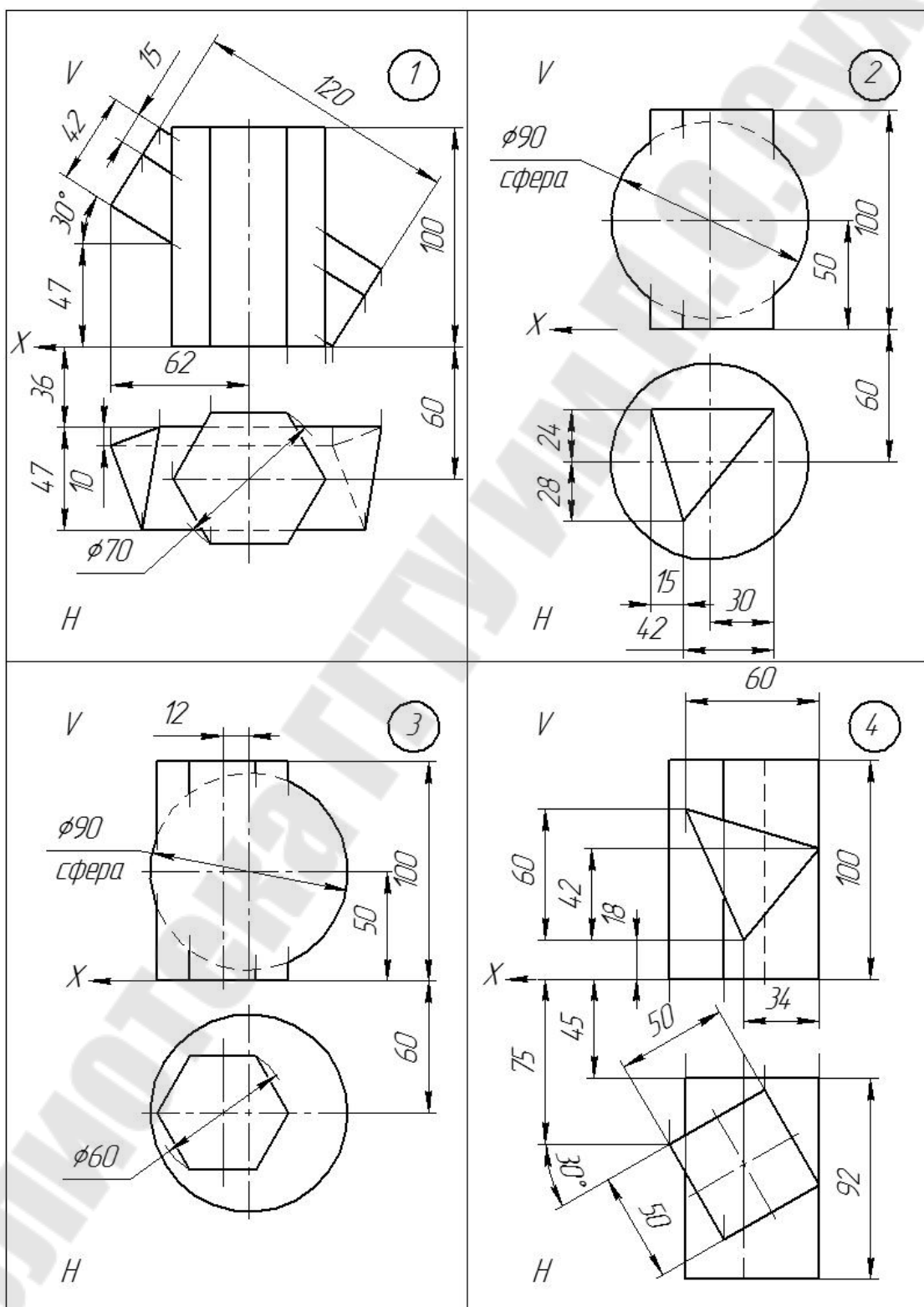




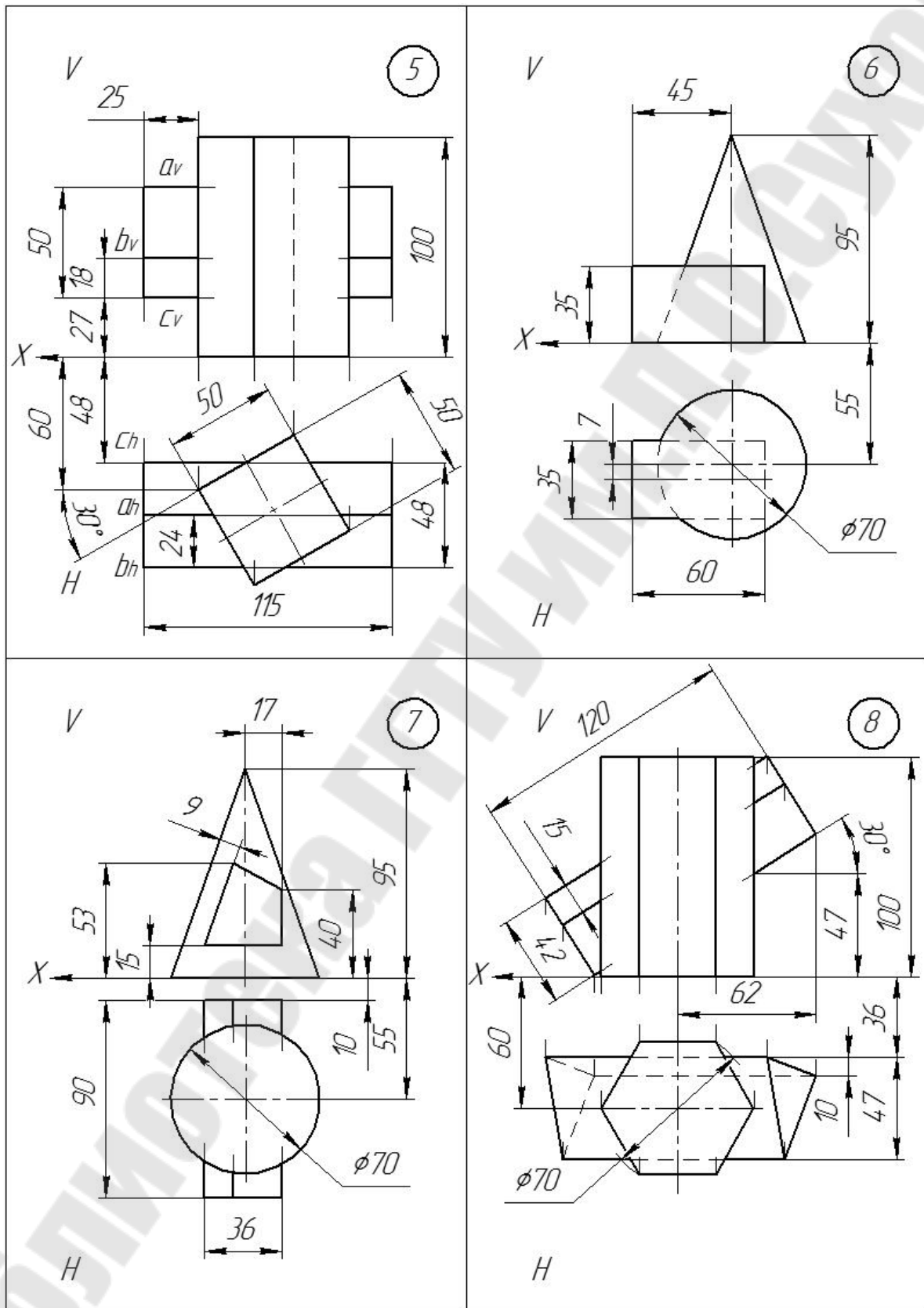
# Приложение 2

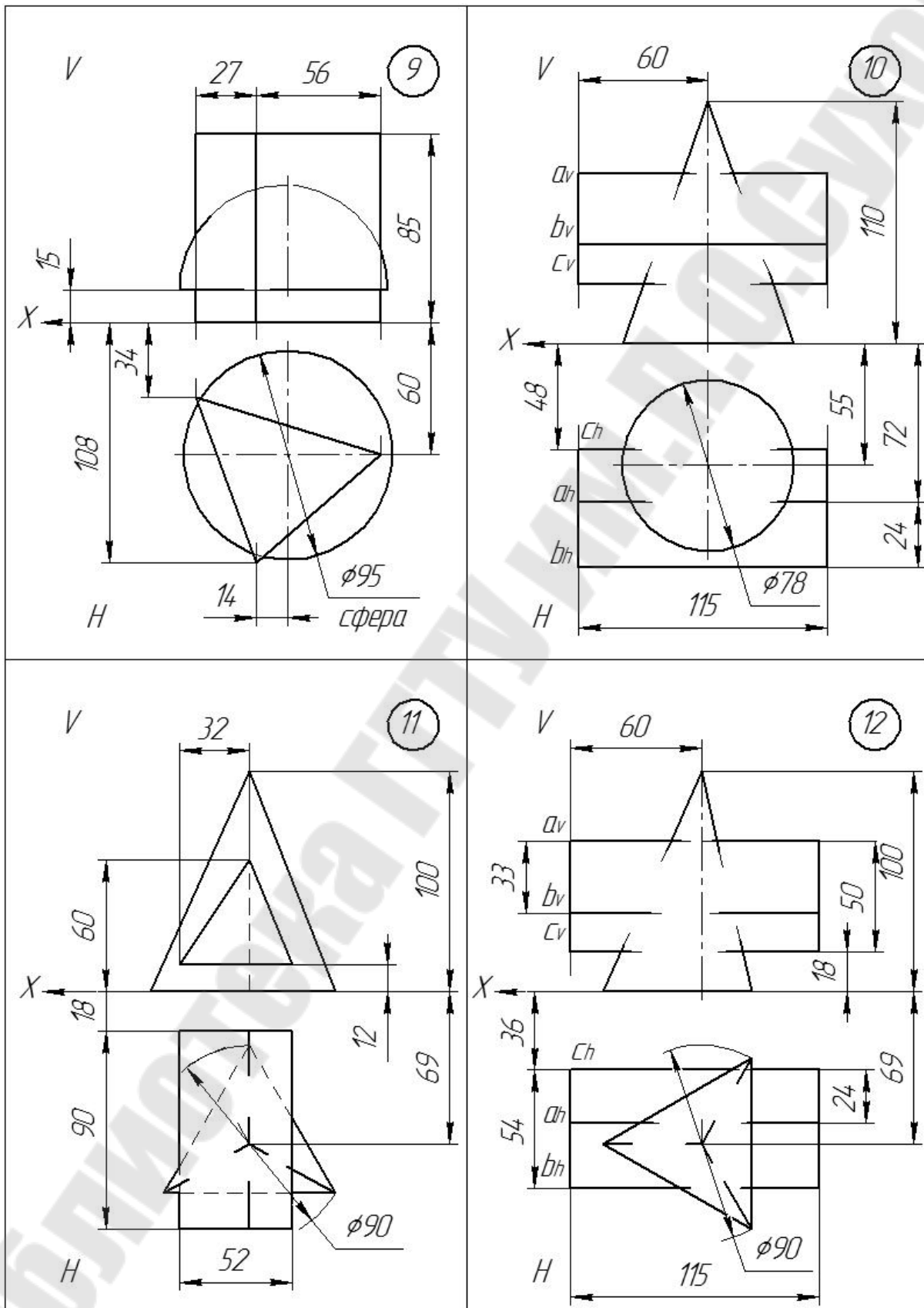
## Варианты задания 2 (задача 1)

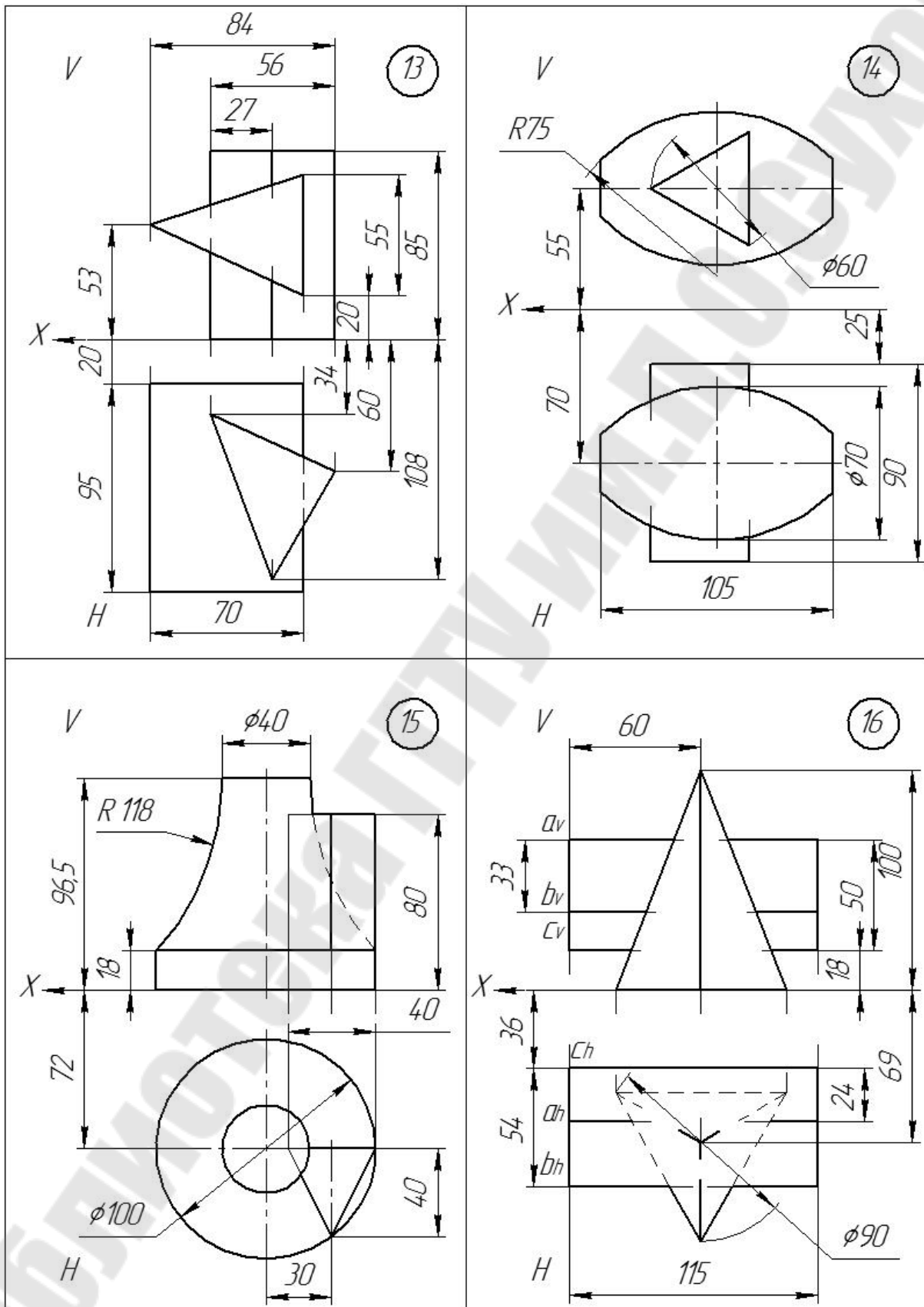
Таблица П.2.1

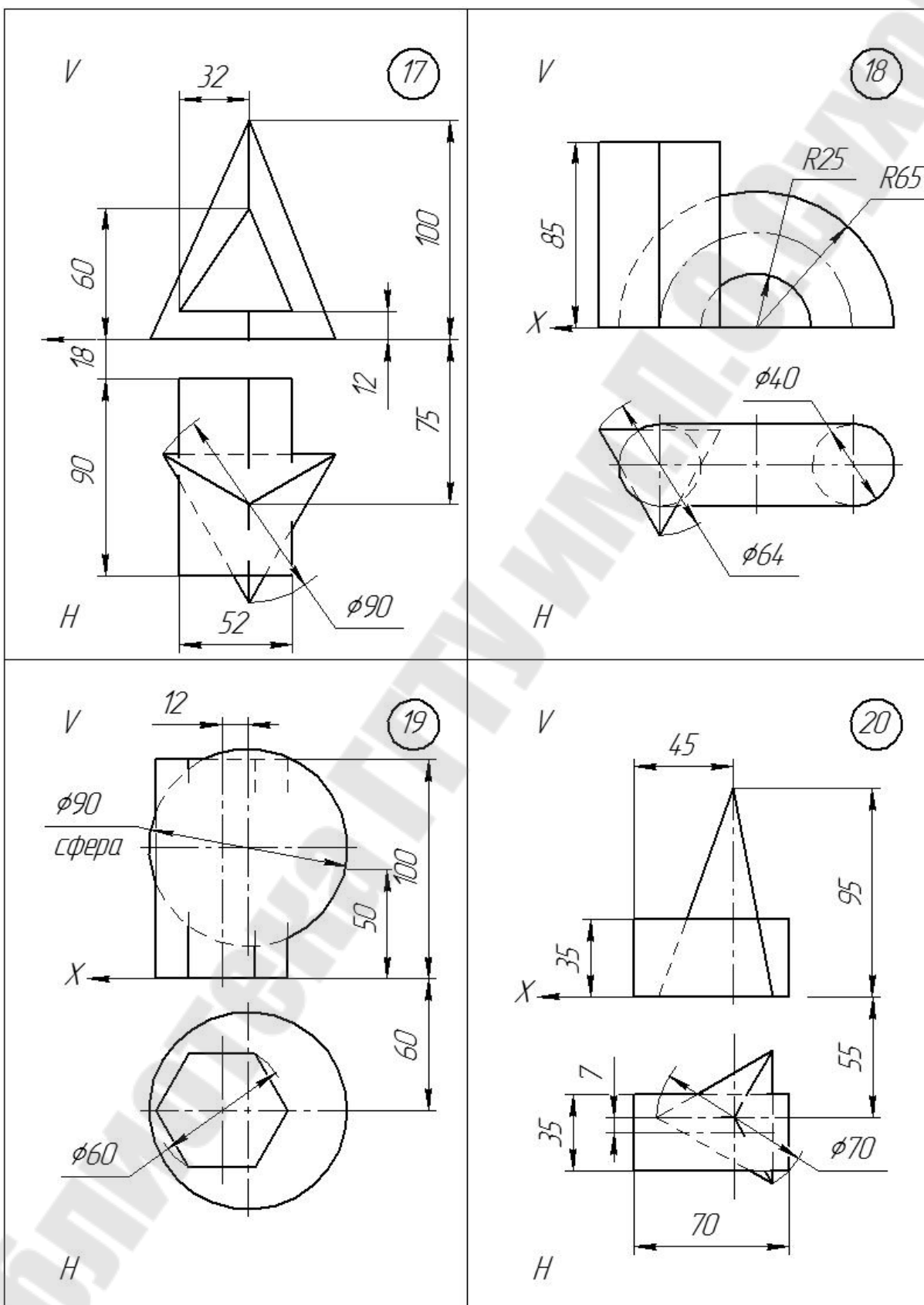






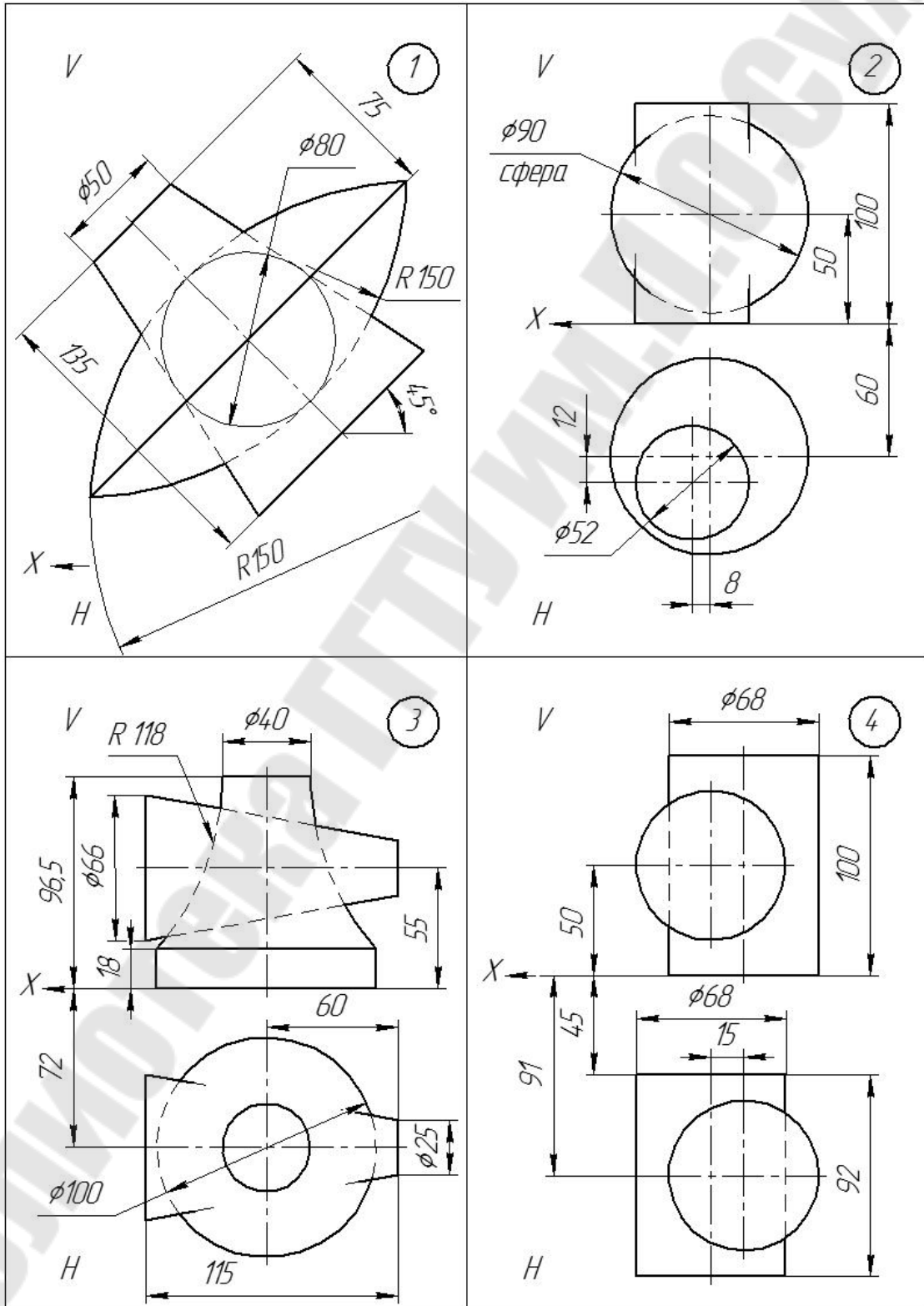


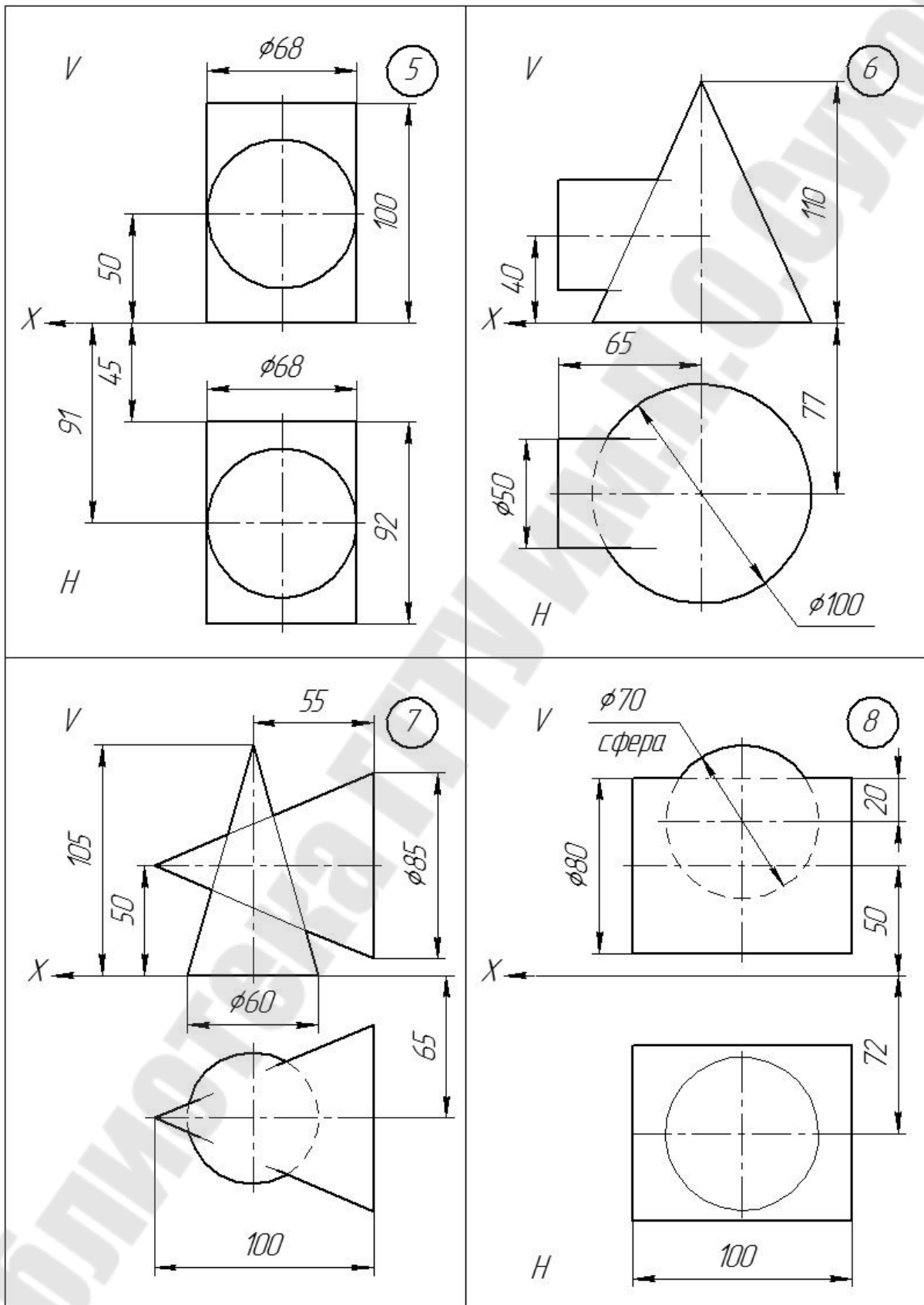


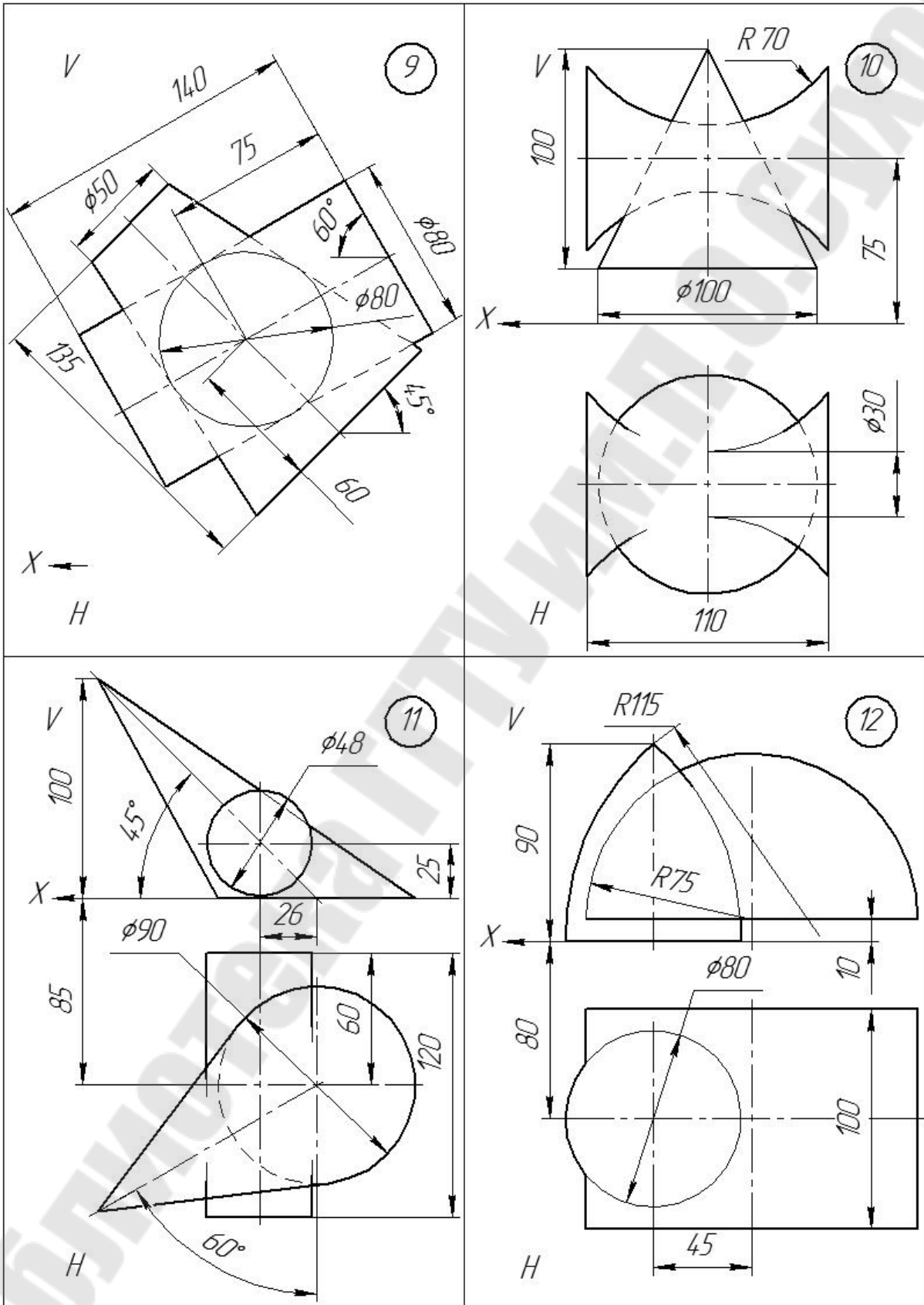


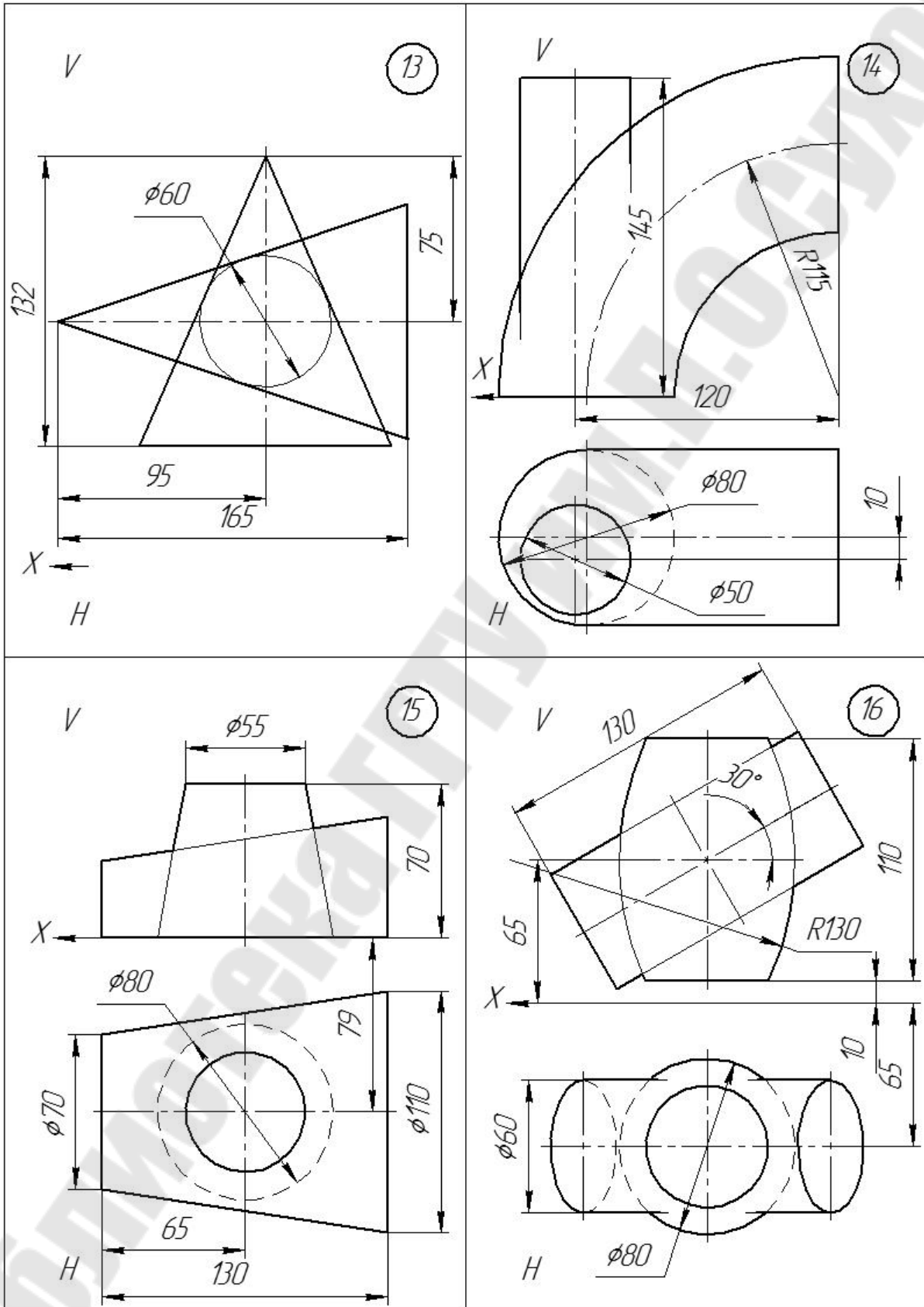
**Приложение 3**  
**Варианты задания 2 (задача 2)**

Таблица П.3.1

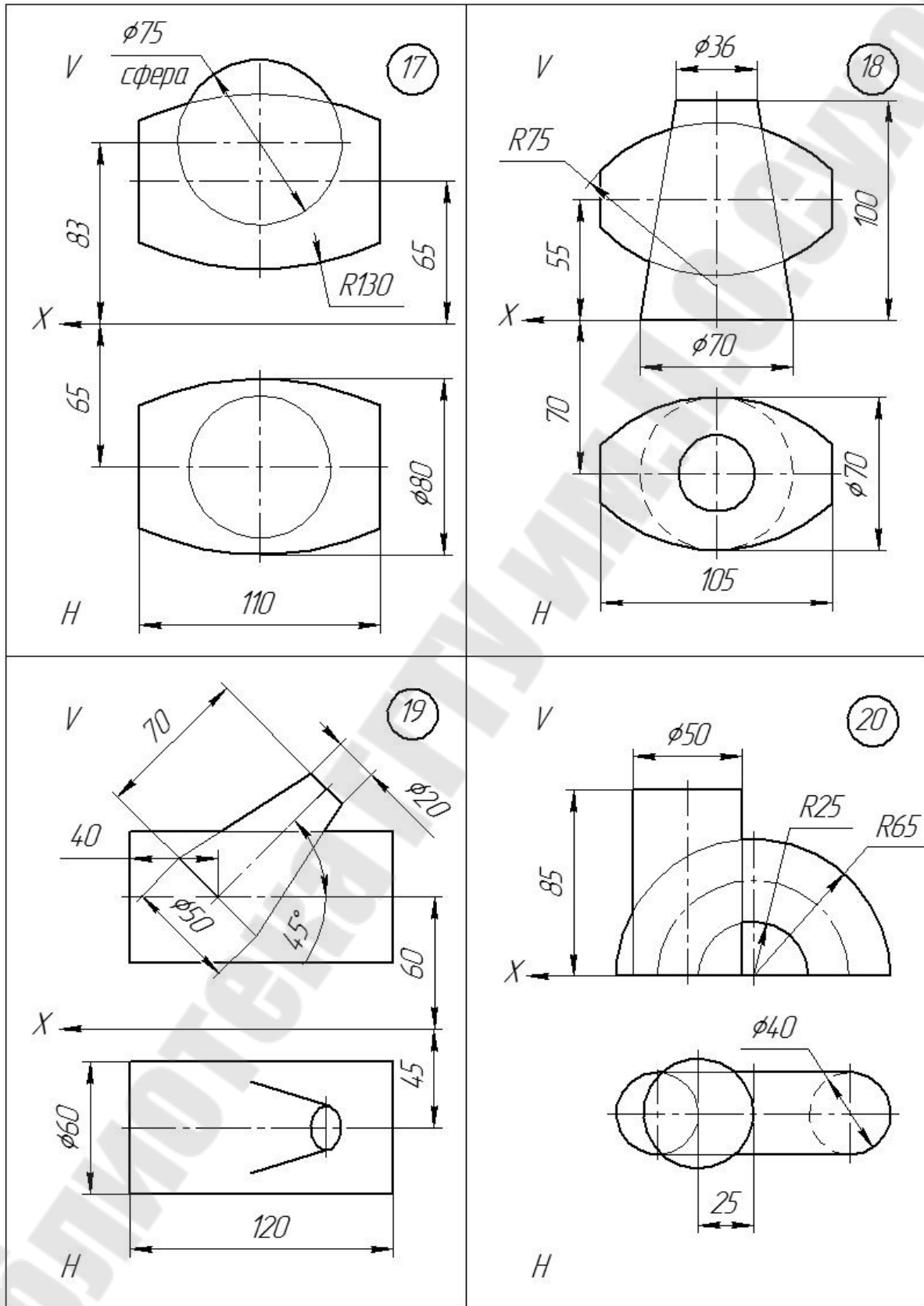


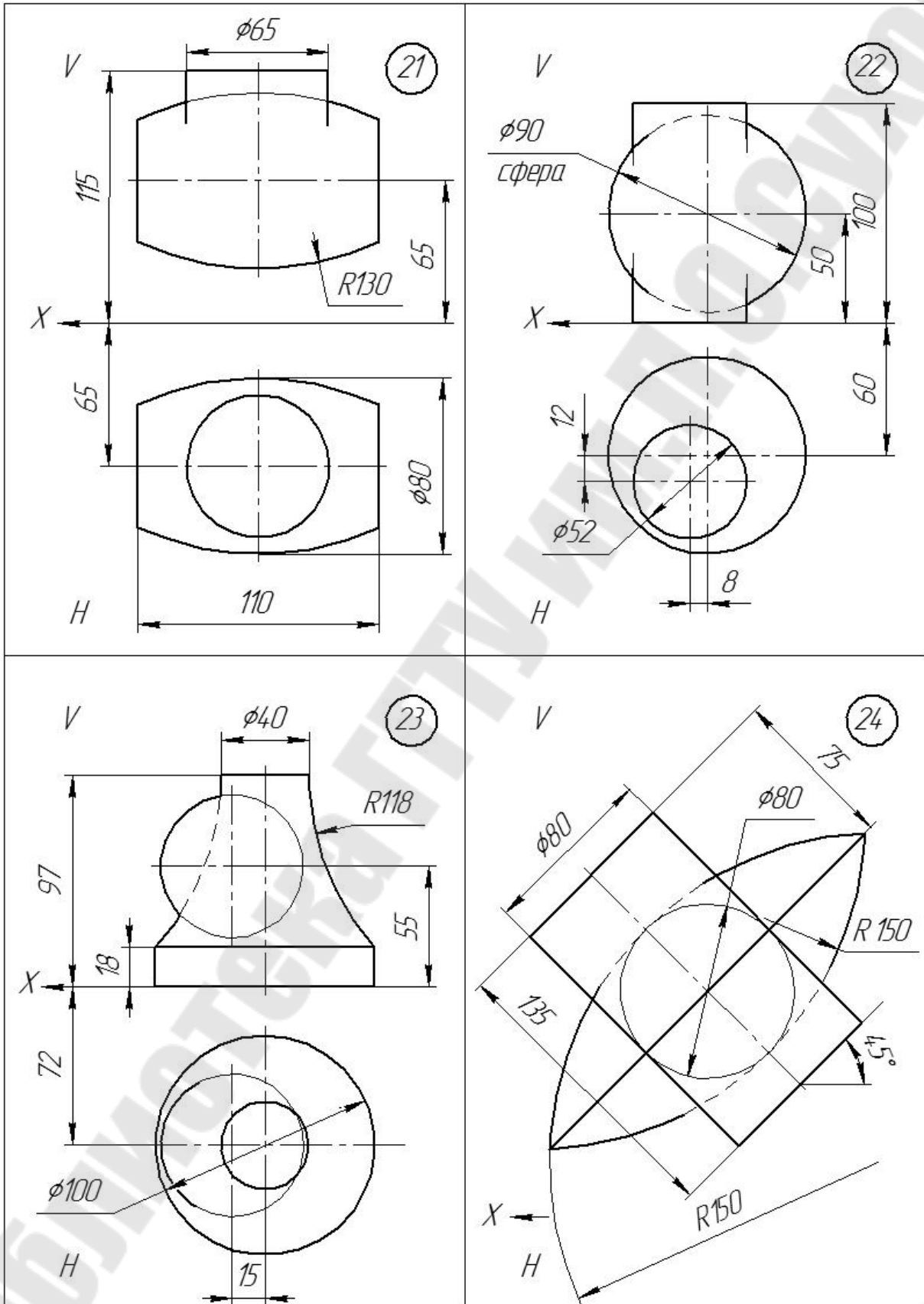












Примеры исполнения графических работ

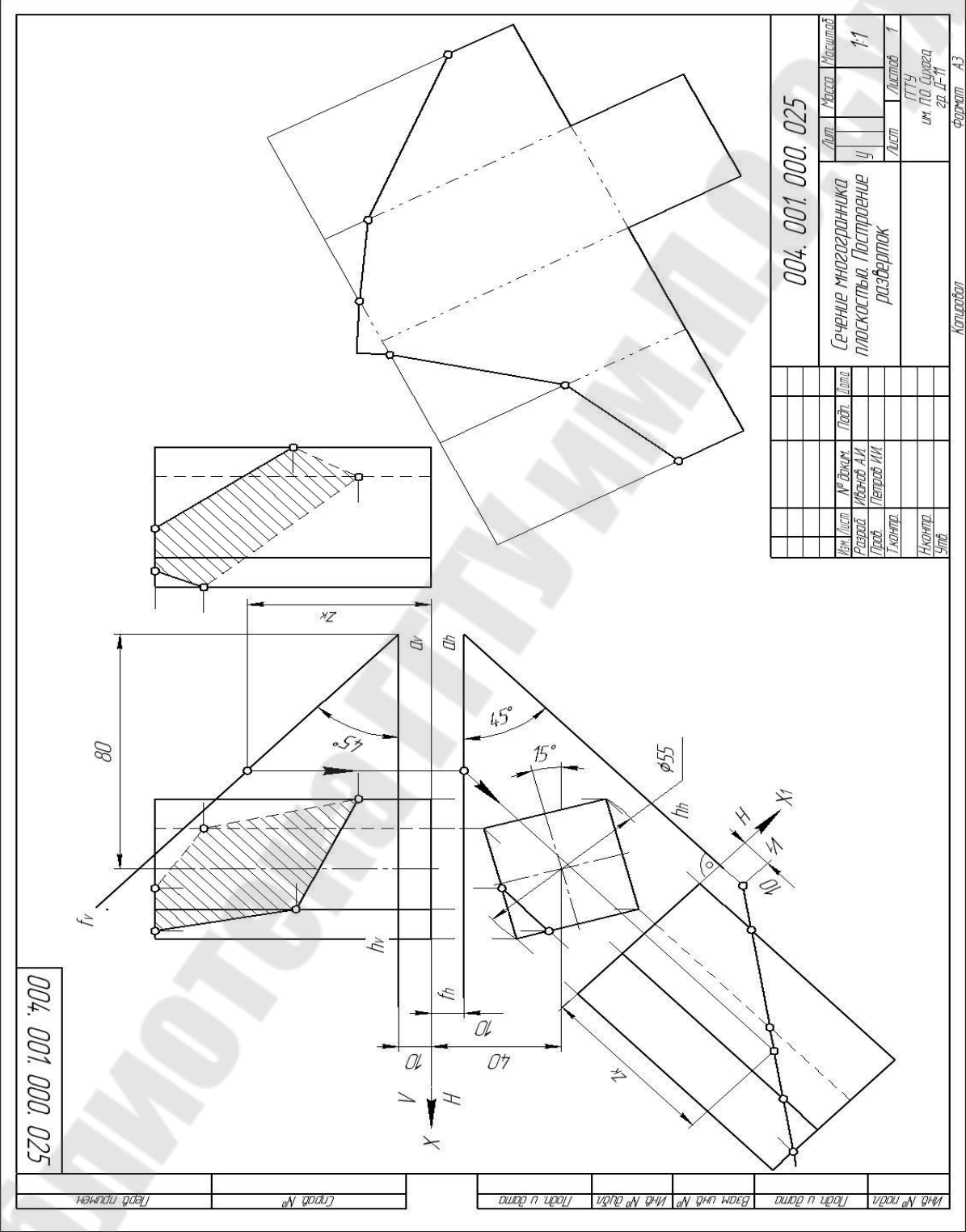


Рис. П.4.1. Графическая работа 1 задания 1

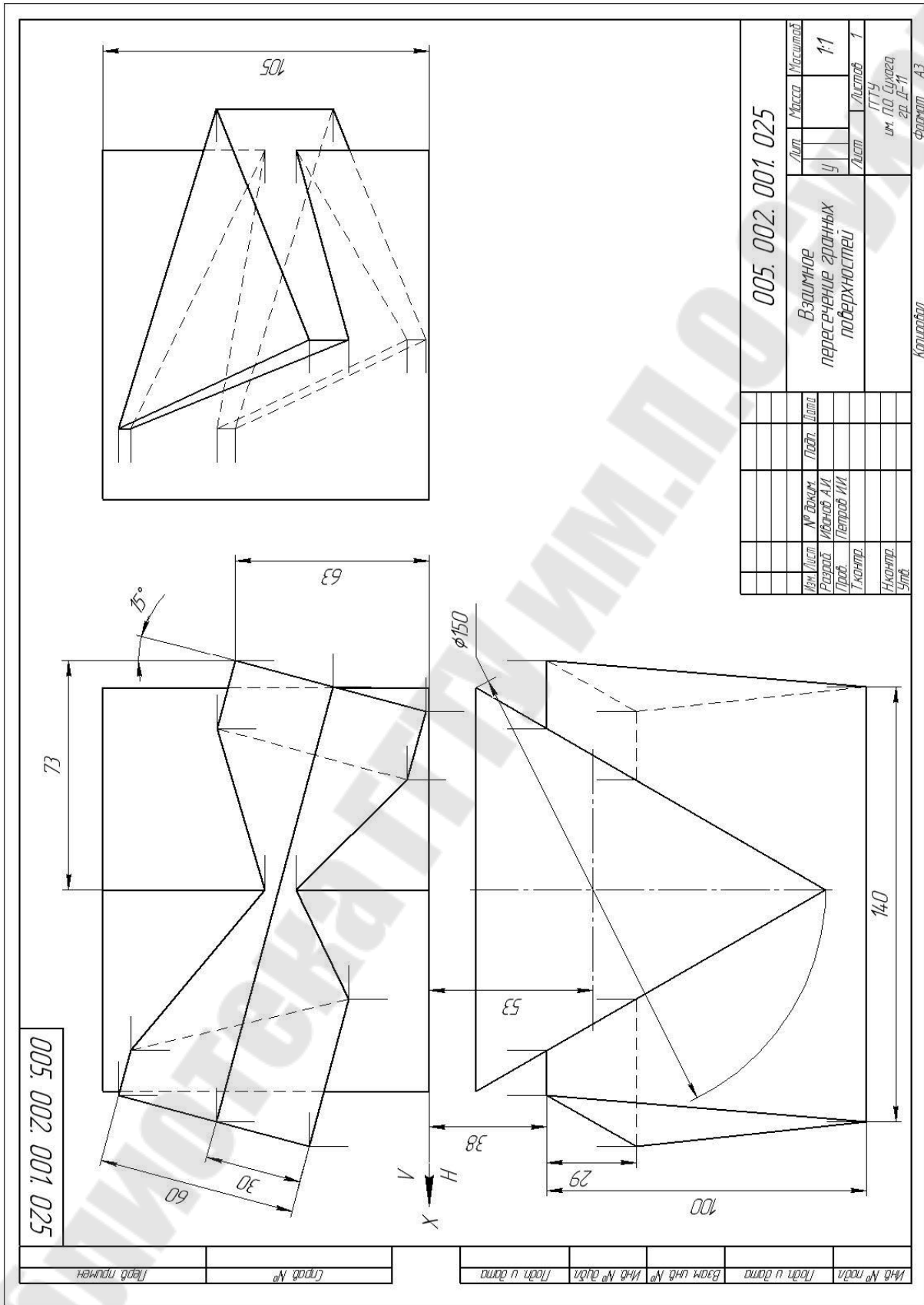


Рис. П.4.2. Графическая работа 2 задания 2

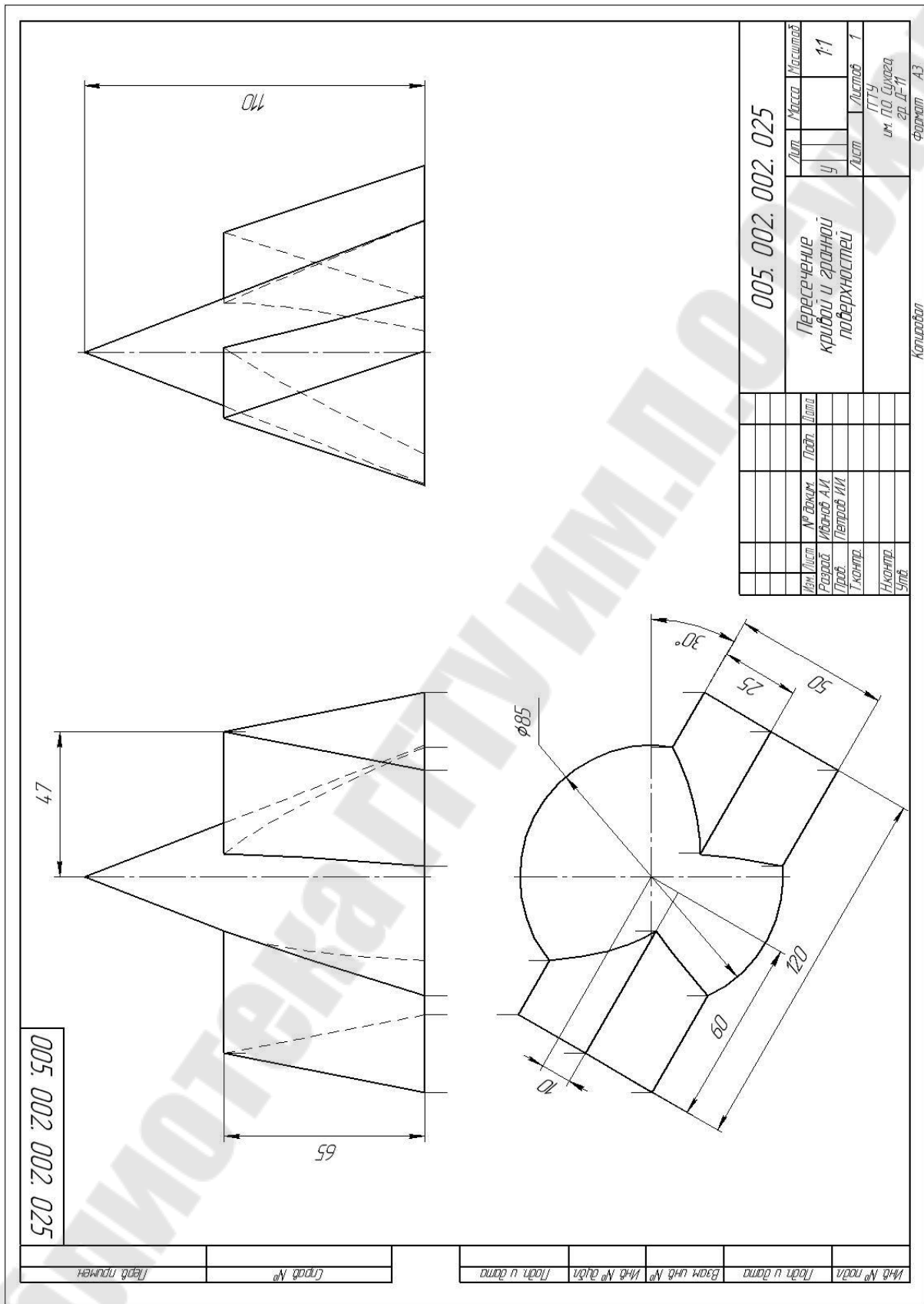


Рис. П.4.3. Графическая работа 3 задания 2

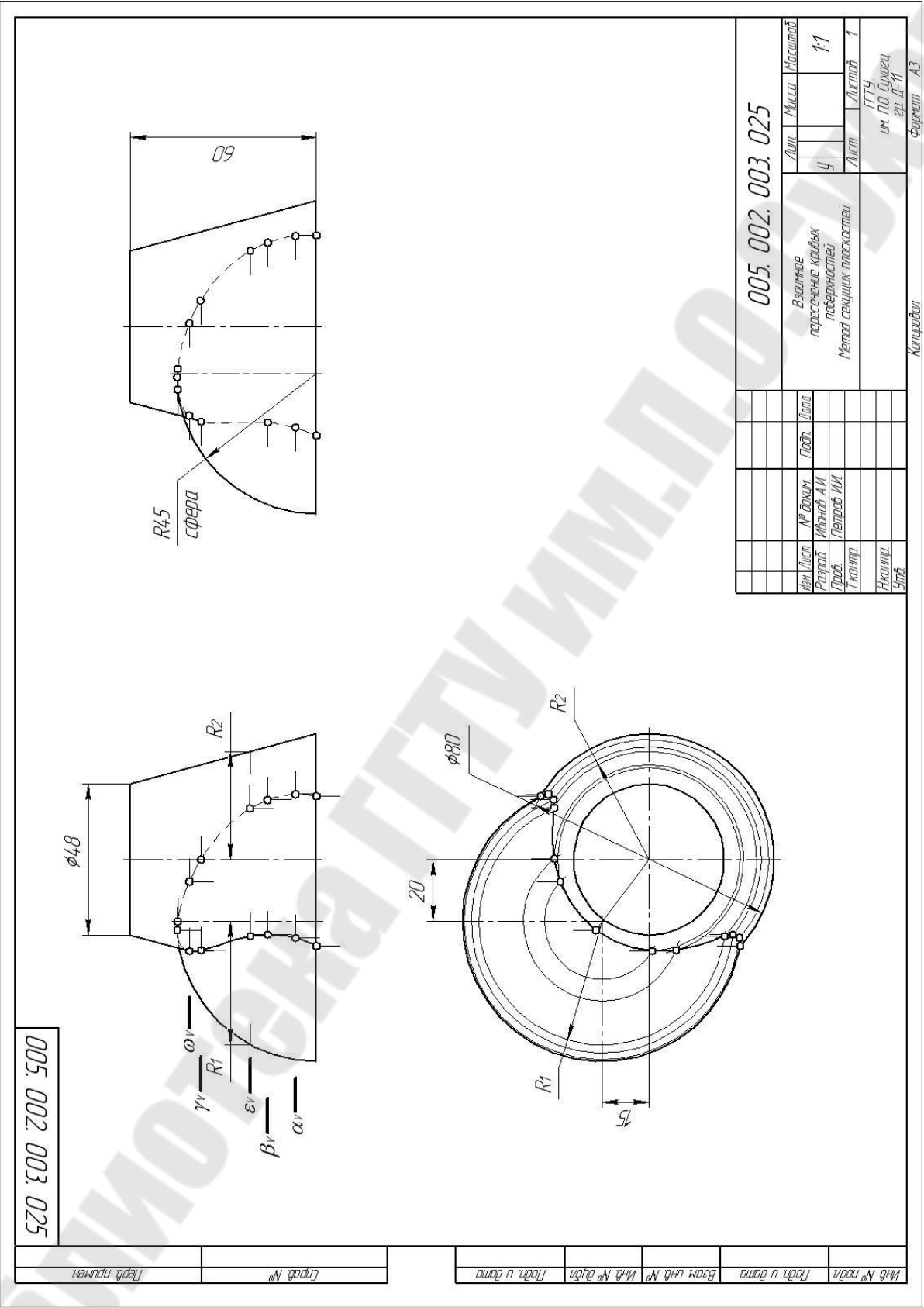


Рис. П.4.4. Графическая работа 4 задания 2

1 \* Линия пересечения кривых поверхностей экстремальной точки не имеет, т. к. сфера  $R_{тп}$  не создает точек на этой линии пересечения.

005.002.004.025

**005.002.004.025**

Взаимное пересечение кривых поверхностей Метод сечущих сфер

Изм./Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Лист	Масса	Масштаб
	Разраб. Ибрагим АИ			У		1:1
	Проф. Петров ИИ			Лист		Листов 1
Т. контрол.						ПТУ
И. контрол.						им. П.О. Бурага
Учб.						гр. Д-11
						Формат А3

Имя № подл.

Лист и дата

Взам инд. №

Инд. инд. №

Инд. № д/ин

Лист и дата

Лист и дата

Лист и дата

Лист и дата

Лист и дата

Лист и дата

Лист и дата

Рис. П.4.5. Графическая работа 5 задания 2

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Перечень условных обозначений.....	3
Предисловие.....	4
1. Цель и содержание задания .....	5
2. Требования к оформлению графических материалов и порядок приема заданий.....	5
3. Методика решения задач .....	6
4. Теоретические основы .....	7
5. Построение линии пересечения поверхности плоскостью (задача 1) .....	9
5.1. Пересечение многогранников плоскостью и построение разверток .....	11
5.2. Пересечение тел вращения плоскостью и построение разверток.....	24
5.2.1. Пересечение цилиндра плоскостью .....	24
5.2.2. Пересечение конуса плоскостью.....	31
6. Взаимное пересечение поверхностей (задание 2) .....	38
7. Типичные ошибки, допускаемые при выполнении заданий .....	54
8. Примерные контрольные вопросы.....	55
Литература .....	57
Приложения .....	58



Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

**Селютин Александр Михайлович**  
**Захаренко Галина Николаевна**  
**Рюмцев Александр Александрович**

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**  
**ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ**  
**ПЛОСКОСТЬЮ. ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ**  
**ПОВЕРХНОСТЕЙ**

**Учебно-методическое пособие**  
**по дисциплине «Инженерная графика»**  
**для студентов технических специальностей**  
**дневной и заочной форм обучения**

**Электронный аналог печатного издания**

Редактор *Т. Н. Мисюрова*  
Компьютерная верстка *И. П. Минина*

Подписано в печать 22.04.22.  
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».  
Ризография. Усл. печ. л. 9,30. Уч.-изд. л. 10,21.  
Изд. № 26.  
<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение  
Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого.  
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя  
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.  
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель