УДК 536.2

# НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОМ НАГРЕВЕ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

**Д.Г. КРОЛЬ**
*Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Республика Беларусь*

**Введение.** Исследование высокоинтенсивных тепловых процессов в материалах, подвергающихся воздействию поверхностных источников энергии, является актуальной задачей современного материаловедения. Отличительной чертой этих задач является большое число непосредственно связанных с ними практических приложений. Достаточно упомянуть широко распространенные методы термообработки, связанные с лазерным нагревом металлов [1, 2], моделирование многослойных теплоизолирующих конструкций [3, 4]. В данной работе теоретически изучаются основные закономерности процессов нагрева (охлаждения) при различных видах нестационарного теплового воздействия на материалы.

Целями исследования являются: 1) анализ пространственно-временной эволюции тепловых полей с учетом зависимости теплофизических свойств материала от температуры; 2) изучение импульсного и гармонического во времени режимов воздействия на испытываемый образец; 3) изучение количественных и качественных характеристик неоднородности теплового поля в двухслойной пластине. Данная работа является продолжением исследования [5].

**Постановка задачи.** Математическая модель включает следующие уравнения:

$$c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left( \lambda_i \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_v^{(i)},\ q_i = -\lambda_i\, \partial T_i / \partial x;\ i = 1{,}2;$$

$$c_i(T, x) = \rho_i c_{ci};\ \lambda_i = \lambda_i(T, x);\ q_v^{(i)} = q_v^{(i)}(T, x);$$

$$t \ge 0; \quad x^{(1)} \in [0; h_1]; \quad x^{(2)} \in [h_1, h_2]; \quad h = h_1 + h_2\ ,$$

где $x$ – декартова координата; $t$ – время; $T_i$ – температура; $q_i$ – удельный тепловой поток; $\lambda_i$ – коэффициент теплопроводности; $c_i$ – удельная объемная теплоемкость; $q_v^{(i)}$ – мощность внутренних источников ( стоков ) энергии; $i$ – номер слоя.

Искомыми функциями являются: $T(x,t), \quad q(x,t), \quad x \in [0, h], \quad t > 0.$

Начальное условие:

$$T(x,0) \equiv const, \quad q_v = 0;$$

либо

$$T(x,0) \equiv T^0(x), \quad q_v \ne 0.$$

Теплофизические свойства материалов аппроксимирутся полиномами третьей степени с постоянными коэффициентами:

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \lambda_3 T^3; \;\; c = c_0 + c_1 T + c_2 T^2 + c_3 T^3 .$$

Граничные условия характеризуются тем, что температура правой границы задана $x = h, \quad T = T_w(t)$.

На левую границу образца действует нестационарный тепловой поток:

$$x = 0, \quad q = q_0(t) ,$$

где

$$q_0(t) = B + H \sin(\omega t);$$

или

$$q_0(t) = C(1 - \exp(mt)), \quad m < 0 ;$$

или

$$q_0(t) = D\, t^n \cdot \exp(mt), \quad m < 0, \quad n > 0 .$$

В случае высокоинтенсивного потока энергии следует учитывать поглощательную способность материала $A = A(T)$, и тогда граничное условие примет вид:

$$x = 0, \quad q = A(T) q_0(t).$$

Условия теплового контакта на границе слоев:

$$x = h_1, T^{(1)} = T^{(2)} + \Delta T, q^{(1)} = q^{(2)} + R ,$$

где $\Delta T$ – скачок температуры; $R$ – тепловое сопротивление зоны контакта. При обезразмеривании применяются масштабы величин (они отмечены нижним индексом $b$), допускающие инвариантность размерной и безразмерной форм записи, а именно: $q_b = \lambda_b T_b / x_b$ , $\lambda_b = x_b^2 c_b / t_b$ .

**Метод решения.** Решение задачи, удовлетворяющее поставленным краевым условиям, выполнено методом интегральных соотношений А.А. Дородницына [6]. Численное интегрирование аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений проводилось методом Рунге-Кутта пятого порядка с автоматическим выбором шага. Подробное описание численного алгоритма дано в [5].

**Пример расчета.** Приведем здесь несколько вариантов расчета воздействия высокоинтенсивного поверхностного источника энергии на двухслойную систему. Для всех представленных вариантов расчета принимались следующие условия:

а) на границе слоев: $x = h_1, \quad \Delta T = 0, \quad R = 0;$

б) температура на правой границе: $T_w(t) \equiv const$ ;

в) начальное распределение температуры согласовано с температурой на правой границе образца;

г) толщина первого слоя $h_1 = 0{,}005$ м, второго – $h_2 = 0{,}005$ м.

Номер варианта соответствует номеру рисунка. Графическая информация представлена в безразмерной форме. Сплошной линией отображались зависимости на левой границе; штриховой – на границе слоев.

1-й вариант. 1-й слой – медь (Cu); 2-й слой – железо (Fe). Зависимости теплофизических свойств материала от температуры:

Cu: $c = 2844422 + 2826{,}37T - 3{,}3765T^2 + 0{,}001567T^3$ Дж/(м$^3$К);

$\lambda = 428{,}405 - 0{,}099T + 3{,}184886 \cdot 10^{-5} T^2 - 1{,}4388158 \cdot 10^{-8} T^3$ Вт/(м·К).

Fe: $c = -50479{,}762 + 19970{,}229T - 33{,}4337T^2 + 0{,}020877652T^3$ Дж/(м$^3$К);

$\lambda = 472{,}66827 - 0{,}38651068T - 1{,}5416465 \cdot 10^{-6} T^2 + 7{,}3142453 \cdot 10^{-8} T^3$ Вт/(м·К).

Величина теплового потока на левой границе:

$q_0(t) = 7 \cdot 10^7 (1 - \exp(-50\, t))$ Вт/м$^2$.

Начальное распределение температуры: $T(x,0) = 300$ К; применялись следующие масштабы величин: $q_b = 1{,}203 \cdot 10^7$ Вт/м$^2$; $x_b = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $c_b = 3430755$ Дж/(м$^3$К);

$\lambda_b = 401{,}08$ Вт/(м·К); $T_b = 300$K; $t_b = 8{,}553$ с.

На рис. 1 показана зависимость температуры (а) и теплового потока (б) от времени.

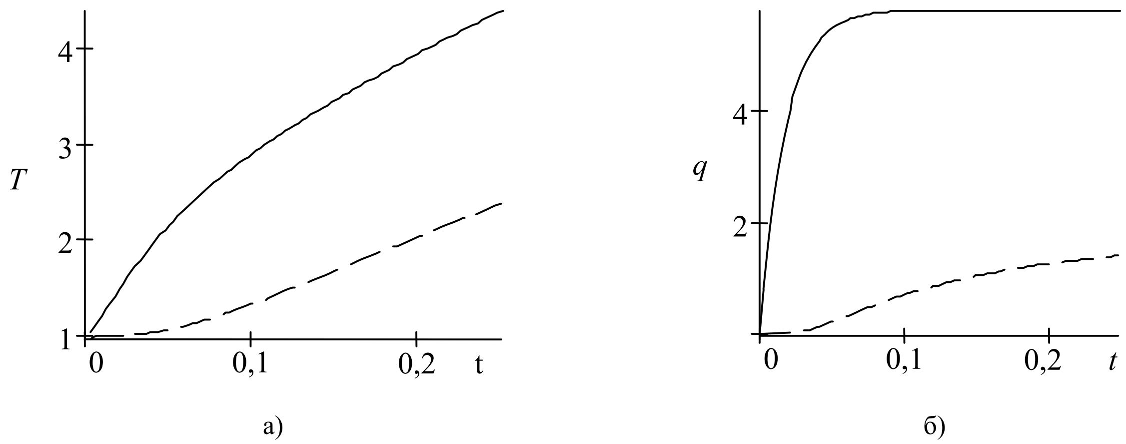



*Рис. 1*

2-й вариант. 1-й слой – вольфрам (W); 2-й слой – железо (Fe). Зависимости теплофизических свойств материала от температуры:

W: $c = 2439734 + 444{,}122T - 0{,}10064T^2 + 4{,}11526 \cdot 10^{-5} T^3$ Дж/(м$^3$К);

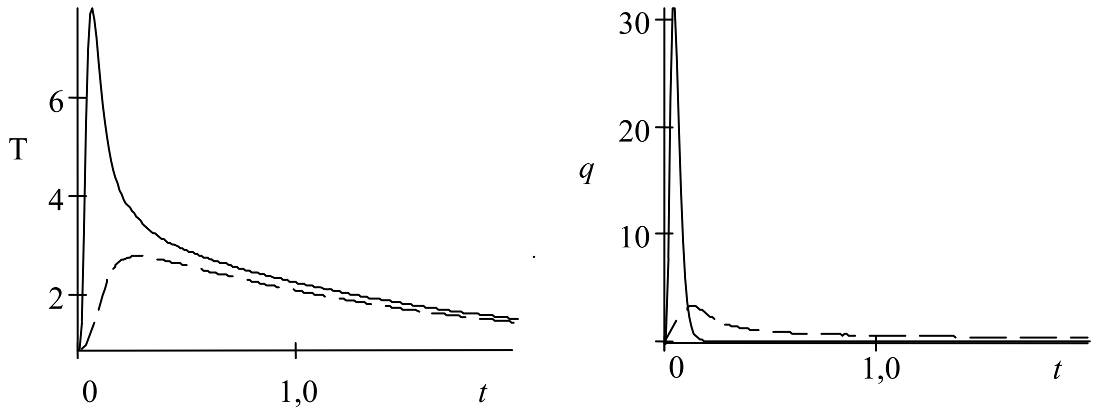
$\lambda = 192{,}4308 - 0{,}1192T + 5{,}33096 \cdot 10^{-5} T^2 - 7{,}6110494 \cdot 10^{-9} T^3$ Вт/(м·К).

Величина теплового потока на левой границе:

$q_0(t) = 5 \cdot 10^{11} \cdot t^{2,7} \exp(-45\, t)$ Вт/м$^2$.

Начальное распределение температуры: $T(x,0) = 400$ К; применялись следующие масштабы величин: $c_b = 2603913$ Дж/(м$^3$К); $\lambda_b = 152{,}789$ Вт/(м·К); $t_b = 1{,}704$ с; $T_b = 400$K; $x_b = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $q_b = 6{,}111 \cdot 10^6$ Вт/м$^2$.

На рис. 2 показана зависимость температуры (а) и теплового потока (б) от времени.




а) б)

*Рис. 2*

3-й вариант. 1-й слой – хром (Cr), 2-й слой – железо (Fe). Зависимости теплофизических свойств материала от температуры:

Cr: $c = 3230461 - 95.2241T + 1{,}4739T^2 - 0{,}0002574T^3$ Дж/(м$^3$К);

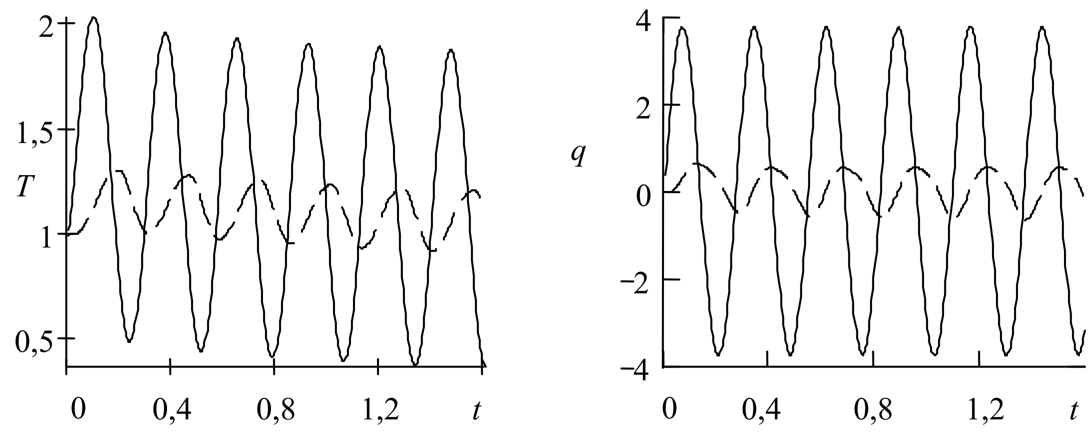
$\lambda = 112{,}7611 - 0{,}07226T + 3{,}1318 \cdot 10^{-5} T^2 - 5{,}1351 \cdot 10^{-9} T^3$ Вт/(м·К).

Величина теплового потока на левой границе:

$q_0(t) = 0{,}25 \cdot 10^8 \sin(150\,t)$ Вт/м$^2$.

Начальное распределение температуры: $T(x,0) = 1000$ К; применялись следующие масштабы величин: $c_b = 4351736$ Дж/(м$^3$К); $t_b = 6{,}656$ с; $T_b = 1000$ К; $x_b = 1 \cdot 10^{-2}$ м; $\lambda_b = 66{,}667$ Вт/(м·К); $q_b = 6{,}667 \cdot 10^6$ Вт/м$^2$.

На рис. 3 показана зависимость температуры (а) и теплового потока (б) от времени.




а) б)

*Рис. 3*

**Заключение.** Представлены результаты моделирования нестационарных тепловых процессов при воздействии высокоинтенсивного теплового потока на двухслойную систему. Приведены результаты численного решения для двухслойных пластин Cu-Fe, W-Fe и Cr-Fe.

*Работа выполнена под научным руководством проф. О.Н. Шабловского.*

**Литература**


1. Рыкалин Н.Н., Углов А.А., Смуров И.Ю. Расчет нелинейных задач лазерного нагрева металлов //Воздействие концентрированных потоков энергии на материалы. – М.: Наука, 1985. – С. 20-36.
2. Углов А.А., Смуров И.Ю., Лашин А.М., Гуськов А.Г. Моделирование теплофизических процессов лазерного воздействия на металлы. – М.: Наука, 1991. – 288 с.
3. Бушуев А.Ю., Горский В.В. Применение аппарата функций чувствительности и двухконтурного алгоритма в задачах синтеза многослойных конструкций //Инж.-физ. журн. – 2000. – Т. 73. – № 1. – С. 155-160.
4. Резник С. В. Математические модели радиационно – кондуктивного теплообмена в материалах тепловой защиты многоразовых транспортных космических систем //Инж.-физ. журн. – 2000. – Т. 73. – № 1. – С. 11-25.
5. Шабловский О.Н., Кроль Д.Г. Численное решение нелинейных задач нестационарного нагрева материалов //Сб. науч. тр. «Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения» /НАН Украины. Ин-т математики. – Киев, 1998. – С. 234-237.
6. Белоцерковский О.М., Грудницкий В.Г. Исследование нестационарных течений газа со сложной внутренней структурой методами интегральных соотношений //Журнал вычисл. матем. и матем. физики. – 1980. – Т. 20. – № 6. – С. 1400-1415.


*Получено 11.10.2002 г.*