

О.Н. Шабловский

**НЕЛИНЕЙНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ
И «ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЁМКОСТЬ» В СРЕДЕ
С КОНКУРИРУЮЩИМИ ИСТОЧНИКАМИ**

Получены новые точные решения волнового уравнения с нелинейными источниками. Построены уединенные бегущие волны и кинк-решения, формирующиеся при конкуренции двух источников. Определены условия возникновения аномального температурного отклика среды на тепловое воздействие («отрицательная теплоемкость»). Дан пример физической интерпретации одного из решений: вычислена скорость роста кристалла как функция переохлаждения расплава.

Ключевые слова: волновое уравнение; нелинейный источник энергии; температурный отклик среды; переохлажденный расплав.

В современной математической физике важное место занимают волновые уравнения с нелинейными источниками (уравнения Клейна – Гордона). Такие источники позволяют моделировать сложные явления в различных областях естествознания. В данной работе для определенности будем говорить о процессах волнового теплопереноса в системе «среда – источник энергии». Волновые задачи являются важным элементом динамической теории неравновесных состояний вещества [1].

Гиперболическое уравнение теплопроводности, получаемое с помощью вариационных принципов [2, 3] и учитывающее конечную скорость распространения тепловых возмущений, имеет вид

$$c \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \gamma \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \right) = \lambda \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + q_v, \tag{1}$$

где t – время; x – декартова координата; $\tau = T - T^0$ есть отклонение температуры T от ее отсчетного значения $T^0 \equiv \text{const}$; c – объемная теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности; γ – время релаксации теплового потока; q_v – мощность внутренних источников и стоков энергии; скорость распространения тепловых возмущений равна $w = (\lambda/c\gamma)^{1/2}$. Физические аспекты обоснования уравнения (1) изложены в [4]. Частным случаем модели (1) является волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = w^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} + k_v(\tau, x, t), \tag{2}$$

где $k_v = q_v/(c\gamma)$; c, γ – const. Это уравнение характеризует быстрые процессы, в которых волновой механизм переноса тепла преобладает над диффузионным: $\gamma \partial/\partial t \gg 1$. Основные предпосылки данной работы состоят в следующем:

1. Можно выделить два вида знакопеременных источников $q_v = q_v(T)$. Пусть $q_v(T = T^1) = 0$, где T^1 – пороговая температура, при переходе через которую

функция $q_v(T)$ меняет знак. Источник технического происхождения (далее для краткости *tech*-источник) обладает следующими свойствами: он положителен в области «высоких» температур $T > T^1$, где происходит подвод тепла, и отрицателен в области «низких» температур $T < T^1$, где тепло отводится, например вследствие теплообмена между элементом технического устройства и окружающей средой. Таким образом, $(dq_v/dT)_{T=T^1} > 0$.

Источник, типичный для биологической ткани (далее для краткости *bio*-источник), обладает свойствами, отличающими его от объектов неживой природы [5]. Такой источник выполняет уравнивающую роль компенсатора: в области «высоких» температур $T > T^1$ идет теплоотвод $q_v < 0$; в области «низких» температур $T < T^1$ происходит тепловыделение $q_v > 0$ в биоткани. Значит, в этом случае наклон функции источника при пороговой температуре отрицателен: $(dq_v/dT)_{T=T^1} < 0$.

2. Неклассическое явление «отрицательной теплоемкости» (ОТ) состоит в том, что подвод/отвод тепла дает снижение/рост температуры. Обзор экспериментальных и теоретических работ по этой проблеме и примеры ОТ в задачах конвекции стратифицированных двухкомпонентных жидкостей в поле силы тяжести даны в [6]. Некоторые нелинейно-волновые аспекты явления ОТ представлены в [7].

Будем рассматривать автомодельные решения волнового уравнения, применяя аргумент типа «бегущая волна»:

$$\tau = \tau(\zeta), \quad \zeta = x' - Mt, \quad x' = x/w,$$

$$\frac{d^2\tau}{d\zeta^2} = \frac{k_v}{M^2 - 1}, \quad (3)$$

где $M = N/w$ – тепловое число Маха; N – скорость перемещения волны $\zeta = 0$, $x_0 = Nt$, $N > 0$; N, w – const. Процесс «дозвуковой» при $M^2 < 1$, процесс «сверхзвуковой» при $M^2 > 1$. Таким образом, переход «дозвук» ↔ «сверхзвук» означает инверсию знака правой части (3). Предметом исследования является случай, когда

$$k_v(\tau, \zeta) = (M^2 - 1)[f(\tau) - g(\tau, \zeta)], \quad g = \tau Q^2(\zeta), \quad (4)$$

причем $Q^2(\zeta = 0) > 0$, $Q^2 \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \pm\infty$. Далее источник τQ^2 называем сосредоточенным, потому что при всех конечных $\tau(\zeta)$ его воздействие проявляется главным образом в окрестности волны $\zeta = 0$. Кроме того, мы рассматриваем пример периодической зависимости $Q^2(\zeta)$ от волновой координаты. Источник $f(\tau)$ нелинеен по температуре и может быть знакопеременным.

Цель работы: 1) построить функции $Q^2(\zeta), f(\tau)$, допускающие точное аналитическое решение волновой задачи; 2) изучить конкурентное взаимодействие сосредоточенного и нелинейного источников (4) и указать примеры существования ОТ.

Алгоритм построения решения

Возьмем за основу дифференциальное уравнение для неизвестной функции $\theta = \theta(\zeta)$:

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} = \left[F^2(\zeta) + \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \right] \theta. \quad (5)$$

Здесь $F(\zeta)$ – произвольная функция. Одно из частных решений этого уравнения имеет вид [8]

$$\theta = \tau_0 \exp \left[\int_0^{\zeta} F(\zeta) d\zeta \right], \quad \tau_0 \equiv \text{const.} \quad (6)$$

Выполним преобразование $F = iQ$, $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ и тогда, выделяя в (5) действительную и мнимую части, получим систему уравнений

$$\frac{d^2\theta_1}{d\zeta^2} = -Q^2\theta_1 - \theta_2 \frac{dQ}{d\zeta}, \quad \frac{d^2\theta_2}{d\zeta^2} = -Q^2\theta_2 + \theta_1 \frac{dQ}{d\zeta}, \quad (7)$$

которой удовлетворяют функции $\theta_1 = \tau_0 \cos J$, $\theta_2 = \tau_0 \sin J$, $dJ/d\zeta = Q$. Очевидно, что здесь $\theta_2 Q = -d\theta_1/d\zeta$, $\theta_1 Q = d\theta_2/d\zeta$. Переобозначим $\theta_1 \rightarrow \tau$ и запишем первое уравнение (7) в виде

$$\frac{d^2\tau}{d\zeta^2} = -\tau Q^2 + \frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\zeta} \frac{d\tau}{d\zeta}. \quad (8)$$

Аналогичным образом можно поступить с уравнением для θ_2 ; новых результатов это не дает. В уравнении (8) примем связь

$$\frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\zeta} \frac{d\tau}{d\zeta} = f(\tau),$$

которая означает переход к источнику вида (4); см. также (3). С учетом решения

$$\tau = \tau_0 \cos J, \quad dJ/d\zeta = Q \quad (9)$$

получаем $(-\tau_0) \sin J (d^2 J/d\zeta^2) = f(\tau)$. Теперь возьмем

$$f(\tau) = (\tau_0^2 - \tau^2) D(\tau). \quad (10)$$

В итоге имеем дифференциальное уравнение для функции $J = J(\zeta)$:

$$\frac{d^2 J}{d\zeta^2} = -\tau_0 D \sin J, \quad D = D(\tau = \tau_0 \cos J). \quad (11)$$

Выбор отдельных частных зависимостей $D(\tau)$ дает возможность получить точные решения уравнения (11). А это значит, что решение (9) будет удовлетворять уравнению (3) с источником (4), (10). Таким образом, в данном классе решений влияние сосредоточенного источника на градиент температуры описывается формулой $(d\tau/d\zeta)^2 = (\tau_0^2 - \tau^2) Q^2$. Конкуренция источников f и g наблюдается там, где эти функции одного знака; на рисунках области конкуренции отмечены звездочкой.

При анализе ОТ-ситуаций рассматриваем температурные интервалы, где конкуренция отсутствует. Кроме того, учитываем, что $\partial\tau/\partial t = -N d\tau/d\zeta$, $N > 0$. При фиксированном x имеем аномальный температурный отклик среды, если в этой точке $d\tau/d\zeta > 0$, т.е. $\partial\tau/\partial t < 0$ и $k_v > 0$ либо $d\tau/d\zeta < 0$ и $k_v < 0$. Области, где существует явление ОТ, отмечены на рисунках черным треугольником.

Решения на основе уравнения синус-Гордона

Обсудим варианты, когда (11) можно представить в виде уравнения синус-Гордона, определяющего автомодельное решение $J = J(\zeta)$:

$$\frac{d^2 J}{d\zeta^2} = -\tau_0 D_0 \sin BJ, \quad (12)$$

где D_0 – положительная постоянная; $B \geq 1$ – целое число. Далее применяем известные частные решения [9] этого уравнения: если $\tau_0 < 0$, то

$$J(\zeta) = (4/B) \operatorname{arctg} E, \quad E = \exp(\zeta \sqrt{-\tau_0 D_0 B}); \quad (13)$$

если $\tau_0 > 0$, то

$$J(\zeta) = (-\pi/B) + (4/B) \operatorname{arctg} E, \quad E = \exp(\zeta \sqrt{\tau_0 D_0 B}). \quad (14)$$

Из этих формул легко получаем функцию $Q^2(\zeta)$ сосредоточенного источника. Укажем отдельные примеры точных решений вида (9).

Пусть $B = 1$, $D(\tau) \equiv D_0$, $\tau = \pm \tau_0 (1 - 6E^2 + E^4) / (1 + E^2)^2$; здесь верхний и нижний знаки « \pm », а также выражения $E(\zeta)$ соответствуют (13) и (14). Функции источников такие:

$$f(\tau) = (\tau_0^2 - \tau^2) D_0, \quad Q^2(\zeta) = \mp 16 \tau_0 D_0 E^2 / (1 + E^2)^2 > 0,$$

где $Q^2 \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \pm\infty$. Схематическое изображение нелинейного источника показано на рис. 1, *a* для $\tau_0 < 0$. При $\tau_0 > 0$ решение обладает аналогичными свойствами. В данном случае решение имеет структуру уединенной волны: $\zeta \rightarrow \pm\infty$, $\tau \rightarrow \tau_0$, $\tau(\zeta = 0) = -\tau_0$; выпуклость линии $\tau(\zeta)$ обращена вверх, рис. 1, *b*. Функция $\tau(\zeta)$ – знакопеременная: $\tau = 0$ при $\zeta = \zeta_1$, $\zeta = \zeta_2 = -\zeta_1$, где $E_1^2 = E^2(\zeta = \zeta_1) = 3 - 2\sqrt{2}$, $E_2^2 = E^2(\zeta = \zeta_2) = 3 + 2\sqrt{2}$. Своеобразие ситуации в том, что именно при $\zeta = 0$ достигает максимума функция $Q^2(\zeta)$, и в этой точке обращается в ноль нелинейный источник. Конкуренция источников $f > 0$ и $g > 0$ наблюдается в интервале $[0, -\tau_0)$. Таким образом, формирование уединенной волны происходит под влиянием преобладающего воздействия сосредоточенного источника. После перемены знака функции $\tau(\zeta)$ конкуренция отсутствует ($f > 0$, $g < 0$), и профиль волны выравнивается. Нетрудно видеть, что ОТ-ситуация наблюдается в сверхзвуковом/дозвуковом режиме слева/справа от возвышения волны, рис. 1.

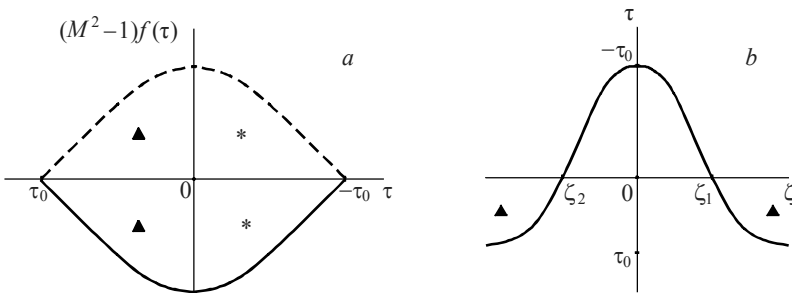


Рис. 1. Решение (9), (12) при $B = 1$, $\tau_0 < 0$: *a* – функция нелинейного источника; *b* – уединенная волна; * – область конкуренции источников; ▲ – область существования «отрицательной теплоемкости»; - - - функция источника в сверхзвуковом ($M^2 > 1$) режиме; — функция источника в дозвуковом ($M^2 < 1$) режиме

Fig. 1. Solution (9), (12) for $B = 1$, $\tau_0 < 0$: (*a*) nonlinear source function; (*b*) sole wave; (*) the region of source competition; (▲) the negative heat capacity region; - - - the source function in the supersonic regime; — the source function in the subsonic regime

Например, в дозвуковом режиме явление ОТ существует в фиксированной точке $x = x^1 > \zeta_1 > 0$ при $t \in [0, t^1)$, где $t^1 = (x^1 - \zeta_1)/N$ есть конечное время, в течение которого волна проходит расстояние $x^1 - \zeta_1$.

Пусть

$$B = 2, D = 2D_0 \cos J, f(\tau) = 2D_0 \tau (\tau_0^2 - \tau^2) / \tau_0. \quad (15)$$

При $\tau_0 < 0$ решения (9), (13) имеют кинк-структуру: $\tau(\zeta)$ монотонно возрастает слева направо от τ_0 до $(-\tau_0)$, причем $\tau(\zeta = 0) = 0$, рис. 2. Конкуренция источников отсутствует: $f > 0, g < 0$ при $\tau \in (\tau_0, 0)$; $f < 0, g > 0$ при $\tau \in (0, -\tau_0)$, рис. 2, а. ОТ-ситуация существует при $M^2 > 1$ в области решения, соответствующей нижней (левой) части кинка; при $M^2 < 1$ аномальный отклик получаем в верхней (правой) части кинка. В дозвуковом режиме явление ОТ существует на конечном интервале времени $[0, t^1)$ при каждом $x = x^1 \in (0, \infty)$, $t^1 = x^1/N$. Отметим еще, что при $M^2 > 1$ нелинейный источник имеет вид, характерный для биоткани: подвод/отвод тепла происходит в «холодной»/«горячей» температурных областях.

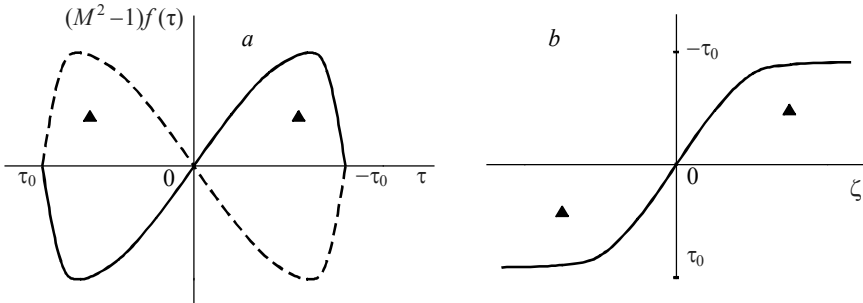


Рис. 2. Решение (9), (12) при $B = 2, \tau_0 < 0$: а – функция нелинейного источника; б – кинк-структура. Обозначения такие же, как на рис. 1

Fig. 2. Solution (9), (12) for $B = 2, \tau_0 < 0$: (a) nonlinear source function; (b) kink structure. Notations are the same as for Fig. 1

При $\tau_0 > 0$ из (9), (14) получаем уединенную волну: $\tau \in (0, \tau_0]$, $\tau(\zeta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$, $\tau(\zeta = 0) = \tau_0$. График функции $f(\tau)$ (он здесь не приводится) обращен выпуклостью вверх: имеется конкуренция, $f > 0, g > 0$ при $\tau \in (0, \tau_0)$, см. (15). В заключительной части статьи будет дан пример физической интерпретации этого решения: движение фазовой границы кристаллизации переохлажденного расплава.

Пусть $B = 3, D = D_0 (4 \cos^2 J - 1)$, $f(\tau) = D_0 (\tau_0^2 - \tau^2) [4(\tau^2 / \tau_0^2) - 1]$. При $\tau_0 < 0$ решение имеет кинк-структуру $\tau \in (\tau_0, -\tau_0/2)$, причем $\tau(\zeta = 0) = \tau_0/2$. Температурный интервал $(\tau_0/2, 0)$, на котором происходит конкуренция источников $f < 0, g < 0$, располагается между двумя интервалами $(\tau_0, \tau_0/2)$ и $(0, -\tau_0/2)$, где конкуренция отсутствует, рис. 3. ОТ существует в сверхзвуковом и дозвуковом режимах, соответственно в левом и правом интервалах. При $\tau_0 > 0$ ситуация аналогична случаю $B = 2$: в условиях конкуренции источников $f > 0, g > 0$ формируется уединенная волна при $\tau \in (\tau_0/2, \tau_0]$, $\tau(\zeta \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \tau_0/2$, $\tau(\zeta = 0) = \tau_0$. Такие же качественные результаты получаются для $B = 4, B = 5$.

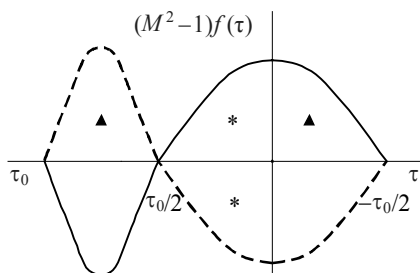


Рис. 3. Решение (9), (12) при $B = 3$, $\tau_0 < 0$: перемежаемость областей с отсутствием и наличием конкуренции источников.

Обозначения такие же, как на рис. 1

Fig. 3. Solution (9), (12) for $B = 3$, $\tau_0 < 0$: alternating regions with and without source competition. Notations are the same as for Fig. 1

Решения на основе двойного уравнения синус-Гордона

В (11) возьмем $D = D_0 + D_1\tau$, $D_1 > 0$ и получим

$$\frac{d^2 J}{d\zeta^2} = -\tau_0 D_0 \sin J - \frac{\tau_0^2 D_1}{2} \sin 2J. \quad (16)$$

Воспользуемся известными частными решениями [9] этого двойного уравнения синус-Гордона. Нелинейный источник $f(\tau)$ имеет вид (10).

Если $\tau_0^2 D_1^2 > D_0^2$, то

$$\tau = \tau_0 (1 - S^2) / (1 + S^2), \quad S^2 = D_2^2 \operatorname{th}^2 \zeta D_3, \quad (17)$$

$$D_2^2 = (\tau_0 D_1 + D_0) / (\tau_0 D_1 - D_0) > 1, \quad D_3 = \sqrt{\tau_0^2 D_1^2 - D_0^2} / (2\sqrt{D_1}),$$

$$Q^2(\zeta) = (\tau_0 D_1 + D_0)^2 / \left[D_1 (\operatorname{ch}^2 \zeta D_3 + D_2^2 \operatorname{sh}^2 \zeta D_3)^2 \right].$$

Параметры задачи оцениваются следующим образом: 1) $\tau_0 > 0$, $D_0 > 0$, $\tau_0 D_1 > D_0$, $\tau_\infty < 0$, $|\tau_\infty| < \tau_0$; 2) $\tau_0 < 0$, $D_0 < 0$, $\tau_0 D_1 < D_0$, $\tau_\infty > 0$, $|\tau_0| > \tau_\infty > 0$, где $\tau_\infty = \tau(\zeta \rightarrow \pm\infty)$. Решение имеет вид уединенной волны, функция $\tau(\zeta)$ – знакопеременная; $\tau(\zeta = 0) = \tau_0$. При $\tau_0 < 0$ имеем $\tau \in [\tau_0, \tau_\infty)$, выпуклость линии $f(\tau) \leq 0$ обращена вниз; при $\tau_0 > 0$ имеем $\tau \in (\tau_\infty, \tau_0]$, выпуклость линии $f(\tau) \geq 0$ обращена вверх. Условия появления ОТ-ситуации такие же, как для варианта $B = 1$: см. (12) и рис. 1.

Если в (16) $D_0^2 > \tau_0^2 D_1^2$, то решение выглядит так:

$$\tau = \tau_0 (1 - S_1^2) / (1 + S_1^2), \quad S_1^2 = D_4^2 \operatorname{tg}^2 \zeta D_5, \quad (18)$$

$$D_4^2 = (D_0 + \tau_0 D_1) / (D_0 - \tau_0 D_1) > 1, \quad D_5 = \sqrt{D_0^2 - \tau_0^2 D_1^2} / (2\sqrt{D_1}),$$

$$Q^2(\zeta) = (D_0 + \tau_0 D_1)^2 / \left[D_1 (\cos^2 \zeta D_5 + D_4^2 \sin^2 \zeta D_5)^2 \right].$$

Параметры задачи оцениваются следующим образом: 1) $\tau_0 > 0$, $D_0 > 0$, $D_0 > \tau_0 D_1$; 2) $\tau_0 < 0$, $D_0 < 0$, $D_0 < \tau_0 D_1$. Качественные свойства функции $f(\tau)$ такие же, как для предшествующего решения (17). Решение (18) представляет собой цуг волн. Например, для $\tau_0 > 0$ имеем: $\tau = \tau_0$ при $\zeta D_5 = \pi n_0$; $\tau \rightarrow (-\tau_0)$ при $\zeta D_5 = \pi n_0 \pm (\pi/2)$, где $n_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Функция $\tau(\zeta)$ – знакопеременная, рис. 4; $\tau = 0$ при $\text{tg}^2 \zeta D_5 = (1/D_4^2) < 1$. Каждая отдельная волна располагается по отношению к аргументу ζD_5 на интервалах $(-\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, 3\pi/2)$ и т.п. Явление ОТ наблюдается в течение конечного промежутка времени в «холодной» области $\tau \in (-\tau_0, 0)$ на восходящем/нисходящем участках отдельной волны при сверхзвуковом/дозвуковом режиме.

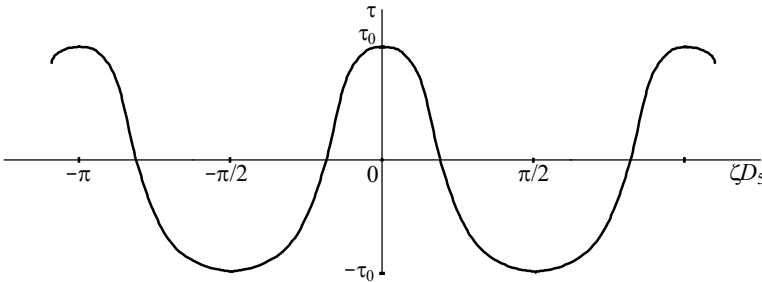


Рис. 4. Решение (18): цуг волн при $\tau_0 > 0$
Fig. 4. Solution (18): wave chain for $\tau_0 > 0$

Для $\tau_0 < 0$ график $\tau(\zeta)$ получается из рис. 4 переворотом на 180° вокруг горизонтальной оси. В этом случае имеем ОТ-ситуацию в «горячей» области на нисходящем/восходящем участках отдельной волны при сверхзвуковом/дозвуковом режиме.

В (11) возьмем $D = [\cos(J/2) - m] / [\tau_0 \cos(J/2)]$ и получим

$$\frac{d^2 J}{d\zeta^2} = 2m \sin \frac{J}{2} - \sin J.$$

Это уравнение имеет точное решение [10]:

$$J = 4 \arctg u, u = [(1-m)/m]^{1/2} / \cos(\zeta \sqrt{1-m}), 0 < m < 1. \quad (19)$$

В результате находим

$$\tau = \tau_0 \left[1 - \frac{8u^2}{(1+u^2)^2} \right]; \quad f(\tau) = \frac{(\tau_0^2 - \tau^2)}{\tau_0} \left[1 - m \left(\frac{2\tau_0}{(\tau_0 + \tau)} \right)^{1/2} \right]; \quad (20)$$

$$Q^2(\zeta) = \frac{16m(1-m)^2 \sin^2(\zeta \sqrt{1-m})}{[1 - m \sin^2(\zeta \sqrt{1-m})]^2}. \quad (21)$$

Обсудим случай $\tau_0 > 0$. Периодическое решение (19), (20) дает цуг волн, примакающих друг к другу при $\zeta \sqrt{1-m} = \pi n_0 \pm (\pi/2)$, $u \rightarrow \infty$. Каждая отдельная волна обращена в своей центральной части выпуклостью вниз и расположена на интервале вида $\zeta \sqrt{1-m} \in [-\pi/2, \pi/2]$. Зависимость $\tau(\zeta)$ может быть знакопеременной

ной: она принимает значения от τ_0 до $\tau_0(1+8m^2-8m)$. Размах колебаний функции (21) равен $16m$. Зависимость $f(\tau)$ в (20) примечательна тем, что именно в дозвуковом режиме она представляет нелинейный источник, характеризующий биоткань, рис. 5. Значение $m = 1/\sqrt{2}$ является пороговым: слева и справа от него различаются знаки величины $f(\tau = 0) = \tau_0(1 - m\sqrt{2})$. При $m \neq 1/\sqrt{2}$ имеется перемежаемость областей с наличием и отсутствием конкуренции; в отличие от рассмотренного выше случая $B = 3$ (см. рис. 3) здесь конкуренция отсутствует на внутреннем температурном интервале, примыкающем к $\tau = 0$. ОТ-ситуацию имеем там, где нет конкуренции. Если $m = 1/\sqrt{2}$, то конкуренция присутствует во всей области определения решения. Полученные физические результаты нетрудно переформулировать для случая $\tau_0 < 0$.

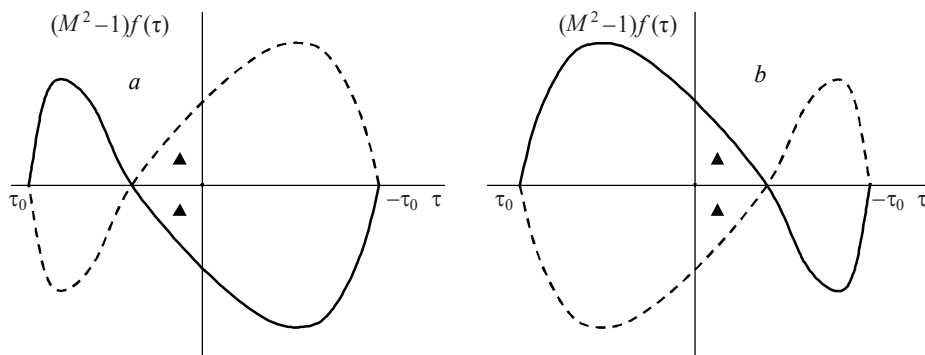


Рис. 5. Решение (20): возможные варианты перемежаемости областей с отсутствием и наличием конкуренции источников. Обозначения такие же, как на рис. 1

Fig. 5. Solution (20): possible combinations of alternating regions with and without source competition. Notations are the same as for Fig. 1

Таким образом, решение (20), (21) говорит о том, что в дозвуковом режиме периодический по волновой координате источник τQ^2 действует на фоне нелинейного *bio*-источника и возбуждает цуг волн.

Еще одно точное решение можно получить, выполнив преобразование $\zeta \rightarrow i\zeta$ в формулах (3) и (19) – (21). Эти результаты здесь не приводятся. Отметим только, что получаемая из (21) функция $Q^2(\zeta)$ описывает дважды сосредоточенный источник, потому что она дважды достигает максимум: слева и справа от $\zeta = 0$.

Переменная скорость распространения возмущений

Для волнового уравнения (2) рассмотрим случай переменной «скорости звука»:

$$w^2 = w_0^2 \pm w_1^2(\tau) > 0, \quad w_1^2 = a_1^2 \tau^\alpha, \quad (22)$$

$$\alpha, a_1 - \text{const}, \quad \zeta = (x/w_0) - t, \quad w_0 = N,$$

где α – положительное четное число. Здесь и далее верхний/нижний знаки соответствуют положительной (*p*)/отрицательной (*n*) производной $d(w^2)/d\tau$. Уравнение (2) принимает вид

$$d^2\tau/d\zeta^2 = \mp w_0^2 k_v / w_1^2. \quad (23)$$

Если $k_v = k_v^1 \tau^\alpha \sin B\tau$; $k_v^1, B - \text{const}$, то (23) превращается в уравнение синус-Гордона, определяющее бегущие «звуковые» волны $\tau = \tau(\zeta)$, см. формулы (12) – (14). Отметим, что в этом случае источник $k_v(\tau)$ колеблется по τ с нарастающей амплитудой – по резонансному типу. Возможны и другие варианты частных зависимостей $k_v(\tau)$, позволяющие преобразовать (23) к уравнению с известными точными аналитическими решениями. Изучим два примера, для которых (23) отличается по структуре от уравнения синус-Гордона. В соответствии со знаком производной $d(w^2)/d\tau$ будем говорить о (p) и (n) средах.

Уединенная «звуковая» волна:

$$\tau = \tau_0 / (1 + B_1^2 \zeta^2); \tau_0, B - \text{const}, \tau_0 > 0; \tau \in (0, \tau_0]; \quad (24)$$

$$k_v^{(p),(n)} = \pm k_1^2 \tau^{2+\alpha} [(4\tau/3) - \tau_0] / \tau_0^2, k_1^2 = 6a_1^2 B_1^2 / w_0^2.$$

Здесь a_1^2 – параметр среды; B_1^2 – параметр источника. Источники $k_v^{(p),(n)}(\tau)$ – знакопеременные, и на периферии волны ($\zeta \rightarrow \pm\infty$) имеем $\tau \rightarrow 0$, $w^2 \rightarrow w_0^2$, $k_v \rightarrow 0$, $(dk_v/d\tau) \rightarrow 0$. Возвышение волны, т.е. максимум функции $\tau(\zeta)$, формируется в точке $\zeta = 0$, где $\tau(\zeta = 0) = \tau_0 > 0$. Для (p) -среды на возвышении имеем $k_v^{(p)} > 0$, $dk_v^{(p)}/d\tau > 0$; сам источник обладает *tech*-свойствами. Для (n) -среды на возвышении имеем $k_v^{(n)} < 0$, $dk_v^{(n)}/d\tau < 0$; сам источник обладает *bio*-свойствами, рис. 6. Таким образом, на возвышении волны для обеих сред имеем $(dk_v^{(p),(n)}/d\tau)(d(w^2)/d\tau) > 0$, а кривизна линии $\tau(\zeta)$ равна

$$K(\zeta = 0) = \left| k_v^{(p),(n)} \right| \frac{w_0^2}{w_1^2} = 2\tau_0 B_1^2.$$

В данном примере она не зависит от a_1^2 и определяется шириной температурного интервала τ_0 и параметром источника B_1^2 .

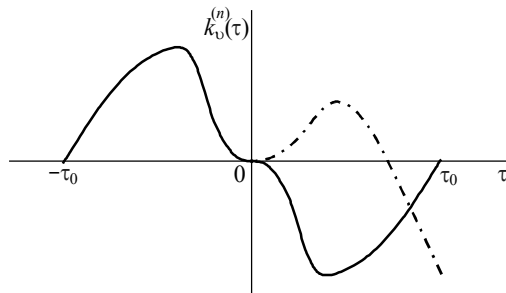


Рис. 6. Нелинейная среда (22), $d(w^2)/d\tau < 0$: объемные источники энергии, действующие в биологической ткани; - - - - источник, возбуждающий уединенную волну (24); — источник, возбуждающий знакопеременный кинк (25)

Fig. 6. Nonlinear medium (22), $d(w^2)/d\tau < 0$: volumetric energy sources acting in the biological tissue: - - - - the source of sole wave (24); — the source of alternating kink (25)

Знакопеременный кинк:

$$\tau = \tau_0 \operatorname{th} B_1 \zeta ; \tau_0, B_1 - \text{const}, \tau_0 > 0; \quad (25)$$

$$k_v^{(p),(n)} = \pm k_1^2 \tau^{1+\alpha} (\tau_0^2 - \tau^2) / \tau_0^2, \quad k_1^2 = 2a_1^2 B_1^2 / w_0^2, \quad \tau \in (-\tau_0, \tau_0).$$

Аналогично только что рассмотренной уединенной волне, здесь для (p)-среды/(n)-среды имеем *tech*-источник/*bio*-источник, рис. 6. В центральной точке кинка $\zeta = 0$, $\tau = 0$, $d\tau/d\zeta = \tau_0 B_1$, $k_v^{(p),(n)} = 0$, $k_v^{(p),(n)}/d\tau = 0$. Отметим корреляцию между наклоном функции источника в невозмущенных состояниях ($\zeta \rightarrow \pm\infty$) и наклоном кинка в его центральной точке:

$$\left(\frac{k_v^{(p),(n)}}{d\tau} \right)_{\zeta \rightarrow \pm\infty} = \mp \frac{4w_1^2(\tau = \tau_0)}{\tau_0^2 w_0^2} \left(\frac{d\tau}{d\zeta} \right)_{\zeta=0}^2 = \mp \frac{4B_1^2 w_1^2(\tau = \tau_0)}{w_0^2}.$$

Здесь отношение $w_1^2(\tau = \tau_0)/w_0^2$ дает количественную характеристику нелинейных свойств среды в интервале температур $(-\tau_0, \tau_0)$.

Фазовая граница кристаллизации

Обсудим физическую интерпретацию решения (9), (14), (15) при $\tau_0 > 0$. Пусть линия $\zeta = 0$ есть фазовая граница кристаллизации однокомпонентного чистого расплава, переохлажденного до температуры $T_* < T_c$, где T_c – равновесная температура кристаллизации. Применение волновой модели (2) оправдано тем, что по мере увеличения переохлаждения усиливается роль локально-неравновесного теплопереноса, см. [1], [11]. Будем рассматривать правую часть уединенной волны в дозвуковом режиме: $\zeta \geq 0$, $N > 0$, $M^2 < 1$,

$$T - T^0 \equiv \tau = 2\tau_0 E / (1 + E^2), \quad E = \exp(\zeta \sqrt{2\tau_0 D_0}), \quad \tau_0 > 0, D_0 > 0, \quad (26)$$

$$Q(\zeta) = 2E \sqrt{2\tau_0 D_0} / (1 + E^2), \quad \tau \in (0, \tau_0],$$

$$k_v = k_v^+ + k_v^-,$$

$$k_v^+ = (1 - M^2)g > 0, \quad k_v^- = (M^2 - 1)f < 0,$$

$$f = 2D_0 \tau (\tau_0^2 - \tau^2) / \tau_0, \quad g = \tau Q^2 = 2D_0 \tau^3 / \tau_0.$$

Возьмем $T^0 = T_*$, и тогда $\tau(\zeta \rightarrow +\infty) = 0$, а переохлаждение расплава равно $\tau(\zeta = 0) = T_c - T_* = \tau_0 > 0$. Параметр D_0 характеризует взаимодействие сосредоточенного источника k_v^+ (выделение теплоты фазового перехода) и теплоотвода k_v^- , обеспечивающего переохлажденное состояние расплава. Укажем размерность этого параметра: $[D_0] = [q_v / (T^2 c\gamma)] = [1 / (t^2 T)]$, где $[q_v] = [q/x]$, q – удельный тепловой поток. Ясно, что при таком упрощенном подходе источник k_v^+ «размазывает» по ζ подробности взаимодействия границы кристаллизации с жидкой фазой. По отношению к координате x определим толщину слоя перехода от $\tau = \tau_0$ к $\tau = 0$ как дробь

$$\Delta x = \tau_0 / |\partial\tau/\partial x|_{\max} = w\tau_0 / |d\tau/d\zeta|_{\max},$$

где знаменатель дроби есть максимальное значение модуля производной $d\tau/d\zeta$ при $\zeta \in [0, \infty)$. Расчеты показывают, что

$$\Delta x = (2 + \sqrt{2})w / \left[(1 + \sqrt{2})\sqrt{2\tau_0 D_0} \right].$$

Таким образом, баланс энергии на фазовой границе можем записать в виде

$$q_v^+(\zeta = 0)\Delta x = LN, \quad (27)$$

где LN есть тепловой поток, обусловленный выделением кристаллизационного тепла; L – теплота фазового перехода единицы объема вещества. Левая часть формулы (27) – это количественная оценка теплового потока, который создается сосредоточенным источником при $\zeta = 0$; $q_v^+ = k_v^+ / (c\gamma)$. После аналитических преобразований, основанных на решении (26), из (27) получаем

$$N/w = M = (\sqrt{1+4\Gamma} - 1) / (2\sqrt{\Gamma}), \quad (28)$$

где $\Gamma = 4D_0\lambda^2\tau_0^3 / (w^4 L^2)$ – положительный безразмерный параметр. В физическом отношении основной интерес представляет зависимость скорости фазовой границы от переохлаждения: $N = N(\tau_0)$. Известные в литературе (см. [11] и указанную там библиографию) данные о высокоскоростной кристаллизации глубоко переохлажденных (до 300 К) расплавов чистых металлов говорят о том, что функция $N(\tau_0)$ монотонно возрастающая, $dN/d\tau_0 > 0$, и при не слишком больших переохлаждениях удовлетворяет условию выпуклости: $d^2N/d\tau_0^2 > 0$. Например, для чистого никеля оба эти свойства выполнены при $0 < \tau_0 \leq 150$ К. Из формулы (28) ясно, что условие монотонного роста выполняется при всех $\Gamma > 0$, а из условия выпуклости следует ограничение $\Gamma \leq 0.06$. Это означает, что для данного решения тепловое число Маха не превосходит 0.23. Числовые расчеты, проведенные на основе этой оценки, показывают, что для никеля формула (26) имеет физический смысл при $\tau_0 \leq 57$ К.

Заключение

Для волнового уравнения с источниками построены новые решения типа бегущей волны. Результаты изложены в терминах теории теплопереноса. Рассмотрены два типа нелинейных источников, различающихся характером тепловыделения/теплоотвода в «горячей» и «холодной» температурных областях. Например, источник, характерный для биологической ткани, в отличие от источника технического происхождения, выделяет тепло при низких температурах. Представлены примеры аномального температурного отклика среды: подвод/отвод тепла дает снижение/рост температуры (так называемая «отрицательная теплоемкость»). Дан пример нелинейной среды, допускающей точное аналитическое описание волновой задачи при воздействии источника, который зависит от температуры по резонансному типу: его колебания происходят с нарастающей амплитудой. Для задачи о фазовой границе кристаллизации переохлажденного расплава получена физически содержательная зависимость скорости роста кристалла от переохлаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon J. Extended Irreversible Thermodynamics. Springer-Verlag, 2001. 486 p.
2. Глазунов Ю. Т. Вариационный принцип явлений взаимосвязанного тепло- и массопереноса, учитывающий конечную скорость распространения возмущений // Инженерно-физический журнал. 1981. Т. 40. № 1. С. 134–138.
3. Яворский Н.И. Вариационный принцип для вязкой теплопроводной жидкости с релаксацией // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 3. С. 3–10.
4. Никитенко Н.И. Проблемы радиационной теории тепло- и массопереноса в твердых и жидких средах // Инженерно-физический журнал. 2000. Т. 73. № 4. С. 851–859.
5. Pennes H. H. Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm // J. Appl. Physiol. 1948. V. 1. P. 93–122.
6. Ингель Л.Х. «Отрицательная теплоемкость» стратифицированных жидкостей // УФН. 2002. Т. 172. № 6. С. 691–699.
7. Шабловский О.Н. «Отрицательная теплоемкость» в задачах нелинейной динамики волн // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 16. М.: Янус-К, 2014. С. 78–89.
8. Ельшин М.И. К проблеме колебаний линейного дифференциального уравнения второго порядка // Доклады АН СССР. 1938. Т. 18. № 3. С. 141–145.
9. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.
10. Шабловский О.Н. Точные решения волновых уравнений с нелинейными источниками // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 14. М.: Янус-К, 2011. С. 382–391.
11. Herlach D., Galenko P., Holland-Moritz D. Metastable solids from undercooled melts. Pergamon; Elsevier, 2007. 432 p.

Статья поступила 24.10.2018 г.

Shablovskii O.N. (2020) NONLINEAR WAVES AND "NEGATIVE HEAT CAPACITY" IN A MEDIUM WITH COMPETITIVE SOURCES. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 66. pp. 64–76

DOI 10.17223/19988621/66/5

Keywords: wave equation; nonlinear energy source; temperature response of the medium; undercooled melt.

For a wave equation with sources, new running-wave type solutions are built. The results are expressed in terms of the heat transfer theory. We study two types of alternating volume energy sources q_v with a nonlinear temperature dependence T . Let $q_v(T = T^1) = 0$ where T^1 is the temperature of the source sign change. The source is positive at $T > T^1$ (heat input) and negative at $T < T^1$ (heat output) when it has technical origin. A source of biological origin differs from technical ones. It serves as a compensator: at $T > T^1$ it takes the heat in; at $T < T^1$, it gives the heat out. Three types of analytical solutions are obtained: the sole wave, the kink structure, and the wave chain. Subsonic and supersonic wave processes are studied with respect to the rate of heat perturbations. The examples for a non-classical phenomenon of "negative heat capacity" are given when heat input/output leads to a temperature decrease/increase. We have considered a nonlinear medium liable to an exact analytical description of a wave problem with a having a resonance type of the temperature dependence: its oscillations have a crescent amplitude. As an example of physical interpretation for one solution, the rate of crystal growth is calculated as a function of the melt undercooling.

AMS 2020 Mathematical Subject Classification: 35L05, 35C05, 35C07

Oleg N. SHABLOVSKII (Doctor of Physics and Mathematics, Prof., Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Republic of Belarus). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

REFERENCES

1. Jou D., Casas-Vazquez J., Lebon J. (2001) *Extended Irreversible Thermodynamics*. Springer-Verlag.
2. Glazunov Yu.T. (1981) Variatsionnyy printsip yavleniy vzaimosvyazannogo teplo- i massopere-nosa uchityvayushchiy konechnuyu skorost' rasprostraneniya vozmushcheniy [Variation principle for the phenomena of interconnected heat and mass transfer with account of finite velocity of perturbation propagation]. *Inzhenerno-Fizicheskiy Zhurnal – Engineering-Physical Journal*. 40(1). pp. 134–138.
3. Yavorskii N.I. (1986) Variational principle for a viscous heat-conducting liquid with relaxa-tion. *Fluid Dynamics*. 21(3). pp. 338–345.
4. Nikitenko N.I. (2000) Problemy radiatsionnoy teorii teplo- i massopere-nosa v tverdyh i zhid-kikh sredakh [Problems of radiation theory of heat and mass transfer in solid and liquid media]. *Inzhenerno-Fizicheskiy Zhurnal – Engineering-Physical Journal*. 73(4). pp. 851–859.
5. Pennes H.H. (1948) Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm. *Journal of Applied Physiology*. 1(2). pp. 93–122.
6. Ingel' L.Kh. (2002) "Negative heat capacity" in stratified fluids. *Physics-Uspexhi*. 45(6). pp. 637–644.
7. Shablovskii O.N. (2014) "Otritsatel'naya teployemkost'" v zadachakh nelineynoy dinamiki voln ["Negative heat capacity" in problems of nonlinear wave dynamics]. *Fundamental'nye Fiziko-Matematicheskie Problemy i Modelirovanie Tekhniko-Tekhnologicheskikh System – Fundamental Physical and Mathematical Problems and Modeling of Technical and Techno-logical Systems*. Vol. 16. Moscow: Janus-K. pp. 78–89.
8. Yelshin M.I. (1938) *K probleme kolebaniy lineynogo-differentsialnogo uravneniya vtorogo poryadka* [To the oscillation problem of a linear second-order differential equation]. *Doklady AN SSSR – Proceedings of the USSR Academy of Sciences*. 18(3). pp. 141–145.
9. Polyanin A.D., Zaytsev V.F. (2002) *Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoy fiziki: tochnye resheniya* [Handbook on nonlinear equations of mathematical physics: exact solutions]. Moscow: Fizmatlit.
10. Shablovskii O.N. (2011) Tochnye resheniya volnovykh uravneniy s nelineynymi istochnikami [Exact solutions of wave equations with nonlinear sources]. *Fundamental'nye Fiziko-Matematicheskie Problemy i Modelirovanie Tekhniko-Tekhnologicheskikh System – Funda-mental Physical and Mathematical Problems and Modeling of Technical and Technological Systems*. Vol. 14. Moscow: Janus-K. pp. 382–391.
11. Herlach D., Galenko P., Holland-Moritz D. (2007) *Metastable Solids from Undercooled Melts*. Pergamon; Elsevier.

Received: October 24, 2018