УДК 517.958:531.32
DOI 10.17223/19988621/64/11

О.Н. Шабловский

СФЕРИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕОДНОРОДНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Построены точные частные решения уравнений Эйлера, определяющие стационарное сферическое движение несжимаемой невязкой жидкости. Даны примеры влияния структуры пространственной неоднородности силового поля на гидродинамические параметры течения: задача о протекании жидкости сквозь ядро сферического слоя; широтные и меридианные течения; поведение изобар и линий равных скоростей в потенциальном, соленоидальном и лапласовом силовых полях.

Ключевые слова: *сферический слой; задача протекания; широтное и меридианное течения; потенциальное, соленоидальное и лапласово силовые поля.*

Уравнения стационарного сферического течения идеальной несжимаемой жидкости являются важным элементом теории гидродинамических явлений в атмосфере, океане и технических сооружениях. Запишем эти уравнения в следующем виде:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta = 0, \tag{1}$$

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}\left(v_\theta^2 + v_\varphi^2\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + F_r, \tag{2}$$

$$v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}v_r v_\theta - \frac{v_\varphi^2}{r}\operatorname{ctg}\theta = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta, \tag{3}$$

$$v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}v_\varphi v_r + \frac{v_\varphi v_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta = -\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi. \tag{4}$$

Здесь r, θ, φ – сферические координаты; $v(v_r, v_\theta, v_\varphi)$ – вектор скорости жидкости; p – давление; ρ – плотность; $F(F_r, F_\theta, F_\varphi)$ – вектор ускорения под воздействием массовой силы (далее для краткости применяем термин «массовая сила»).

Сформулируем основные предпосылки данной работы.

1. Точные решения уравнений (1) – (4) представляют не только самостоятельный интерес, но и служат средством тестирования вычислительных программ при моделировании гидродинамических процессов в сферических слоях. Отдельные классы решений, а также библиография проблемы точного аналитического описания невязких и вязких сферических и осесимметричных течений несжимаемой жидкости имеется в работах [1–5]. Отметим, что известные точные решения системы уравнений (1) – (4) получены, в основном, при отсутствии массовых сил.

2. Заслуживает внимания вопрос о сферических течениях жидкости в силовых полях, физическая природа которых обусловлена гравитационными, электриче-

скими и другими явлениями. Речь идет о массовой силе, векторное поле которой является потенциальным, соленоидальным либо лапласовым. В качестве примера назовем публикацию [6], в которой изложены свойства двухмерного вязкого течения при наличии соленоидальной массовой силы.

3. Задача протекания для уравнений Эйлера [7, 8] и Навье – Стокса [9] относится к актуальным проблемам математической гидродинамики. Современное состояние методов вычислительного моделирования двухмерного невязкого течения сквозь замкнутую область представлено в [10]. В теоретическом отношении важное значение имеет задача протекания в трехмерной области типа сферического слоя [11].

Цель работы: получить точные частные решения системы уравнений (1) – (4) и указать примеры протекания жидкости через границы сферического слоя; рассмотреть воздействие потенциального, соленоидального и лапласова силовых полей на скорость и давление жидкости.

Протекание жидкости сквозь ядро сферического слоя

Непосредственно подстановкой можно проверить, что системе (1) – (4) удовлетворяет частное решение, полученное из эвристических соображений:

$$v_r = A_1(1-2R)\cos\theta\,,\ v_\theta = 2A_1R\sin\theta\,,\ v_\varphi \equiv 0\,; \tag{5}$$

$$(p-p_0)/\rho = A_1^2\left[2R\cos^2\theta - \sin^2\theta - \left(R^2/2\right)\right];$$

$$F_r = 3A_1(R/r)\cos 2\theta\,,\ F_\theta = -3A_1^2(R/r)\sin 2\theta\,,\ F_\varphi \equiv 0\,; \tag{6}$$

$$R = \ln(r/r_0)\,,\ 0 < r_0 < \infty\,,\ 0 \le R \le (1/2)\,,$$

где A_1 – произвольная постоянная; условие $p>0$ обеспечивается подходящим выбором константы p_0. Течение происходит в сферическом слое конечной толщины: $r \in [r_0, r_w]$, $r_w = r_0\exp(1/2)$. Внешняя граница слоя непротекаемая: $r = r_w$, $R = 1/2$, $v_r(R = 1/2) = 0$. Жидкость протекает через внутреннюю границу слоя ($r = r_0$, $R = 0$): $v_\theta(R = 0) = 0$, $v_r(R = 0) = A_1\cos\theta$. Возьмем для определенности $A_1>0$. Тогда в северной ($0 \le \theta \le \pi/2$) части слоя жидкость вытекает из ядра: $R = 0$, $v_r > 0$. На экваторе ($\theta = \pi/2$) протекания нет: $v_r = 0$. В южной ($\pi/2 < \theta \le \pi$) части слоя жидкость течет внутрь ядра: $R = 0$, $v_r<0$. Обсудим поведение градиента давления на границах слоя.

На внутренней протекаемой сфере:

$$r = r_0,\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{A_1^2}{r_0}(1+\cos 2\theta)\,,\ \frac{1}{r_0\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{A_1^2}{r_0}\sin 2\theta\,.$$

На внешней непротекаемой сфере:

$$r = r_w,\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{A_1^2}{r_w}\left(\frac{1}{2}+\cos 2\theta\right),\ \frac{1}{r_w\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{A_1^2}{r_w}\sin 2\theta\,.$$

Отсюда видим, что на обеих границах $\partial p/\partial\theta$ меняет знак при переходе через экватор. Вместе с тем $\partial p/\partial r$ ведет себя иначе. На границе ядра эта производная неотрицательна: она обращается в ноль на экваторе. На внешней сфере ситуация нетривиальная: $\partial p/\partial r<0$ в конечной окрестности по обе стороны экватора, а именно там, где $(1/2)+\cos 2\theta<0$. При переходе через пороговые значения $\theta = \theta_i$, $i = 1, 2$, где

$(1/2)+\cos 2\theta_i = 0$, $\partial p/\partial r = 0$, производная $\partial p/\partial r$ меняет знак. На экваторе $\mathrm{grad}p$ направлен вдоль радиуса.

Завихренность $\omega = (1/2)\,\mathrm{rot}\, v$ имеет вид $\omega_r \equiv 0$, $\omega_\varphi \equiv 0$, $\omega_\varphi = (3/2r)\,A_1 \sin\theta$. Значит, $\omega_\varphi = 0$ только на полюсах $\theta = 0$, $\theta = \pi$; при каждом фиксированном r завихренность неотрицательная и достигает максимума на экваторе. Данное течение вызвано действием силы (6), имеющей модуль $|F| = 3A_1^2 R/r$, который постоянен на сферах $r = \mathrm{const}$. По мере возрастания радиуса ядра r_0 модуль силы монотонно убывает, потому что r_0 – нижняя граница значений радиальной координаты. Поступая известным образом, можно представить вектор F с компонентами (6) в виде суммы потенциального $F^{(P)}$ и соленоидального $F^{(S)}$ векторов:

$$F = F^{(P)} + F^{(S)}, \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}\,F^{(P)} = 0,\ \mathrm{div}\,F^{(S)} = 0,\ F^{(P)} = \mathrm{grad}\,\Phi,\ \Delta\Phi = \mathrm{div}\,F,$$

где $\Delta\Phi$ – оператор Лапласа, действующий на скалярную функцию $\Phi = \Phi_0(\theta)+R\Phi_1(\theta)$. При этом оказывается (подробная запись выражений Φ_0, Φ_1 здесь не приводится), что $F^{(P)}$ и $F^{(S)}$ имеют на полюсах $\theta = 0$, $\theta = \pi$ особенности вида $1/\sin\theta$, и эти особенности взаимно уничтожаются при суммировании (7). Отметим еще, что $(\mathrm{rot}\,F)_r \equiv 0$, $(\mathrm{rot}\,F)_\theta \equiv 0$, $(\mathrm{rot}\,F)_\varphi = \left(3A_1^2/r^2\right)(2R-1)\sin 2\theta$. Это значит, что завихренность данного силового поля равна нулю на внешней непротекаемой границе $R = 1/2$, а также в плоскости экватора $\theta = \pi/2$ и вдоль полярных радиусов $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Интенсивность источников силы F: $J = \mathrm{div}\,F = \left(3A_1^2/r^2\right)\left[R-1+2\cos^2\theta(1-2R)\right]$. Отсюда ясно, что на внешней непротекаемой границе $J(R = 1/2)\equiv\mathrm{const}$. На поверхности ядра функция $J_0(\theta) \equiv J(R=0) = \left(3A_1^2/r_0^2\right)\cos 2\theta$ знакопеременная и дважды обращается в ноль; по обе стороны экватора имеем сток: $J_0(\theta)<0$ при $\theta \in (\pi/4, 3\pi/4)$; в конечной окрестности полюсов имеем источник: $J_0(\theta)>0$ при $\theta \in [0, \pi/4)$ и $\theta \in (3\pi/4, \pi]$.

Чтобы определить температурное поле $T = T(r,\theta)$, соответствующее невязкому нетеплопроводному течению (5), запишем уравнение энергии в виде

$$v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta} = 0.$$

Отсюда находим

$$T - T_0 \equiv \tau(\chi),\ \chi = \frac{r}{r_0}(1-2R)^{1/2}\sin\theta,$$

$$R \in [0, 1/2],\ \theta \in [0, \pi],$$

где T_0 – отсчетное значение температуры; $\tau(\chi)$ – дифференцируемая функция аргумента χ, которая должна быть ограниченной вместе со своей производной, а в остальном она произвольная. Конкретизация функции $\tau(\chi)$ означает задание температурной зависимости скорости протекания сквозь ядро сферического слоя. Рассмотрим два примера.

Пусть $\tau = T_1\chi^{n_1}$, $n_1 \geq 2$, $\chi \geq 0$; T_1, n_1 – const; $\tau/T_1 > 0$. Тогда скорость протекания зависит от температуры поверхности ядра степенным образом:

$$R = 0,\ v_r^2 = A_1^2\left[1 - \left(\frac{T - T_0}{T_1}\right)^{2/n_1}\right] \geq 0 .$$

Пусть $\tau = T_1 \ln\left(1 + b_1^2\chi^2\right)$, $T_1 \geq 0$, $b_1^2 > 0$. Тогда скорость протекания зависит от температуры поверхности ядра экспоненциальным образом:

$$R = 0,\ v_r^2 = \frac{A_1^2}{b_1^2}\left\{1 + b_1^2 - \exp\left[\left(T - T_0\right)/T_1\right]\right\} \geq 0 .$$

Широтное течение

Рассмотрим класс широтных движений

$$v_r \equiv 0 ,\ v_\theta \equiv 0 ,\ v_\varphi = v_\varphi\left(r,\theta\right),\ p = p\left(r,\theta\right); \tag{8}$$

$$F_r = F_r\left(r,\theta\right),\ F_\theta = F_\theta\left(r,\theta\right),\ F_\varphi \equiv 0 . \tag{9}$$

Область определения решения указана далее при анализе отдельных примеров. На основе уравнений (1) – (4) получаем

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - F_r ,\ \frac{v_\varphi^2}{r}\operatorname{ctg}\theta = \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta} - F_\theta , \tag{10}$$

а это значит, что должно быть выполнено равенство

$$r\frac{\partial p}{\partial r}\operatorname{ctg}\theta - \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho r\left(F_r \operatorname{ctg}\theta - F_\theta\right) . \tag{11}$$

Будем рассматривать потенциальное и соленоидальное силовые поля, удовлетворяющие связи

$$F_r \cos\theta = F_\theta \sin\theta , \tag{12}$$

при которой правая часть уравнения (11) рана нулю, т.е.

$$p - p_0 = \Pi\left(\zeta\right),\ \zeta = r\sin\theta . \tag{13}$$

Произвольную функцию $\Pi(\zeta)$ следует выбирать из физических соображений так, чтобы получить непрерывное и ограниченное решение. Отметим еще, что ζ есть расстояние от точки (r,θ) до оси z декартовой системы координат, т.е. семейство линий $\zeta = \text{const}$ есть семейство окружностей, имеющих радиус ζ, а центр на оси z; плоскости этих окружностей ортогональны оси z. Условие потенциальности силового поля

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(rF_\theta\right) = \frac{\partial F_r}{\partial \theta}$$

совместно с (12) дает две компоненты массовой силы

$$F_r^{(P)} = \frac{1}{r}B\left(\zeta\right),\ F_\theta^{(P)} = \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}B\left(\zeta\right), \tag{14}$$

где $B(\zeta)$ – функция непрерывная и ограниченная, а в остальном ее выбор произволен. Квадрат скорости течения находим из (10):

$$v_\varphi^2 = \frac{\zeta}{\rho}\frac{d\Pi(\zeta)}{d\zeta} - B(\zeta) \ge 0\,. \tag{15}$$

Приведем пример:

$$B = -b_1^2\,\zeta\,,\ \Pi = p_1^2 \sin^2 k\zeta\,,\ 0 \le \zeta < \infty\,,$$

$$F_r^{(P)} = -b_1^2 \sin\theta\,,\ F_\theta^{(P)} = -b_1^2 \cos\theta\,,$$

$$v_\varphi^2 = \zeta\left(\frac{p_1^2 k}{\rho}\sin 2k\zeta + b_1^2\right),\ b_1^2 \ge \frac{p_1^2 k}{\rho}\,,$$

$$b_1^2\,,\ p_1^2\,, k - \mathrm{const};\ r \in [0, r_w]\,,\ \theta \in [0, \pi]\,.$$

Течение происходит внутри непротекаемой сферы радиуса r_w. В центре сферы и вдоль полярных радиусов жидкость неподвижна, а внутри сферы скорость и давление изменяются периодическим образом по отношению к аргументу ζ. Линии равных скоростей (изотахи) являются изобарами.

Перейдем к рассмотрению соленоидальных сил. Для случая (9) условие $\mathrm{div}F = 0$ совместно со связью (12) дает

$$F_r^{(S)} = \frac{1}{r}A(z)\,,\ F_\theta^{(S)} = \frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r}A(z)\,,\ z = r\cos\theta\,, \tag{16}$$

где $A(z)$ – функция непрерывная и ограниченная. Давление по-прежнему определяется формулой (13). Квадрат скорости жидкости равен

$$v_\varphi^2 = \frac{\zeta}{\rho}\frac{d\Pi(\zeta)}{d\zeta} - A(z)\,. \tag{17}$$

Выбор произвольных функций $\Pi(\zeta)$, $A(z)$ должен обеспечивать условие $v_\varphi^2 \ge 0$. Декартова координата z есть расстояние от плоскости окружности $\zeta = \mathrm{const}$ до центра $r = 0$.

Зависимость $A(z)$ является основным элементом структуры неоднородности соленоидального поля (16). В потенциальном случае (14) неоднородность обусловлена зависимостью от координаты ζ, которая отсчитывается в направлении, ортогональном оси z. Это различие между (14) и (16) приводит к тому, что в потенциальном силовом поле широтная скорость (15) «одномерна» по отношению к аргументу ζ, а в соленоидальном случае скорость зависит от двух аргументов z, ζ. Завихренность силового поля (16) имеет одну отличную от тождественного нуля компоненту $(\mathrm{rot}F)_\varphi = (1/\zeta)(dA/dz)$.

Решение (13), (16), (17) описывает течение в части пространства, внешней по отношению к двум непротекаемым конусам вращения:

$$r \ge 0\,,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]\,,\ z \in (-\infty, \infty)\,,\ \zeta \in [0, \infty)\,; \tag{18}$$

$$0 < \theta_1 < \pi/2\,,\ \theta_2 = \pi - \theta_3\,,\ 0 < \theta_3 \le \pi/2\,.$$

Расположение конусов напоминает песочные часы: у них общая ось, вершины соприкасаются и обращены навстречу друг другу; θ_1 и θ_3 есть углы осью и образующими конусов.

Приведем пример: периодическая неоднородность силового поля описывается функцией $A = -A_1^2 \sin^2(k_1 z)$; A_1, k_1 – const. Это значит, что в плоскости экватора

$F_r^{(S)} = 0$, $F_\theta^{(S)} = 0$, а по обе стороны этой плоскости при каждом фиксированном θ из интервалов [θ_1, π/2) и (π/2, θ_2] компоненты силы (16) изменяются по отношению к $r \geq 0$ в режиме затухающих колебаний. Частота колебаний $k_1\cos\theta$ увеличивается по мере приближения к поверхностям непротекающих конусов. Функцию давления возьмем в виде

$$p = p_\infty + \Pi(\zeta) > 0 \text{ , } \Pi(\zeta) = -p_1^2 \sin^2(\pi E) \text{ , } E = \exp\left(-p_2^2\,\zeta\right)$$

и получим

$$v_\varphi^2 = \frac{\pi\zeta}{\rho} p_1^2 p_2^2 E \cos(\pi E) + A_1^2 \sin^2(k_1 z) \text{ .}$$

Данное решение определено в области (18). Параметры течения в центре $r = 0$: $v_\varphi = 0$, $p = p_0 = p_\infty$, $(\operatorname{rot} F)_\varphi = -2A_1^2 k_1^2 \operatorname{ctg}\theta$. При $r \to \infty$ имеем $p \to p_\infty = p_0$, $v_\varphi^2 \to A_1^2 \sin^2(k_1 z)$, $(\operatorname{rot} F)_\varphi \to 0$.

Отметим интересный частный случай. Если $\theta_2 = \theta_3 = \pi/2$, см. (18), то непротекаемыми границами течения являются конус и экваториальная плоскость.

Известно, что силовое поле Лапласа (L) является одновременно и потенциальным и соленоидальным: $F^{(L)} = \operatorname{grad}\Phi$, $\operatorname{div}F^{(L)} = \Delta\Phi = 0$, где $\Phi = \Phi(r, \theta, \varphi)$ – гармоническая функция. Продолжим исследование класса движений (8), (9) и возьмем простейший случай $\Phi = ar \cos\theta \equiv az$, $a \equiv \text{const}$:

$$F_r^{(L)} = a\cos\theta \text{ , } F_\theta^{(L)} = -a\sin\theta \text{ .}$$

Проинтегрировав уравнение (11), находим давление

$$p = p_0 + \Pi(\zeta) + \rho a z > 0 \text{ .}$$

Далее с помощью формул (10) получаем

$$v_\varphi^2 = (\zeta/\rho)(d\Pi/d\zeta) \geq 0 \text{ .}$$

Приведем пример течения внутри непротекаемой сферы радиуса r_w:

$$\Pi(\zeta) = p_1^2 \exp\left[-p_2^2 (r_w - \zeta)^2\right],$$

$$v_\varphi^2 = \frac{2p_1^2 p_2^2}{\rho} \zeta (r_w - \zeta) \exp\left[-p_2^2 (r_w - \zeta)^2\right] ;\ p_1, p_2 - \text{const};$$

$$0 \leq r \leq r_w < \infty,\ \theta \in [0, \pi],\ 0 \leq \zeta \leq r_w.$$

В центре $r = 0$, вдоль полярных радиусов и на линии экватора жидкость неподвижна. Здесь так же, как в соленоидальном случае, линии равных скоростей не являются изобарами.

Меридианное течение

Движение вида

$$v_r \equiv 0 \text{ , } v_\theta = v_\theta(r, \theta) \text{ , } v_\varphi \equiv 0 \text{ ;}$$

$$F_r = F_r(r, \theta) \text{ , } F_\theta = F_\theta(r, \theta) \text{ , } F_\varphi \equiv 0$$

определяется, согласно (1) – (4), соотношениями

$$v_\theta = m(r)/\sin\theta\,, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{v_\theta^2}{r} + F_r\,,\ \ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} = rF_\theta - v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\,,$$

где $m = m(r)$ – произвольная функция. Отсюда получаем

$$\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}\left[\frac{d\left(m^2\right)}{dr} + \frac{2m^2}{r}\right] = \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta)\,. \tag{20}$$

Для потенциальных сил правая часть этого выражения равна нулю. Обсудим отдельные примеры потенциального, соленоидального и лапласова силовых полей.

Сначала рассмотрим безвихревое течение, взяв $m = m_1/r$:

$$v_\theta = m_1/(r\sin\theta)\,, \tag{21}$$

где m_1 – произвольная постоянная. Потенциальное силовое поле:

$$F_r^{(P)} = a\sin\theta\,,\ F_\theta^{(P)} = a\cos\theta\,,\ a \equiv \text{const}\,;$$

$$(p - p_0)/\rho = ar\sin\theta - \left[m_1^2\Big/\left(2r^2\sin^2\theta\right)\right]. \tag{22}$$

Лапласово силовое поле:

$$F_r^{(L)} = \left(a - \frac{2b}{r^3}\right)\cos\theta\,,\ F_\theta^{(L)} = -\left(a + \frac{b}{r^3}\right)\sin\theta\,;\ a,\ b - \text{const;}$$

$$\frac{(p - p_0)}{\rho} = \left(ar + \frac{b}{r^2}\right)\cos\theta - \frac{m_1^2}{2r^2\sin^2\theta}\,. \tag{23}$$

Решения (21) – (23) имеют физически содержательное истолкование в следующих интервалах радиальной и угловой координат:

$$r \in \left[r_w^{(1)}, r_w^{(2)}\right], \theta \in [\theta_1, \theta_2]\,; \tag{24}$$

$$0 < r_w^{(1)} < r_w^{(2)} < \infty\,,\ 0 < \theta_1 < \pi/2\,, \theta_2 = \pi - \theta_3\,, 0 < \theta_3 \le \pi/2\,.$$

Течение происходит в области, ограниченной двумя концентрическими сферами и двумя конусами с углами θ_1 и θ_3 между их образующими и общей осью. Обе сферы непротекаемые, имеют радиусы $r_w^{(1)}$ и $r_w^{(2)}$. Расположение конусов такое же, как при интерпретации решения (13), (16) – (18), но есть отличия: вершины конусов находятся в центре внутренней сферы, и жидкость перетекает из одного конуса в другой сквозь их проницаемые стенки. Например, при $m_1>0$ жидкость поступает внутрь сферического слоя через стенку верхнего конуса (его ось – луч $\theta = 0$); жидкость уходит из области (24) через стенку нижнего конуса (его ось – луч $\theta = \pi$). Заслуживает внимания частный случай с углами $\theta_2 = \theta_3 = \pi/2$, когда нижний конус вырождается в плоскость и жидкость удаляется из сферического слоя через круговое кольцо, расположенное в экваториальной плоскости. Отметим еще, что при $a = 0$ лапласов вариант (23) можно применять при $r \ge r_w^{(1)} > 0$. Для решения (23), в отличие от потенциального варианта (22), линии равных скоростей не являются изобарами. Такой же результат мы наблюдали для широтных течений (8), (9). Вместе с тем имеется существенное различие в структурах поля скоростей для широтного (15) и меридианного (21) течений под действием потенциальных сил: линиями равных скоростей являются соответственно $\zeta \equiv r\sin\theta = \text{const}$ и $z \equiv r\cos\theta \equiv \text{const}$.

Рассмотрим пример вихревого меридианного течения под действием соленоидальной силы, радиальная компонента которой зависит только от координаты ζ:

$$F_r^{(S)} = -\frac{b_1}{2(r\sin\theta)^2}\,,\ F_\theta^{(S)} \equiv 0\,,\ F_\varphi^{(S)} \equiv 0\,. \tag{25}$$

Здесь b_1 – произвольная постоянная; допускается значение $b_1 = 0$. Из (20) находим

$$m^2(r) = \frac{b_1}{r} + \frac{m_1^2}{r^2}\,; \tag{26}$$

постоянная m_1^2 тоже произвольная, нужно только обеспечить условие $m^2(r)>0$.

Согласно (19), скорость и давление имеют вид

$$v_\theta = \left[m^2(r)\right]^{1/2} \Big/ \sin\theta\,, \tag{27}$$

$$(p - p_0)/\rho = -m^2(r)\Big/\left(2\sin^2\theta\right). \tag{28}$$

Физическая модель течения такая же, как для решений (21) – (23): жидкость движется в области (24) и перетекает из верхнего конуса в нижний. Возможен случай протекания жидкости через систему «конус – круговое кольцо», а также допускается область решения $r \ge r_w^{(1)} > 0$.

Соленоидальный вариант (25) – (28) интересен тем, что для него линии равных скоростей так же, как и для рассмотренных выше потенциальных полей, являются изобарами. Причина в том, что здесь отсутствует меридианная компонента массовой силы. Именно эта компонента оказывает основное влияние на поведение изотах и изобар. Если взять соленоидальную силу, которая, в дополнение к (25), имеет компоненту $F_\theta^{(S)} = -b_2/(r\sin\theta)$, $b_2 \equiv \text{const}$, то выражения (26), (27) останутся без изменений, а в правой части формулы (28) для давления появится слагаемое

$$(b_2/2)\ln\left[(1+\cos\theta)/(1-\sin\theta)\right].$$

Тогда даже при $b_1 = 0$, $F_r^{(S)} \equiv 0$ получаем, как и для рассмотренных выше соленоидальных полей, что линии равных скоростей не являются изобарами.

Заключение

Построены невязкие стационарные сферические течения, генерируемые пространственно-неоднородными массовыми силами. Дан пример (5) точного решения задачи протекания жидкости через ядро сферического слоя; приведены примеры степенной и экспоненциальной зависимостей скорости протекания от температуры поверхности ядра. Рассмотрены широтные и меридианные течения, происходящие в потенциальном, соленоидальном и лапласовом силовых полях. Приведены примеры, демонстрирующие условия, при которых линии равных скоростей являются/не являются изобарами. Показано, что меридианная компонента массовой силы – основной фактор влияния на поведение этих линий. Физическими моделями представленных решений служат: течение вида (15) внутри непротекаемой сферы; течение вида (17) в части пространства, внешней по отношению к двум непротекаемым конусам; меридианное протекание (21) и (27) через сферический слой, ограниченный проницаемыми конусами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольдштик М.А.*, *Штерн В.Н.*, *Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука, 1989. 336 с.
2. *Грынь В.И.* О семействах точных решений стационарных уравнений Эйлера и Навье – Стокса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38. № 8. С. 1421–1422.
3. *Шмыглевский Ю.Д.* Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
4. *Иванов М.И.* Тангенциальные колебания дифференциально вращающегося сферического слоя жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 2. С. 146–154.
5. *Шабловский О.Н.* Сферическое течение вязкой жидкости с источниками импульса и энергии // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем. Вып. 15. М.: Янус-К, 2013. С. 219–235.
6. *Мануйлович С.В.* Продольно-периодическое течение вязкой жидкости, порождаемые пристеночной объемной силой // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2015. № 4. С. 59–67.
7. *Юдович В.И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Математический сборник. 1964. Т. 64. № 4. С. 562–588.
8. *Кажихов А.В.* Замечание к постановке задачи протекания для уравнений идеальной жидкости // Прикладная математика и механика. 1980. Т. 44. № 5. С. 947–949.
9. *Коробков М.В.*, *Пилецкас К.*, *Пухначев В.В.*, *Руссо Р.* Задача протекания для уравнений Навье – Стокса // Успехи математических наук. 2014. Т. 69. Вып. 6. С. 115–176.
10. *Говорухин В.Н.* Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 6. С. 1133–1147.
11. *Пухначев В.В.* Трехмерная симметричная задача протекания для уравнений Навье – Стокса // Вестник Южно-Уральского гос. университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2015. Т. 8. № 2. С. 95–104.

Статья поступила 11.03.2019 г.

Shablovsky O.N. SPHERICAL FLOW OF AN IDEAL FLUID IN A SPATIALLY NONUNIFORM FIELD OF FORCE. (2020) *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics]. 64. pp. 146–155

DOI 10.17223/19988621/64/11

Keywords: spherical layer, flow problem, zonal and meridional flows; potential, solenoidal, and Laplace force fields.

Exact particular solutions to Euler equations are obtained for a steady spherical flow of an incompressible inviscid fluid. The effect of the structure of the force field spatial nonuniformity on hydrodynamic parameters of the flow is studied. An exact solution to a flux problem is obtained. In this problem, the fluid flows in a spherical layer of finite thickness whose external boundary is impermeable. In the northern part of the layer, the fluid flows out of the core; in the southern part, into the core. There is no flowing at the equator. The peculiarities of the pressure gradient on the layer boundaries are discussed in detail. The intensity of mass force sources is calculated. Both exponential and power-law dependences of the flow velocity on the core surface temperature are proposed. The zonal and meridional flows occurring in potential, solenoidal, and Laplace force fields are considered. Examples of the conditions under which the velocity contours are or are not isobars are given. The behavior of these lines is shown to be mainly affected by a meridional component of the mass force. Physical models corresponding to the given solutions are presented. An example of the zonal flow inside an impermeable sphere is indicated. A zonal flow is considered in the external space of two impermeable cones. Arrangement of the cones has

a sandglass-like shape. They have a common axis, a common vertex, and opposite bases. In a partial case, the impermeable boundaries are represented as a cone and an equatorial plane. The same arrangement of the cones is used for a hydrodynamic interpretation of the meridional flow, where the vertices of the cones are located in the center of the internal sphere, and the fluid flows out of the upper cone into the lower one through their permeable walls. The flow region is radially confined by external and internal impermeable spheres. In a specific case, the lower cone degenerates into a plane, and the fluid outflows from the spherical layer through a round ring located in the equatorial plane.

Oleg N. SHABLOVSKY (Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel, Republic of Belarus). E-mail: shablovsky-on@yandex.ru

REFERENCES

1. Goldshtik M.A., Shtern V.N., Yavorskiy N.I. (1989) *Vyazkie techeniya s paradoksalnymi svoystvami* [Viscous flows with paradoxical properties]. Novosibirsk: Nauka.
2. Gryn' V.I. (1998) O semeystvakh tochnykh resheniy statsionarnykh uravneniy Eylera i Nav'e-Stoksa [On families of exact solutions to the steady-state Euler and Navier-Stokes equations]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki – Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 38. pp. 1421–1422.
3. Shmyglevskiy Yu.D. (1999) *Analiticheskie issledovaniya dinamiki gaza i zhidkosti* [Analytical studies of gas and fluid dynamics]. Moscow: Editorial URSS.
4. Ivanov M.I. (2009) Tangentsial'nye kolebaniya differentsialno vrashchayushchegosya sfericheskogo sloya zhidkosti [Tangential vibrations of a differentially rotating spherical layer of a fluid]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Fluid and Gas Mechanics*. 2. pp. 146–154.
5. Shablovsky O.N. (2013) Sfericheskoe techenie vyazkoy zhidkosti s istochnikami impul'sa i energii [A spherical flow of a viscous fluid with momentum and energy sources]. *Fundamental'nye fiziko-matematicheskie problemy i modelirovanie tekhniko-tekhnologicheskikh sistem*. 15. pp. 219–235.
6. Manuylovich S.V. (2015) Prodol'no-periodicheskie techeniya vyazkoy zhidkosti, porozhdaemye pristenochnoy ob''emnoy siloy [Longitudinally periodic flow of a viscous fluid generated by near-wall volume force]. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza – Fluid Dynamics*. 4. pp. 59–67.
7. Yudovich V.I. (1964) Dvumernaya nestatsionarnaya zadacha o protekanii ideal'noy neszhimaemoy zhidkosti cherez zadannuyu oblast' [Two-dimensional unsteady problem of an ideal incompressible fluid flow through a given region]. *Matematicheskiy sbornik – Sbornik*: *Mathematics*. 64. pp. 562–588.
8. Kazhikhov A.V. (1980) Zamechanie k postanovke zadachi protekaniya dlya uravneniy ideal'noy zhidkosti [A remark on the flux problem formulation in equations for an ideal fluid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 44. pp. 947–949.
9. Korobkov M.V., Piletskas K., Pukhnachev V.V., Russo R. (2014) The flux problem for the Navier–Stokes equations. *Russian Mathematical Surveys*. 69(6). pp. 1065–1122. DOI: 10.4213/rm9616.
10. Govorukhin V.N. (2011) A vortex method for computing two-dimensional inviscid incompressible flows. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 51(6). pp. 1061–1073.
11. Pukhnachev V.V. (2015) Trekhmernaya simmetrichnaya zadacha protekaniya dlya uravneniy Nav'e-Stoksa [Three-dimensional flux problem for the Navier-Stokes equations]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie»*. 8(2). pp. 95–104. DOI: 10.14529/mmp150208.

Received: March 11, 2019