В. Ю. Златина
(ГГТУ имени П. О. Сухого, Гомель)
Науч. рук. **В. Ю. Гавриш,** канд. физ.-мат. наук, ст. преподаватель

РАССЕЯНИЕ НА КУЛОНОВСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Введение. Известно, что задачи рассеяния в квантовой механике сводятся к решению нетривиальных дифференциальных или интегральных уравнений. Решение таких математических задач достаточно трудны, поэтому используются различные приближения и аппроксимации для получения выражений наблюдаемых величин.

В работе изложена процедура получения дифференциального сечения в борновском приближении для случая сферически-симметричного потенциала [1]. Как результат работы будет получена формула Резерфорда.

Борновское приближение. Известно, что задача рассеяния с оператором взаимодействия может быть сведена к решению интегрального уравнения

$$\psi(\vec{r}) = \mathrm{e}^{i\vec{k}_0\vec{r}} - \int \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{\mathrm{e}^{i|\vec{k}||\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d\vec{r}', \qquad (1)$$

где $\hat{V} = V(\vec{r})$ – оператор взаимодействия и $|\vec{k}| = \sqrt{2mE_0/\hbar^2}$. Уравнение (1) даже в простейших случаях потенциала решается достаточно трудно, поэтому часто применяется метод итерационных приближений или Борновское приближение. В нулевом приближении волновая функция (1) совпадает решением уравнения Шредингера без взаимодействия

$$\hat{H}_0 \ \psi^0_{\vec{k}}(\vec{r}) = E \ \psi^0_{\vec{k}}(\vec{r}), \qquad \hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta. \qquad (2)$$

Определим выражение для волновой функции в первом приближении. Для этого используем предположение, что $\vec{r} >> \vec{r}'$: в таком случае разложение в ряд Тейлора приводит к

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r}^{\,2} - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' + \vec{r}'^{\,2})} \simeq |\vec{r}| - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\cdot\vec{r}' \qquad (3)$$

или

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}=\frac{1}{|\vec{r}|}\frac{1}{|1-\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{\vec{r}^2}|}\simeq\frac{1}{|\vec{r}|}\left(1+\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{\vec{r}^2}\right). \tag{4}$$

Используя выражение (1) и приближение $\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{\vec{r}^2}\approx 0$ для рассеянной волновой функции получаем

$$\psi(\vec{r})=\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}-\int\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{i|\vec{k}||\vec{r}|}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}}{\vec{r}}V(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d\vec{r}'. \tag{5}$$

Сравнивая с выражением асимптотически расходящейся волны [2]

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r})=\mathrm{e}^{i\vec{k}_0\vec{r}}+f\left(\vec{k}',\vec{k}\right)\frac{\mathrm{e}^{i\vec{k}\vec{r}}}{\vec{r}} \tag{6}$$

получаем, что амплитуда рассеяние определяется как

$$f\left(\vec{k}',\vec{k}\right)=-\int\frac{m}{2\pi\hbar^2}e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}'}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}V(\vec{r}')d\vec{r}'. \tag{7}$$

Полученные выражения используем в физических приложениях.

Упругое рассеяние на кулоновском потенциале. Определим выражение для дифференциального сечения на сферически-симметричном потенциале [3]

$$V(|\vec{r}|)=Z_1Z_2\frac{e^2}{|\vec{r}|}, \tag{8}$$

где Z_1, Z_2 – заряды мишени и налетающей частицы [3]. В случае упругого рассеяния, когда импульсы начальной и конечной частиц равны $|\vec{k}_0|=|\vec{k}|$, получаем

$$|\vec{k}_0-\vec{k}|=\sqrt{k_0^2+k^2-2|\vec{k}_0||\vec{k}|\cos\theta}=2|\vec{k}|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{9}$$

Проводя интегрирование по телесному углу выражения (7)

$$\int e^{i|\vec{k}_0-\vec{k}|\cdot\vec{r}'}V(\vec{r}')d\vec{r}' = \int_0^\infty r'^2 V(r')dr' \int_0^\pi e^{i|\vec{k}_0-\vec{k}|r'\cos\theta'} \sin\theta' d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' =$$

$$= \frac{4\pi}{|\vec{k}_0-\vec{k}|}\int_0^\infty r'\ V(r')\sin\left(|\vec{k}_0-\vec{k}|r'\right)dr' \qquad (10)$$

с последующей подстановкой выражения (10) в (8) приводит к

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|f\left(\vec{k}',\vec{k}\right)\right|^2 = \frac{4Z_1^2Z_2^2m^2}{\hbar^4|\vec{k}_0-\vec{k}|^2}\left|\int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}_0-\vec{k}|r'\right)dr'\right|^2. \qquad (11)$$

Для вычисления интеграла выражения (11) воспользуемся следующим приемом:

$$\int_0^\infty \sin\left(|\vec{k}_0-\vec{k}|r'\right)dr' \Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda r'}\sin\left(|\vec{k}_0-\vec{k}|r'\right)dr'. \qquad (12)$$

Используя комплексное представление тригонометрических функций

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2},\ \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i} \qquad (13)$$

получаем следующий искомый интеграл:

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda r'}\frac{e^{i|\vec{k}_0-\vec{k}|r'}-e^{-i|\vec{k}_0-\vec{k}|r'}}{2i}dr'. \qquad (14)$$

После некоторых преобразований из выражения (14) получаем

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda r'}\frac{e^{i|\vec{k}_0-\vec{k}|r'}-e^{-i|\vec{k}_0-\vec{k}|r'}}{2i}dr' = \frac{1}{2i}\lim_{\lambda\to 0}\left(\int_0^\infty e^{-(\lambda-i|\vec{k}_0-\vec{k}|)r'}dr' - \int_0^\infty e^{-(\lambda+i|\vec{k}_0-\vec{k}|)r'}dr'\right) =$$

$$\frac{1}{2i}\lim_{\lambda\to 0}\left(\frac{1}{\lambda-i|\vec{k}_0-\vec{k}|}-\frac{1}{\lambda+i|\vec{k}_0-\vec{k}|}\right) = \frac{1}{|\vec{k}_0-\vec{k}|}. \qquad (15)$$

Подстановка выражения (15) в (11) приводит к окончательному результату

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4Z_1^2Z_2^2}{\hbar^4\,|\vec{k}_0-\vec{k}\,|^4} \qquad (16)$$

или с использованием (9)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{4Z_1^2Z_2^2}{16E^2}\sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad (17)$$

где было использовано определение $E=\hbar^2k_0^2/2m$. Полученное выражение называют формулой Резерфорда [3].

Заключение. В ходе работы было получено выражение для рассеянной волны в борновском приближении. Полученное выражение использовано для вычисления дифференциального сечения для сферически-симметричного потенциала. Как результат работы получена известная формула Резерфорда.

Литература

1. Давыдов, А. С. Квантовая механика: учебное пособие / С. А. Давыдов. – Спб.: БХВ-Петербург, 2011. – 704 с.
2. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Курс теоретической физики в 10 томах. Т.3. Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2008. – 800 с.
3. Блохинцев, Д. И. Основы квантовой механики: учебное пособие / Д. И. Блохинцев. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

А. В. Ивашкевич
(Институт физики НАН Беларуси, Минск)
Науч. рук. **В. М. Редьков**, д-р физ.-мат. наук

СТРУКТУРА ПЛОСКИХ ВОЛН ДЛЯ БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2, КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ

После работ Паули–Фирца [1] и Рариты–Швингера [2] в физической литературе всегда присутствовал интерес к теории частиц с высшими спинами, в том числе и к частице со спином 3/2 [3]. Для