УДК 539.375

Василевич Ю.В.[1], Остриков О.М.[2]

ВЫПОЛНЕНИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С НЕТОНКИМ ОСТАТОЧНЫМ КЛИНОВИДНЫМ ДВОЙНИКОМ В СЛУЧАЕ ПЛОСКОДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

1. Белорусский национальный технический университет

Минск, Беларусь

2. Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого

Гомель, Беларусь

Проведена проверка выполнения условия равновесия твердого тела с механическим остаточным двойником в случае плоскодеформированного состояния и непрерывного распределения двойникующих дислокаций на двойниковых границах. Установлено выполнение этого условия. Результат объясняется тем, что в рамках приближений теории упругости каждая двойникующая дислокация создает равновесное поле напряжений.

Введение. Механическое двойникование является одним из основных каналов пластической деформации твердых дел. В настоящее время накоплены обширные результаты по экспериментальному исследованию данного явления [1–3]. Ведется развитие теории двойникования [4, 5].

Особый интерес представляет рассмотрение деформационного двойникования с позиций механики деформированного твердого тела. Это открывает перспективы в решении прикладных задач по прогнозированию зарождения разрушения в двойникующихся материалах, что позволит повысить точность прогнозирования ресурса данного класса материалов.

Целью данной работы стала проверка выполнения условия равновесия твердого тела с остаточным клиновидным двойником в случае плоскодеформированного состояния.

Постановка задачи. Для плоского деформированного состояния твердого тела при отсутствии объемных сил справедливы условия [6]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0 . \end{cases} \qquad (1)$$

Напряжения клиновидного двойника в рамках теории упругости могут быть определены с использованием принципа суперпозиции [4]

$$\sigma_{ij}(x,y)=\sigma_{ij}^{(1)}(x,y)+\sigma_{ij}^{(2)}(x,y). \qquad (2)$$

Здесь $\sigma_{ij}^{(1)}(x,y)$ и $\sigma_{ij}^{(2)}(x,y)$ – напряжения, создаваемые соответственно первой и второй границей двойника; $\sigma_{ij}(x,y)$ – результирующие напряжения; i и j принимают значения x или y.

Согласно разработанному в [4, 5] методу расчета напряжений у нетонкого клиновидного двойника, в (2) будем иметь

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x,y)=\int_0^L\sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\,\rho_1(x_0)\sigma_{ij}^{(1,0)}(x,y,x_0)dx_0\,; \qquad (3)$$

$$\sigma_{ij}^{(2)}(x,y)=\int_0^L\sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\,\rho_2(x_0)\sigma_{ij}^{(2,0)}(x,y,x_0)dx_0\,, \qquad (4)$$

где $f_1(x_0)$ и $f_2(x_0)$ – функции, описывающие форму границ двойника; $\rho_1(x_0)$ и $\rho_2(x_0)$ – плотности двойникующих дислокаций на двойниковых границах; L – длина двойника; x_0 – параметр интегрирования.

В (3) и (4), как и в [4],

$$\sigma_{xx}^{(1,0)}(x,y,x_0)=-\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(y-f_1(x_0))[3(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(1,0)}(x,y,x_0)=\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(y-f_1(x_0))[(x-x_0)^2-(y-f_1(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2}, \qquad (5)$$

$$\sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,x_0)=\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(x-x_0)[(x-x_0)^2-(y-f_1(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2};$$

$$\sigma_{xx}^{(2,0)}(x,y,x_0)=-\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(y-f_2(x_0))[3(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2},$$

$$\sigma_{yy}^{(2,0)}(x,y,x_0)=\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(y-f_2(x_0))[(x-x_0)^2-(y-f_2(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2}, \qquad (6)$$

$$\sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,x_0)=\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\frac{(x-x_0)[(x-x_0)^2-(y-f_2(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2},$$

где $b_{\text{кр}}$ – модуль краевой составляющей вектора Бюргерса двойникующей дислокации; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

Подставляя (2) в (1), получим

$$\begin{cases}\dfrac{\partial(\sigma_{xx}^{(1)}+\sigma_{xx}^{(2)})}{\partial x}+\dfrac{\partial(\sigma_{xy}^{(1)}+\sigma_{xy}^{(2)})}{\partial y}=0\\ \dfrac{\partial\partial(\sigma_{xy}^{(1)}+\sigma_{xy}^{(2)})}{\partial x}+\dfrac{\partial\partial(\sigma_{yy}^{(1)}+\sigma_{yy}^{(2)})}{\partial y}=0.\end{cases} \tag{7}$$

При этом принято, что размеры двойника пренебрежимо малы по сравнению с геометрическими размерами твердого тела, что дает основание полагать, что границы тела находятся на бесконечности от рассматриваемого двойника.

Проверка выполнения условия равновесия. Подстановка (3), (4) в (7) дает

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\sigma_{xx}^{(1,0)}(x,y,x_0)dx_0+\dfrac{\partial}{\partial x}\int_0^L\sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\sigma_{xx}^{(2,0)}(x,y,x_0)dx_0+\\ +\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,x_0)dx_0+\dfrac{\partial}{\partial y}\int_0^L\sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,x_0)dx_0=0\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,x_0)dx_0+\dfrac{\partial}{\partial x}\int_0^L\sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,x_0)dx_0+\\ +\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\sigma_{yy}^{(1,0)}(x,y,x_0)dx_0+\dfrac{\partial}{\partial y}\int_0^L\sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\sigma_{yy}^{(2,0)}(x,y,x_0)dx_0=0.\end{cases} \tag{8}$$

По правилу дифференцирования определенного интеграла по параметру [7] из (8) получим

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\frac{\partial\sigma_{xx}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}dx_0+\int_0^L\sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\frac{\partial\sigma_{xx}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}dx_0+\\ +\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}dx_0+\int_0^L\sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\frac{\partial\sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}dx_0=0\\ \displaystyle\int_0^L\sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}dx_0+\int_0^L\sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\frac{\partial\sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}dx_0+\\ +\displaystyle\int_0^L\sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\frac{\partial\sigma_{yy}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}dx_0+\int_0^L\sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\frac{\partial\sigma_{yy}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}dx_0=0.\end{cases} \tag{9}$$

Или в более компактной форме:

$$\begin{cases} \int\limits_0^L \sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\left[\dfrac{\partial\sigma_{xx}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}\right]dx_0 + \\ +\int\limits_0^L \sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\left[\dfrac{\partial\sigma_{xx}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}\right]dx_0 = 0 \\ \\ \int\limits_0^L \sqrt{1+(f_1'(x_0))^2}\rho_1(x_0)\left[\dfrac{\partial\sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yy}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}\right]dx_0 + \\ +\int\limits_0^L \sqrt{1+(f_2'(x_0))^2}\rho_2(x_0)\left[\dfrac{\partial\sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yy}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}\right]dx_0 = 0\,. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь частные производные от компонент тензора напряжений находятся из соотношений:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(1,0)}}{\partial x} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{3(x-x_0)(y-f_1(x_0))}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{2(x-x_0)(y-f_1(x_0))[3(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^3}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(2,0)}}{\partial x} = -\frac{\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{3(x-x_0)(y-f_2(x_0))}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{2(x-x_0)(y-f_2(x_0))[3(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^3}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1,0)}}{\partial x} = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{3(x-x_0)^2-(y-f_1(x_0))^2}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{4(x-x_0)^2[(x-x_0)^2-(y-f_1(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^3}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(2,0)}}{\partial x} = \frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{3(x-x_0)^2-(y-f_2(x_0))^2}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2} - \right.$$
$$\left. -\frac{4(x-x_0)^2[(x-x_0)^2-(y-f_2(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^3}\right], \tag{11}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1,0)}}{\partial y}=-\frac{\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-x_0)(y-f_1(x_0))}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(x-x_0)(y-f_1(x_0))[(x-x_0)^2-(y-f_1(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^3}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(2,0)}}{\partial y}=-\frac{\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-x_0)(y-f_2(x_0))}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2(x-x_0)(y-f_2(x_0))[(x-x_0)^2-(y-f_2(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^3}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{yy}^{(1,0)}}{\partial y}=\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-x_0)^2-3(y-f_1(x_0))^2}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{4(y-f_1(x_0))^2[(x-x_0)^2-(y-f_1(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^3}\right],$$

$$\frac{\partial\sigma_{yy}^{(2,0)}}{\partial y}=\frac{\mu b_{\text{кр}}}{2\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-x_0)^2-3(y-f_2(x_0))^2}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{4(y-f_2(x_0))^2[(x-x_0)^2-(y-f_2(x_0))^2]}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^3}\right].$$

Имеющие место в (10) суммы частных производных находятся по формулам:

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}=$$

$$=\frac{4\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-x_0)(y-f_1(x_0))}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2}-\frac{(x-x_0)(y-f_1(x_0))}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{xx}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}= \tag{12}$$

$$=\frac{4\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-x_0)(y-f_2(x_0))}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2}-\frac{(x-x_0)(y-f_2(x_0))}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}^{(1,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}=$$

$$=\frac{2\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-x_0)^2-(y-f_1(x_0))^2}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2}-\frac{(x-x_0)^2-(y-f_1(x_0))^2}{[(x-x_0)^2+(y-f_1(x_0))^2]^2}\right]=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}^{(2,0)}(x,y,x_0)}{\partial y}=$$

$$=\frac{2\mu b_{\text{кр}}}{\pi(1-\nu)}\left[\frac{(x-x_0)^2-(y-f_2(x_0))^2}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2}-\frac{(x-x_0)^2-(y-f_2(x_0))^2}{[(x-x_0)^2+(y-f_2(x_0))^2]^2}\right]=0,$$

Подставляя (12) в (10), получаем тождество $0+0\equiv 0$. Это указывает на то, что внутренние напряжения, создаваемые двойником самоуравновешены.

Полученный результат можно объяснить на основании принципа суперпозиции и приближения теории упругости, использованного в приведенных выше расчетах. Каждая двойникующая дислокация создает уравновешенное в твердом теле поле напряжений. Суперпозиция таких напряжений от всех дислокаций двойника также даст равновесное поле напряжений, что и доказано полученным результатом расчетов.

При наличии внешних сил f_i (*i* принимает значения *x* или *y*) условие (1) примет вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}+f_x=0\\[2ex] \dfrac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+f_y=0.\end{cases}\tag{13}$$

Из (1), (11) – (13) следует, что при нахождении деформируемого твердого тела с двойником в равновесии силы f_i также будут самоуравновешенными.

Заключение. Таким образом, показано выполнение условия равновесия деформируемого и не деформируемого твердого тела с остаточным клиновидным двойником в случае плоскодеформированного состояния. Полученный результат объясняется в рамках теории упругости и принципа суперпозиции и связан с тем, что каждая двойникующая дислокация двойника создает равновесное поле напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Tellinen, J. Basic properties of magnetic shape memory actuators / J. Tellinen, I. Suorsa, A. Jääskeläinen, I. Aaltio, K. Ullakko // AdaptaMat Ltd., Helsinki. Published in 8th Int. Conf. “Actuator 2002”, Germany. – 2002. – P. 4.
2. Chernenko, V.A. Giant two-way shape memory effect in high-tenperature Ni-Mn-Ga single crystal / V.A. Chernenko, E. Villa, S. Besseghini, J.M. Barandiaran // 3rd Int. Symposium on Shape Mem. Mat. Smart Systems. – 2010. – P. 94–98.
3. Классен-Неклюдова, М.В. Механическое двойникование кристаллов / М.В. Классен-Неклюдова // Москва: АН СССР. – 1960. – С. 262.
4. Остриков, О. М. Напряженное состояние у поверхности кристалла, деформируемой сосредоточенной нагрузкой, при наличии клиновидного двойника / О. М. Остриков // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, № 5. – С. 137–139.
5. Остриков, О. М. Метод расчета распределения деформаций у клиновидного двойника с использованием подходов макроскопической дислокационной модели / О. М. Остриков // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 4. – С. 52–58.

6. Астафьев, В. И. Нелинейная механика разрушения / В. И. Астафьев, Ю. Н. Радаев, Л. В. Степанова // Самара: Изд-во «Самарский университет». – 2001. – 562 с.
7. Корн, Г. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн // М.: Наука. – 1973. – 832 с.

Поступила 07.04.2020

УДК 658.512

Колесников Л.А.

ВЛИЯНИЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПРИЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ НА ЖЕСТКОСТЬ И ДОЛГОВЕЧНОСТЬ НАПРАВЛЯЮЩИХ КАЧЕНИЯ

Белорусский национальный технический университет,

Минск, Беларусь

Предложена методика оценки жесткости направляющих качения в зависимости от направления действия нагрузки на основе МКЭ-анализа. Проведен тестовый МКЭ-расчет роликовых направляющих качения фирмы Rexroth. Показано, что значения жесткости в каталогах производителя при боковой нагрузке существенно завышены и выявлены причины этого явления. Проведена оценка уровня снижения ресурса направляющих при направлении действия нагрузки, отличном от вертикального.

Введение. Важнейшие характеристики станка – точность и долговечность – в значительной степени определяются правильным выбором направляющих. В настоящее время это, как правило, направляющие качения. Жесткость и ресурс направляющих существенно (~1,5…1,7 раза) падают [1, 2] при отклонении направления действия нагрузки от номинального (сверху вниз). К сожалению, производители направляющих предоставляют значения жесткости, как правило, только в прямом (рабочем) направлении. Поэтому актуальна оценка фактической жесткости направляющих при произвольном направлении действия нагрузки.

Методики исследований. Для оценки характера изменения жесткости направляющих от направления действия нагрузки была разработана МКЭ-модель тестовой направляющей. В этом качестве использовалась направляющая Rexroth серии 1851 типоразмера 45 с роликовыми телами качения и натягом 0,08. Для этих направляющих производитель публикует значения жесткости, как в прямом, так и в боковом направлении. В соответствие с [1] жесткость направляющей принята равной: в вертикальном направлении – j_Y = 1833 Н/мкм; в горизонтальном – j_X = 1143 Н/мкм.

Твердотельная псевдоплоская МКЭ-модель тестовой направляющей качения включает в себя опорную рельсу, саму каретку и упругие тела (1…4), моделирующие тела качения (рис. 1, *а*). Тело каретки и рельса выполнены из стали ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа, μ = 0,3), а модуль Юнга упругих тел подбирался таким образом, чтобы эквивалентная жесткость модели направляющей в вертикальном направлении была равна заданной j_Y. Между упругими телами и дорожками тел качения задавалось условие контакта «Frictionless», верхние опорные площадки каретки жестко фиксировались, для торцевых поверхностей задан запрет на перемещение в нормальном направлении. Предварительный натяг 0,08 *C*, где *C* – динамическая грузоподъемность, *C* = 92300 Н, обеспечивался формированием термоупругих напряжений в упругих телах 1…4.

Основные результаты. Тестовая сила *F*, эквивалентная 17762 Н, принималась из условия $F < 2{,}5 \cdot 0{,}08\,C$ [2] и прикладывалась к нижней поверхности рельсы. Ее направле-