1. *Найти* $НОД(a,b)$, *используя алгоритм Евклида. Найти* $НОК(a,b)$, *используя соответствующую формулу:* $a = 2747,\ b = 3149$.

Решение:

Используя алгоритм Евклида для нахождения $НОД(2747,3149)$, действуем следующим образом. Сначала делим 3149 на 2747 с остатком и получаем:

$3149 = 2747 \cdot 1 + 402$;

далее делим 2747 на 402 с остатком:

$2747 = 402 \cdot 6 + 335$;

теперь делим 402 на 335 с остатком:

$402 = 335 \cdot 1 + 67$ и т.д.

$335 = 67 \cdot 5$

Итак, $НОД(2747,\ 3149)$ равен 67.

Далее воспользуемся формулой $НОД(a,b) \cdot НОК(a,b) = a \cdot b$:

$$НОК(a,b) = \frac{a \cdot b}{НОД(a,b)} = \frac{2747 \cdot 3149}{67} = 129109.$$

Ответ: $НОД(2747,\ 3149) = 67$, $НОК(2747,\ 3149) = 129109$.

2. *Решить Диофантово уравнение:* $210x + 275y = 60$.

Решение:

Найдем $НОД(210,275)$ (алгоритм Евклида):

$275 = 210 \cdot 1 + 65;$

$210 = 65 \cdot 3 + 15;$

$65 = 15 \cdot 4 + 5;$

$15 = 5 \cdot 3.$

$НОД(210,275) = 5.$

Разделим обе части уравнения на 5:

$42x + 55y = 12$.

Имеем:

$55 = 42 \cdot 1 + 13;$

$42 = 13 \cdot 3 + 3;$

$13 = 3 \cdot 4 + 1.$

Тогда (обратный ход алгоритма Евклида):

$1=13-3\cdot 4=13-4\cdot(42-13\cdot 3)=$

$=13\cdot 13-4\cdot 42=13\cdot(55-42)-4\cdot 42=$

$=-17\cdot 42+13\cdot 55.$

Получим:

$1=-17\cdot 42+13\cdot 55$;

$12=(-17\cdot 12)\cdot 42+(13\cdot 12)\cdot 55$.

Частное решение:

$$\begin{cases} x_0=-17\cdot 12=-204 \\ y_0=13\cdot 12=156. \end{cases}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} x=x_0+bt \\ y=y_0-at \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-204+55t \\ y=156-42t \end{cases},\ t\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\begin{cases} x=-204+55t \\ y=156-42t \end{cases},\ t\in\mathbb{Z}.$

3. *Решить сравнение:* $104x\equiv 52(\mathrm{mod}\ 78)$.

Решение:

$104x\equiv 52(\mathrm{mod}\ 78)\Leftrightarrow 52x\equiv 26(\mathrm{mod}\,39)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 13x\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$

$НОД(13,3)=1$ следовательно, сравнение имеет решение.

Рассмотрим уравнение в целых числах $13x+3y=2$. Частное решение имеет вид $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=5 \end{cases}$. Тогда $x=x_0+mt,\ t\in\mathbb{Z}$, или $x=-1+3t,\ t\in\mathbb{Z}$, или $x=\overline{2}$ в множестве $\mathbb{Z}_3$.

Ответ: $x=-1+3t,\ t\in\mathbb{Z}$ (или $x=\overline{2}$ в множестве $\mathbb{Z}_3$).

4. *Решить систему сравнений:*

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 6 \pmod 3 \end{cases}.$$

Решение:

Числа 5, 7, 3 попарно взаимно простые числа. Следовательно: находим M_j:

$$M_1 = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1} = 7 \cdot 3 = 21;$$

$$M_2 = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_2} = 5 \cdot 3 = 15$$

$$M_3 = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_3} = 5 \cdot 7 = 35$$

Решим сравнение $M_i z_i \equiv a_i (\bmod m_i),\ i = \overline{1,3}$:

$i = 1$:

$21 z_1 \equiv 2 (\bmod 5)$;

$21 z_1 - 20 z_1 \equiv 2 (\bmod 5)$;

$z_1 \equiv 2 (\bmod 5)$.

$i = 2$:

$15 z_2 \equiv 5 (\bmod 7)$;

$15 z_2 - 14 z_2 \equiv 5 (\bmod 7)$;

$z_2 \equiv 5 (\bmod 7)$.

$i = 3$:

$35 z_3 \equiv 6 (\bmod 3)$;

$35 z_3 - 36 z_3 \equiv 6 (\bmod 3)$;

$-z_1 \equiv 6 (\bmod 3)$;

$z_1 \equiv -6 (\bmod 3)$;

$z_1 \equiv 0 (\bmod 3)$.

Таким образом, решение системы сравнений будет иметь вид:

$$x \equiv \left(\sum_{i=1}^{3} M_i z_i \right) \ (\bmod (m_1 m_2 m_3));$$

$$x \equiv (21 \cdot 2 + 15 \cdot 5 + 35 \cdot 0) \ (\bmod (105));$$

$$x \equiv 117 \ (\bmod (105));$$

$x \equiv 12 \pmod{105}$.

Ответ: $x \equiv 12 \pmod{105}$ (или $x = \overline{12}$ в множестве $\mathbb{Z}_{105}$)

5. *Решить систему сравнений:*

$$\begin{cases} x \equiv -2 \pmod{14} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 6 \pmod{20} \end{cases}.$$

Решение:

Проверим, совместна ли система:

$НОД(14,7) = 7$ делит $-2-5=-7$;

$НОД(14,20) = 2$ делит $-2-6=-8$;

$НОД(7,20) = 1$ делит $5-6=-1$.

Следовательно, система сравнений имеет единственное решение в множестве $\mathbb{Z}_M$, где $M = НОК(14,7,20) = 140$.

Рассмотрим первое сравнение в системе:

$x \equiv -2 \pmod{14}$. Следовательно $x = -2 + 14t$. Подставим во второе сравнение:

$-2 + 14t \equiv 5 \pmod{7}$;

$14t \equiv 7 \pmod{7}$;

$2t \equiv 1 \pmod{1}$;

$2t - t \equiv 1 \pmod{1}$;

$t \equiv 1 \pmod{1}$.

Следовательно, $t = k+1$, $x = -2 + 14t = -2 + 14(k+1) = 14k + 12$. Подставим в третье сравнение:

$14k + 12 \equiv 6 \pmod{20}$;

$14k \equiv -6 \pmod{20}$;

$7k \equiv -3 \pmod{10}$;

$7k - 10k \equiv -3 \pmod{10}$;

$-3k \equiv -3 \pmod{10}$;

$k \equiv 1 \pmod{10}$.

Следовательно, $k = 10u + 1$, $x = 14k + 12 = 14(10u+1) + 12 = 140u + 26$.

Таким образом, $x \equiv 26 \pmod{140}$ или $x = \overline{26}$ в множестве $\mathbb{Z}_{140}$.

Ответ: $x \equiv 26(\mathrm{mod}140)$ (или $x = \overline{26}$ в множестве $\mathbb{Z}_{140}$).

6. *В группе S_8 перестановки τ и π разложите в произведение независимых циклов и найдите $\tau^{-1}\pi$:*

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix},\ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Разложим перестановку τ в произведение независимых циклов:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\tau = (18253)(46)(7) = (18253)(46).$$

Разложим перестановку π в произведение независимых циклов:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\pi = (1452)(3)(6)(78) = (1452)(78).$$

Найдем τ^{-1}:

$$\tau^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 6 & 3 & 4 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\tau^{-1}\pi$:

$$\tau^{-1}\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 8 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Имея разложение в произведение независимых циклов перестановок τ и π, можно поступить следующим образом:

$$\tau = (18253)(46),\ \pi = (1452)(78).$$

$$\tau^{-1} = (35281)(46);$$

$$\tau^{-1}\pi = (35281)(46)(1452)(78) =$$

$$= (16423587).$$

Ответ: $\tau = (18253)(46), \pi = (1452)(78), \tau^{-1}\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 8 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} = (16423587).$