

УДК 232.4

ЭВОЛЮЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ФОРМИРОВАНИЕ СКЛАДОК НА ЛИНИИ РОСТА ДЕНДРИТА В ПЕРЕОХЛАЖДЕННОМ РАСПЛАВЕ

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ, Д. Г. КРОЛЬ, И. А. КОНЦЕВОЙ

Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Республика Беларусь

Дано аналитическое описание возбужденного состояния стационарного контура свободного дендрита на конечном удалении от его вершины. Построены два варианта точечного возмущения линии роста: монотонный (экспоненциальный по координате) и немонотонный (имеющий вид уединенной волны). Обнаружено, что при переходе от острой к квазиплоской вершине дендрита относительная величина возмущения возрастает. Рассмотрен случай, когда линия роста имеет морфологическую особенность типа складки, состоящей из выступа и впадины. Определены скорости встречного движения точек перегиба возмущенной линии роста и вычислено время существования складки. Даны количественные характеристики эволюции выступа и впадины для знакопеременной и знакопостоянной складок. Численные расчеты проведены для трех металлов: никеля, меди и серебра.

Ключевые слова: дендритный рост, морфологические свойства фазовой границы кристаллизации, боковая ветвь дендрита.

THE EVOLUTION OF THE PERTURBATIONS AND THE FORMATION OF FOLDS ON THE DENDRITE GROWTH LINE IN SUPERCOOLED MELT

O. N. SHABLOVSKY, D. G. KROL, I. A. KONTSEVOI

Educational Institution "Sukhoi State Technical University of Gomel", the Republic of Belarus

The article considers the analytical description of excited state of stationary loop of free dendrite at final distance from its apex. There are two variants of the point perturbation of the growth line: monotonic (exponential in coordinate) and non-monotonic (having the appearance of a secluded wave). The relative value of perturbation increases during the transition from the acute to the quasi-flat apex of dendrite. A case has been studied where the growth line has a morphological feature of the type of fold consisting of a protrusion and a depression. In the article calculated the speed of the opposite movement of the inflection points of the perturbed growth line and calculated the lifetime of the fold. The content of the article shows the quantitative characteristics of evolution of protrusion and depression for sign-variable and sign-constant folds. Numerical modeling was carried out for three metals: nickel, copper and silver.

Keywords: dendritic growth, morphological properties of phase boundary of crystallization, lateral branch of dendrite.

Введение

Теоретические и экспериментальные задачи высокоскоростной кристаллизации чистых веществ обусловлены разработкой перспективных технологий получения материалов с улучшенными эксплуатационными свойствами [1]. Дендритный режим роста кристалла наблюдается при достаточно глубоких переохлаждениях ΔT расплава (например, для меди при $\Delta T > 90$ К). При изучении эволюции дендрита принципиально важен вопрос о морфологической устойчивости фазовой границы кристаллизации (ФГК). Предвестниками бокового ветвления дендрита являются изломы, изгибы и складки, генерирующие неустойчивость поверхности роста. Со-

временное состояние исследований и обширная библиография данной проблемы представлены в [2]–[6]. Настоящая статья является продолжением наших работ [7]–[9] и имеет целью изучить состояние дендрита под воздействием волновых возмущений и нестационарных складок на линии роста.

Постановка задачи

Моделируем ФГК плоской линией сильного разрыва $x - F(y, t) = 0$. Здесь t – время; координата x направлена вдоль оси симметрии в сторону твердой фазы; y – поперечная декартова координата. Нормаль \mathbf{n} границы образует с осью x угол θ : $\cos \theta = 1/G$, $G = (1 + (\partial F / \partial y)^2)^{1/2}$. Фазовая граница кристаллизации перемещается со скоростью N справа налево ($N = N\mathbf{n}$, $N < 0$), и на ее вершине $\partial F / \partial y = 0$, $\cos \theta = 1$. По мере удаления от вершины $\theta \rightarrow \pi/2$. Угол заострения линии роста равен $\theta_1 = (\pi/2) - \theta$ (рис. 1).

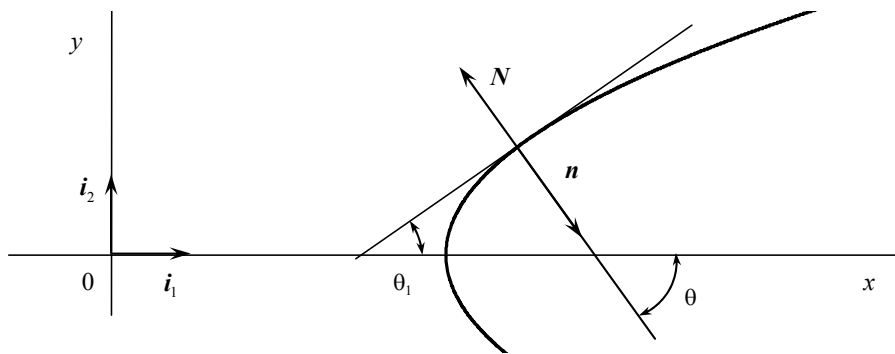


Рис. 1. Угол θ_1 заострения линии роста

На ФГК имеем замкнутую систему трех граничных условий:

1. Баланс энергии

$$q_j = Nc(T_j - T_*) - Q, \quad Q = L \left(N + \gamma_j \frac{\partial N}{\partial t} \right), \quad N = (\partial F / \partial t) / G. \quad (1)$$

Здесь звездочкой отмечены параметры расплава перед ФГК; индекс j указывает, что значение функции определено на правой стороне сильного разрыва, в твердой фазе; c – объемная теплоемкость; $c = c_* = c_j$; L – теплота фазового перехода единицы объема вещества; q_j – нормальная к границе составляющая вектора теплового потока; γ – время релаксации теплового потока; расплав находится в однородном отрелаксировавшем состоянии: $q_* \equiv 0$, $T_* \equiv \text{const}$. Теплофизические свойства расплава и кристалла берем постоянными. Это допущение оправдано тем, что относится к уже сформировавшемуся сильному разрыву.

2. Кинетическая связь

$$|N| = \mu(T_e - T_j), \quad T_e = T_c [1 - (UK / L)] \quad (2)$$

определяет нормальный механизм роста из расплава. Здесь μ – кинетический коэффициент роста; T_e – температура равновесия между твердой и жидкой фазами; T_c – равновесная температура кристаллизации; U – поверхностная энергия границы раздела фаз; средняя кривизна границы равна $K = (\partial^2 F / \partial y^2) / G^3$.

3. Отклонение температуры кристалла T_j от равновесного значения T_c определяется следующей зависимостью от локального угла наклона и [7]–[8]:

$$(T_c - T_j) = (\cos \theta)^\delta B, \quad \delta \geq 1, \quad B \equiv \text{const}. \quad (3)$$

Здесь $B = T_c - T_j(\theta = 0)$ – переохлаждение ФГК на вершине дендрита; μB – модуль характерной скорости роста на вершине; δ – параметр неоднородности переохлаждения ФГК вдоль линии роста. В данной работе мы изучаем физически содержательный вариант $\delta = 3$, позволяющий найти функции N, T_j, q_j в конечной форме (см. (1)–(3)).

Уравнение роста имеет вид [7], [8]:

$$\partial^2 F / \partial y^2 = \alpha B + \varphi(\partial F / \partial t)[1 + (\partial F / \partial y)^2], \quad (4)$$

$$\alpha = L/(UT_c), \quad \varphi = \alpha / \mu.$$

Точное решение

$$F(y, t) = A_1 t + A_2(y), \quad A_1 \equiv \text{const} < 0, \quad (5)$$

$$A_2(y) = \frac{1}{a^2} \ln \left[\left(\frac{1 + \exp(2aby)}{2} \right) \right] - \frac{b}{a} y,$$

$$a = (-\varphi A_1)^{1/2} > 0, \quad b = (\alpha B + \varphi A_1)^{1/2} > 0, \quad -\mu B < A_1 < 0$$

определяет стационарный профиль, который перемещается с постоянной скоростью. При $y \rightarrow \infty$ этот профиль принимает форму клина

$$F^0 = A_1 t + A_2 y, \quad A_1 = -\mu B / (1 + A_2^2) < 0, \quad A_2 \equiv \text{const}, \quad (6)$$

который тоже является точным решением уравнения роста (4). Таким образом, на конечном удалении от вершины дендрита (5) можем применять с заранее заданной точностью клиновидное решение (6). После линеаризации уравнения (4) на точном решении (6) получаем:

$$F(y, t) = F^0(y, t) + f(y, t),$$

$$\partial^2 f / \partial y^2 = B_1(\partial f / \partial y) + B_2(\partial f / \partial t), \quad (7)$$

$$B_1 = 2\varphi A_1 A_2 < 0, \quad B_2 = (1 + A_2^2)\varphi > 0.$$

Здесь $f(y, t)$ – малая добавка к основному решению (6). Полагаем далее, что выполнен сдвиг по координате $y \rightarrow y - Y_1 \geq 0$, где $Y_1 > 0$ – координата, соответствующая начальному поперечному сечению клина. Возьмем возмущение $f(y, t)$ в виде

$$f(y, t) = \exp(h_1 t + h_2 y) \hat{f}(y, t), \quad t \geq 0, \quad (8)$$

$$h_1 = -B_1^2 / (4B_2) < 0, \quad h_2 = B_1 / 2 < 0$$

и получим аналог обычного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} = \frac{1}{B_2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial y^2}, \quad (9)$$

для которого будем применять известные в литературе точные решения [10].

В данной работе числовые расчеты проведены для трех металлов при следующих значениях теплофизических параметров.

Никель Ni: $T_c = 1728$ К, $L = 2,14 \cdot 10^9$ Дж/м³, $c = 5,62 \cdot 10^6$ Дж/(м³ · К), $\lambda = 69$ Вт/(м · К), $U = 1,81$ Дж/м², $\gamma = 1,3804 \cdot 10^{-7}$ с, $\mu = 9,53$ м/(К · с), $T_* = 1562$ К, $N_b = 5,3$ м/с.

Медь Cu: $T_c = 1357$ К, $L = 1,77 \cdot 10^9$ Дж/м³, $c = 4,17 \cdot 10^6$ Дж/(м³ · К), $\lambda = 317$ Вт/(м · К), $U = 1,351$ Дж/м², $\gamma = 4,755 \cdot 10^{-7}$ с, $\mu = 10,056$ м/(К · с), $T_* = 1177$ К, $N_b = 11,0$ м/с.

Серебро Ag: $T_c = 1233,8$ К, $L = 1,1 \cdot 10^9$ Дж/м³, $c = 2,62 \cdot 10^6$ Дж/(м³ · К), $\lambda = 379$ Вт/(м · К), $U = 0,12$ Дж/м², $\mu = 1,24$ м/(К · с), $T_* = 1157,8$ К, $N_b = 14,7$ м/с.

Все расчеты выполнены в безразмерных величинах. Соответствие между безразмерными и размерными параметрами выглядит так:

$$A_1 \rightarrow (A_1 t_b / y_b) = (-N_b t_b / y_b), \quad B_1 \rightarrow B_1 y_b, \quad B_2 \rightarrow (B_2 y_b^2 / t_b).$$

Индексом b отмечены масштабы величин, применяемые при обезразмеривании: $t_b = 10^{-7}$ с, $y_b = 10^{-6}$ м.

Точечное возмущение линии роста. Рассмотрим два варианта точечного возмущения линии роста. Уравнению (9) удовлетворяет фундаментальное решение:

$$\hat{f}(y, t) = \frac{H}{t^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2 B_2}{4t}\right).$$

Следовательно, решение уравнения (7) имеет следующий вид:

$$f/H = \frac{1}{t^{1/2}} \exp\left(h_1 t + h_2 y - \frac{y^2 B_2}{4t}\right), \quad y \geq 0, \quad t > 0, \quad (10)$$

где H – произвольная малая постоянная. Согласно (10), исходное возмущение линии роста локализовано в точке $y = 0$ при $t = +0$. Это видно из того, что $f = 0$ при $y = +0$, $t \rightarrow 0$, и вместе с тем $f \rightarrow \infty$ для $y = 0$, $t = +0$. При каждом конечном $y > 0$ функция $f(y, t)$ в (10) является немонотонной по отношению к аргументу t : $\partial f / \partial t = 0$ вдоль линии

$$y_m(t) = \frac{2}{\sqrt{B_2}} \left(\frac{t}{2} - h_1 t^2\right)^{1/2},$$

на которой f/H достигает своего максимального по $t > 0$ значения. Скорость перемещения этой линии равна:

$$V_m(t) = \frac{(1 - 4h_1 t)}{\sqrt{B_2} (2t - 4h_1 t^2)^{1/2}}, \quad t > 0.$$

Отсюда ясно, что

$$V_m(t \rightarrow \infty) = \frac{2\sqrt{-h_1}}{\sqrt{B_2}} = \frac{-2A_1 A_2}{(1 + A_2^2)}. \quad (11)$$

Здесь (11) – немонотонная функция аргумента $A_2 > 0$, она имеет максимум при $A_2 = 1$. Перечисленные свойства точечного возмущения (10) иллюстрируются ре-

зультатами численных расчетов на рис. 2. Относительная величина возмущения f/H демонстрирует значительные количественные различия между тремя рассмотренными металлами.

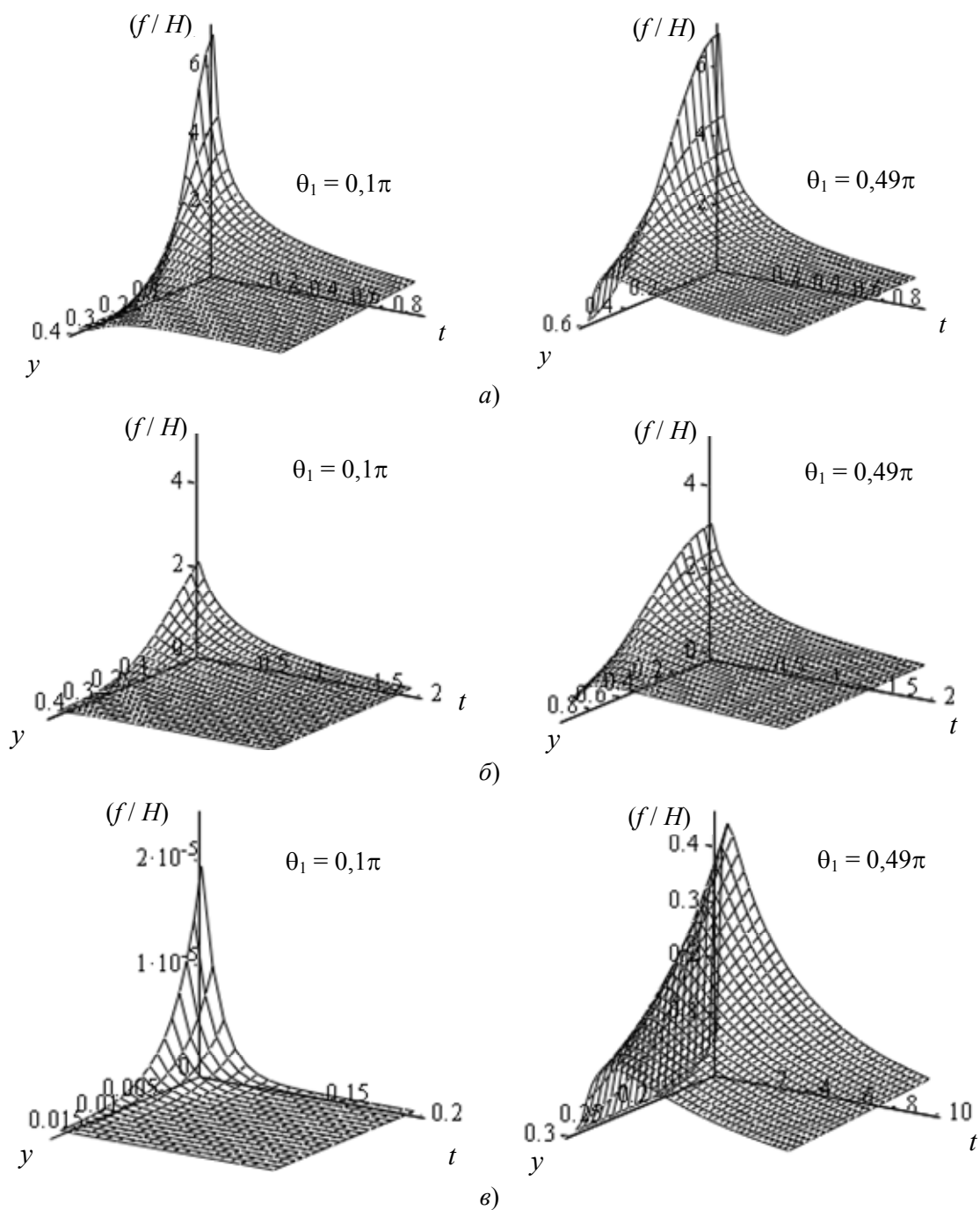


Рис. 2. Точечное возмущение (10): пространственно-временной портрет линии роста:
 а – никель; б – медь; в – серебро

Обсудим еще одно решение уравнения (7):

$$f/H = \frac{y}{t^{3/2}} \exp\left(h_1 t + h_2 y - \frac{y^2 B_2}{4t}\right). \quad (12)$$

В отличие от (10) здесь имеем немонотонность по отношению к обоим аргументам y, t . Действительно, возмущение обладает такими свойствами:

- 1) $y = 0, t = +0, f = 0; y \rightarrow \infty, t > 0, f = 0;$
- 2) $y = +0, t = 0, f \rightarrow 0; y = +0, t \rightarrow \infty, f \rightarrow 0.$

Функция f/H достигает максимума по отношению к аргументу $y > 0$ вдоль линии

$$y_m^{(1)}(t) = \frac{1}{B_2} [h_2 t + (h_2^2 t^2 + 2B_2 t)^{1/2}], \quad t > 0, \quad (13)$$

которая перемещается со скоростью

$$V_m^{(1)}(t) = \frac{1}{B_2} \left[h_2 + \frac{(h_2^2 t + B_2)}{(h_2^2 t^2 + 2B_2 t)^{1/2}} \right] > 0.$$

Отсюда получаем предельное значение $V_m^{(1)}(t \rightarrow \infty) = 0$. Функция (12) достигает максимума по отношению к аргументу $t > 0$ вдоль линии

$$y_m^{(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{B_2}} (6t - 4h_1 t^2)^{1/2}, \quad (14)$$

которая перемещается со скоростью

$$V_m^{(2)}(t) = \frac{(3 - 4h_1 t)}{\sqrt{B_2} (6t - 4h_1 t^2)^{1/2}}, \quad (15)$$

причем

$$V_m^{(2)}(t \rightarrow \infty) = \frac{2\sqrt{-h_1}}{\sqrt{B_2}},$$

что совпадает с (11). Это соответствие говорит о единой физической природе возмущений (10) и (12). Решение (12) представляет собой уединенную волну возмущения. В этом случае пространственно-временной портрет линии роста имеет морфологические свойства (рис. 3, *a*), структурно отличающиеся от свойств точечного возмущения (рис. 2). Нестационарные свойства линий максимумов (13) и (14) показаны на рис. 3, *б, в* для трех углов заострения θ_1 . Хорошо видно, что при переходе от острой к квазиплоской вершине дендрита относительная величина возмущения f/H возрастает.

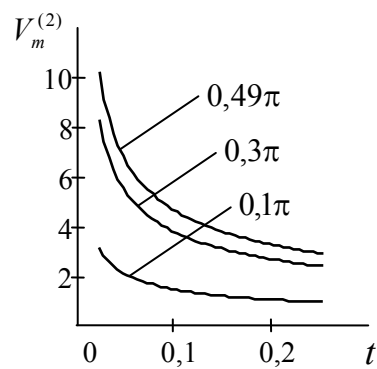
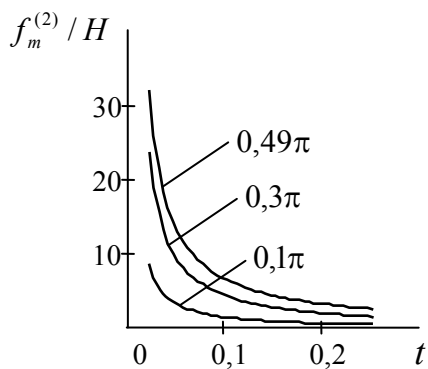
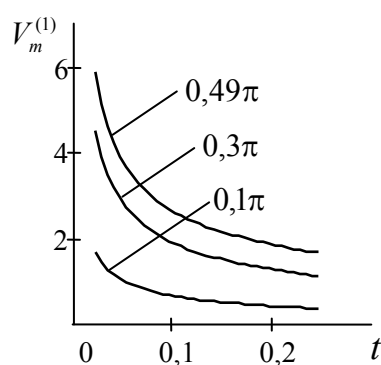
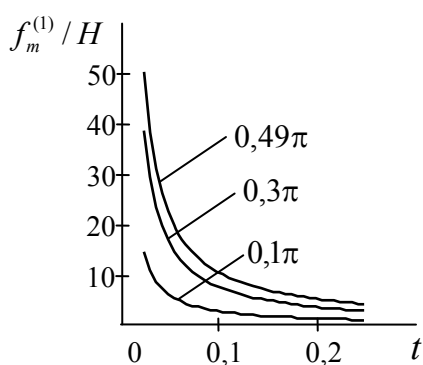
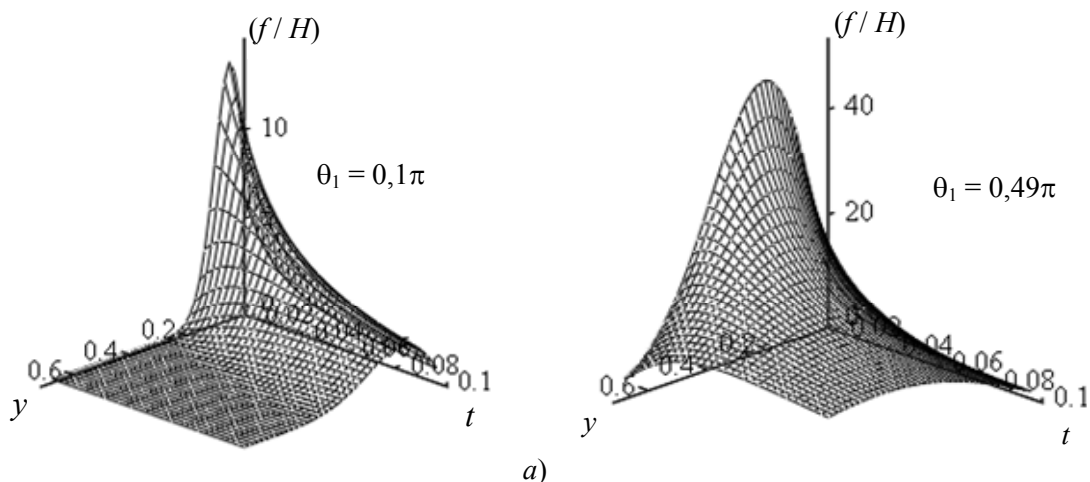


Рис. 3. Уединенная волна (12) (а):
 никель; нестационарные свойства возмущения
 при различных углах заострения линии роста (б, в)

Эволюция впадины и выступа. Уравнению (9) удовлетворяет локальное по y, t решение

$$\hat{f}(y, t) = H\left(y^2 - y_1^2 + \frac{2}{B^2}t\right),$$

поэтому возмущение линии роста, согласно (8), выглядит так:

$$\bar{f} \equiv f/H = \left(y^2 - y_1^2 + \frac{2}{B_2} t \right) \exp(h_1 t + h_2 y). \quad (16)$$

В начальном состоянии имеем $f(y=0, t=0)/H = -y_1^2 < 0$, т. е. константа y_1^2 характеризует впадину, расположенную в малой левой и правой окрестности исходного сечения $y=0$. Качественный вид возмущенной линии роста при $t=0$ показан на рис. 4: это знакопеременная складка, состоящая из выступа ($\bar{f} > 0$) и впадины ($\bar{f} < 0$). Функция $f(y, t)$ в (16) немонотонная по отношению к аргументу y : $\partial f / \partial y = 0$ вдоль линий

$$y_m^{(1),(2)}(t) = \frac{1}{(-h_2)} \left[1 \pm \left(1 + h_2^2 y_1^2 - 2 \frac{h_2^2}{B_2} t \right)^{1/2} \right], \quad (17)$$

где знаки «+»/«-» перед корнем относятся к выступу/впадине, которым соответствуют индексы (1) и (2). Эти линии перемещаются навстречу друг другу ($V_m^{(1)} < 0$, $V_m^{(2)} > 0$) с равными по модулю скоростями:

$$V_m^{(1),(2)}(t) = \frac{\mp h_2^2}{(-h_2) B_2 \left(1 + h_2^2 y_1^2 - 2 \frac{h_2^2}{B_2} t \right)^{1/2}}.$$

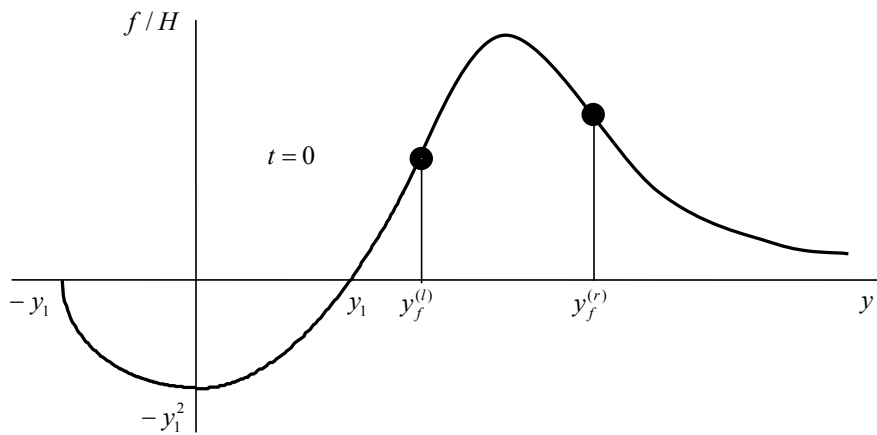


Рис. 4. Знакопеременная складка: начальное состояние; темные круги – точки перегиба

Выступ и впадина существуют конечное время: $0 \leq t < t_k$, где t_k – момент времени, в который подкоренное выражение в (17) превращается в ноль:

$$t_k = \frac{B_2}{2h_2^2} (1 + h_2^2 y_1^2). \quad (18)$$

Именно в это мгновение в точках максимума и минимума (17) обращается в ноль вторая производная: $(\partial^2 f / \partial y^2) = 0$ при

$$y = y_k = 1/(-h_2) > 0, \quad t = t_k; \quad y_k = y_m^{(1),(2)}(t_k).$$

Отметим, что для возмущения (16) $(\partial^2 f / \partial y^2) = 0$ вдоль двух линий:

$$y_f^{(l),(r)}(t) = \frac{1}{h_2^2} \left[-2h_2 \pm \left(2h_2^2 - 2h_2^4 \frac{t}{B_2} + h_2^4 y_1^2 \right)^{1/2} \right],$$

где знаки «+» и «-» перед корнем соответствуют правой (r) и левой (l) точкам перегиба. В начальный и конечный моменты времени координаты точек перегиба такие:

$$y_f^{(l),(r)}(t=0) = \frac{1}{(-h_2)} \left[2 \pm (2 + h_2^2 y_1^2)^{1/2} \right]; \quad (19)$$

$$y_f^{(l)}(t=t_k) = 1/(-h_2) = y_m^{(1),(2)}(t=t_k);$$

$$y_f^{(r)}(t=t_k) = 3/(-h_2).$$

Нетрудно видеть, что

$$V_f^{(l)} = \frac{dy_f^{(l)}}{dt} > 0, \quad V_f^{(r)} = \frac{dy_f^{(r)}}{dt} < 0.$$

Следовательно, исходная левая точка перегиба $y_f^{(l)}(t=0)$ приходит при $t=t_k$ в точку слияния выступа и впадины $y_m^{(1),(2)}(t=t_k)$, потому что с течением времени правый перегиб движется с периферии ближе к вершине: $y_f^{(r)}(t=0) > y_f^{(r)}(t=t_k)$. В момент слияния выступа и впадины, т. е. в момент исчезновения складки, имеем неограниченно большие скорости $V_m^{(1),(2)}(t=t_k) \rightarrow \pm\infty$. Из (19) ясно, что безразмерный критерий $h_2^2 y_1^2$ определяет первоначальный вид складки. В частности, для левой точки перегиба (знак «-» перед корнем в (19)) получаем $y_f^{(l)}(t=0) > 0$, если $h_2^2 y_1^2 < 2$; вместе с тем эта координата отрицательная при $h_2^2 y_1^2 > 2$. Количественной характеристикой эволюции выступа служит относительная величина

$$\delta f_m^{(1)} = \frac{f(y = y_m^{(1)}(t_k), t = t_k)}{f(y = y_m^{(1)}(0), t = 0)} = \frac{\exp \left[\sqrt{1 + h_2^2 y_1^2} - \frac{1}{2} (1 + h_2^2 y_1^2) \right]}{(1 + \sqrt{1 + h_2^2 y_1^2})}.$$

Зависимость $\delta f_m^{(1)}$ от $h_2^2 y_1^2$ – монотонно убывающая. Рисунок 5, а демонстрирует немонотонную (имеющую минимум) зависимость времени t_k от угла θ_1 заострения линии роста.

Далее рассмотрим другое начальное состояние возмущенной линии роста: в решении (16) сделаем замену $(-y_1^2) \rightarrow y_1^2$:

$$f/H = \left(y^2 + y_1^2 + \frac{2}{B_2} t \right) \exp(h_1 t + h_2 y). \quad (20)$$

Таким образом, имеем здесь знакопостоянную (положительную) складку, состоящую из выступа и впадины. В этом случае условие $(\partial f / \partial y) = 0$ выполнено вдоль двух линий

$$y_m^{(1),(2)}(t) = \frac{1}{(-h_2)} \left[1 \pm \left(1 - h_2^2 y_1^2 - 2 \frac{h_2^2}{B_2} t \right)^{1/2} \right], \quad (21)$$

где индекс (1) соответствует выступу (знак «+» перед корнем), индекс (2) соответствует впадине (знак «-» перед корнем). В начальном состоянии выступ

$$t = 0, \quad y = y_m^{(1)}(0), \quad (\partial^2 \bar{f} / \partial y^2) < 0$$

и впадина $t = 0, \quad y = y_m^{(2)}(0), \quad (\partial^2 \bar{f} / \partial y^2) > 0$ существуют, если $1 > h_2^2 y_1^2$, т. е. $y_1^2 < [1 / \varphi A_1 A_2]^2$. В рамках этого ограничения числовое значение комплекса $h_2^2 y_1^2$ определяет начальное положение выступа и впадины. Складка существует в течение конечного интервала времени $t \in [0, t_k)$, где

$$t_k = \frac{B_2}{2h_2^2} (1 - h_2^2 y_1^2) > 0.$$

При $t = t_k$ подкоренное выражение в (21) обращается в ноль. Выступ и впадина движутся навстречу друг другу:

$$V_m^{(1)} = \frac{dy_m^{(1)}}{dt} < 0, \quad V_m^{(2)} = \frac{dy_m^{(2)}}{dt} > 0.$$

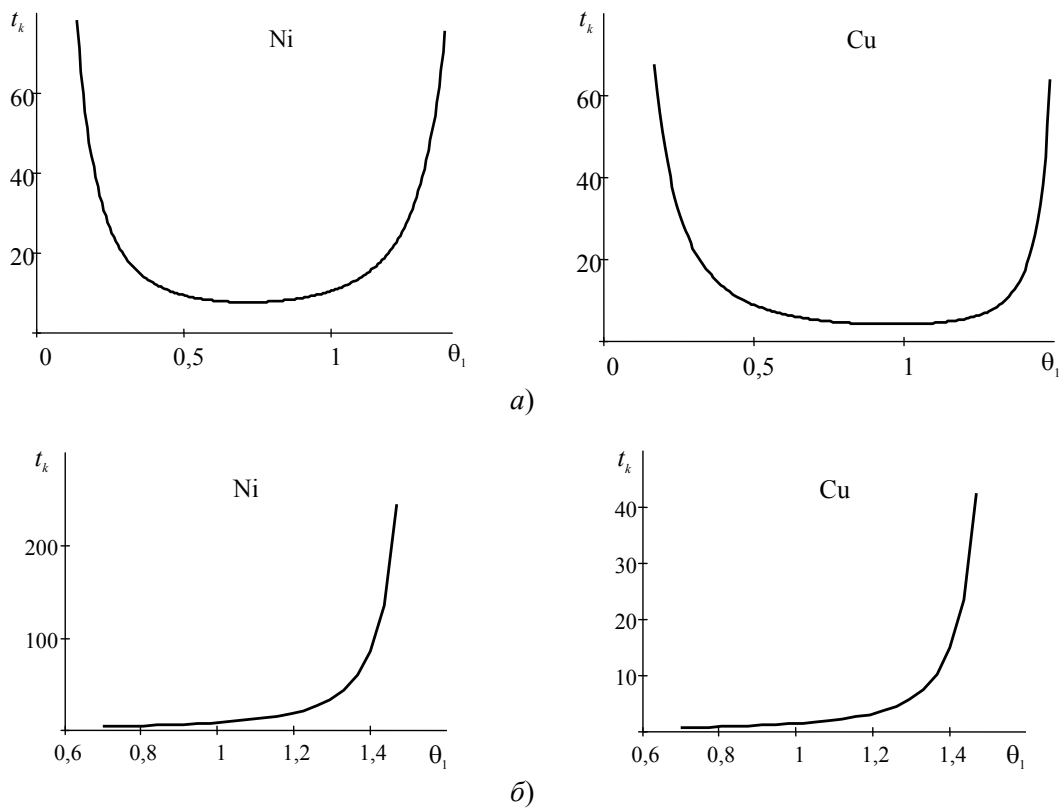


Рис. 5. Свойства складки на линии роста: а – знакопеременная складка; слияние выступа, впадины и точки перегиба – интервал времени (18), предшествующий появлению боковой ветви; б – знакопостоянная складка (20); конечное время t_k существования складки как функция угла заострения линии роста

При $t = t_k$ складка исчезает в точке встречи

$$y = y_k = 1/(-h_2).$$

Отсюда ясно, что $y_1^2 < y_k^2$. Кроме того, имеем:

$$V_m^{(1)}(t = t_k) \rightarrow (-\infty); V_m^{(2)}(t = t_k) \rightarrow (+\infty).$$

Относительные величины выступа и впадины подсчитываются по формулам:

$$\delta f_m^{(1)} = \frac{f(y = y_m^{(1)}(t_k), t = t_k)}{f(y = y_m^{(1)}(0), t = 0)} = \frac{\exp\left[\sqrt{1 - h_2^2 y_1^2} - \frac{1}{2}(1 - h_2^2 y_1^2)\right]}{(1 + \sqrt{1 - h_2^2 y_1^2})};$$

$$\delta f_m^{(2)} = \frac{f(y = y_m^{(2)}(t_k), t = t_k)}{f(y = y_m^{(2)}(0), t = 0)} = \frac{2 \exp\left[\frac{1}{2}(h_2^2 y_1^2 - 1) - (1 - h_2^2 y_1^2)^{1/2}\right]}{\left[1 - (1 - h_2^2 y_1^2)^{1/2}\right]^2 + h_2^2 y_1^2}.$$

Зависимости $\delta f_m^{(1)}$ и $\delta f_m^{(2)}$ от геометрического параметра складки – монотонно возрастающая и монотонно убывающая соответственно.

Результаты расчетов представлены на рис. 5, б и 6.

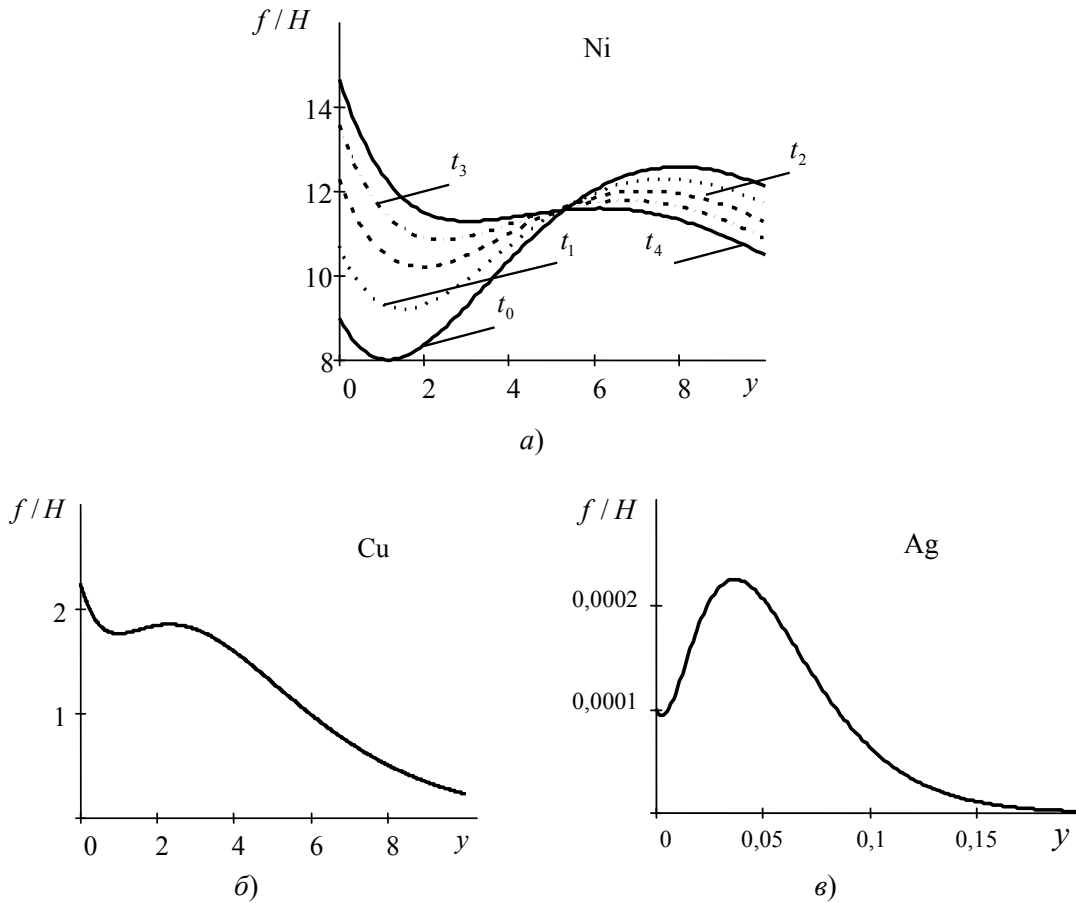


Рис. 6. Знакопостоянная складка. Никель (а): изменение формы складки с течением времени: $t_0 = 0, t_1 = 1,1, t_2 = 2,3, t_3 = 3,4, t_4 = 4,5$. Медь (б), серебро (в): форма складки вблизи момента времени $t = 0$

Обсудим поведение точек перегиба:

$$y_f^{(l),(r)}(t) = \frac{1}{h_2^2} \left[-2h_2 \pm \left(2h_2^2 - 2h_2^4 \frac{t}{B_2} - h_2^4 y_1^2 \right)^{1/2} \right].$$

В этой записи принято соответствие: $(l) \leftrightarrow \langle - \rangle$; $(r) \leftrightarrow \langle + \rangle$. При $t = 0$ левая точка перегиба находится между впадиной и выступом, правая точка перегиба – справа от выступа:

$$y_f^{(l),(r)}(t = 0) = \frac{1}{(-h_2)} \left[2 \pm \sqrt{2 + y_1^2 h_2^2} \right], \quad y_1^2 h_2^2 < 1.$$

Точки перегиба движутся навстречу друг другу:

$$V_f^{(l)}(t) > 0, \quad V_f^{(r)}(t) < 0.$$

Слияние выступа и впадины с левой точкой перегиба происходит при $t = t_k$:

$$y_f^{(l)}(t_k) = y_m^{(1)}(t_k) = y_m^{(2)}(t_k) = 1/(-h_2).$$

В это же время имеем:

$$y_f^{(r)} = 3/(-h_2); \quad V_f^{(r)}(t_k) = -V_f^{(l)}(t_k) = (B_1/2B_2) < 0.$$

Эти закономерности аналогичны тем, что наблюдались нами для знакопеременной складки (16).

Укажем еще два точных решения, которые можно интерпретировать как складки, вызванные возмущением линии роста:

$$f/H = (\hat{f}/H) \exp(h_1 t + h_2 y);$$

$$\hat{f}/H = y^3 + \frac{6}{B_2} y t \pm y_1^2;$$

$$\hat{f}/H = y^4 + \frac{12}{B_2} y^2 t + \frac{12}{B_2^2} t^2 \pm y_1^2.$$

Первому и второму из перечисленных решений соответствуют левая $(+y_1^2)$ и правая $(-y_1^2)$ части рис. 7, построенного для меди при $y_1^2 = 9$.

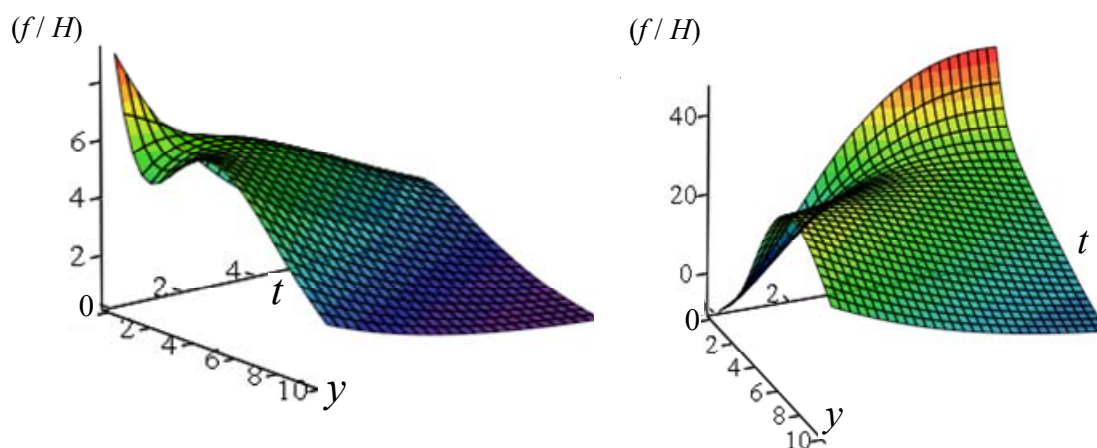


Рис. 7. Примеры трехмерных портретов складок на линии роста дендрита меди

Заключение

Дано аналитическое описание возбужденного состояния стационарного контура свободного дендрита на конечном удалении от его вершины. Построены два варианта точечного возмущения линии роста: монотонный (экспоненциальный по координате) и немонотонный (имеющий вид уединенной волны). Обнаружено, что при переходе от острой к квазиплоской вершине дендрита относительная величина возмущения возрастает. Рассмотрен случай, когда линия роста имеет морфологическую особенность типа складки, состоящей из выступа и впадины. Определены скорости встречного движения точек перегиба возмущенной линии роста и вычислено время существования складки. Даны количественные характеристики эволюции выступа и впадины для знакопеременной и знакопостоянной складок. Численные расчеты проведены для трех металлов: никеля, меди и серебра.

Литература

1. Herlach, D. M. *Metastable Solids from Undercooled Melts* / D. M. Herlach, P. Galenko, D. Holland-Moritz. – Oxford : Pergamon, 2007. – 448 p.
2. Dragnevski, K. Experimental evidence for dendrite tip splitting in deeply undercooled, ultrahigh purity Cu / K. Dragnevski, R. F. Cochrane, A. M. Mullis // *Physical review letters*. – 2002. – Vol. 89, № 21. – P. 215502-1–215502-4.
3. Bassler, B. T. The solidification velocity of pure nickel / B. T. Bassler, W. H. Hofmeister, R. J. Bayuzik // *Materials Science and Engineering*. – 2003. – A. 342. – P. 80–92.
4. Mullis, A. M. A study of kinetically limited dendritic growth at high undercooling using phase-field techniques / A. M. Mullis // *Acta Materialia*. – 2003. – Vol. 51, № 7. – P. 1959–1969.
5. Gliksman, M. E. Capillary-mediated interface perturbations: Deterministic pattern formation / M. E. Gliksman // *Journal of Crystal Growth*. – 2016. – Vol. 450. – P. 119–139.
6. Strickland, J. On Directional Dendritic Growth and Primary Spacing – A Review / J. Strickland, B. Nenchev // *Crystals*. – 2020. – Vol. 10, iss. 7. – P. 627.
7. Шабловский, О. Н. Кинематические свойства поверхности роста кристалла / О. Н. Шабловский // *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*. – 2008. – № 11. – С. 106–112.

8. Шабловский, О. Н. Производство энтропии на фазовой границе кристаллизации / О. Н. Шабловский // Поверхность, синхротронные и нейтронные исслед. – 2010. – № 12. – С. 81–87.
9. Шабловский, О. Н. Форма поверхности роста и предвестники ветвления дендрита в переохлажденном расплаве / О. Н. Шабловский, Д. Г. Кроль // Успехи приклад. физики. – 2018. – Т. 6, № 4. – С. 316–324.
10. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса / А. Д. Полянин [и др.]. – М. : Факториал, 1998. – 368 с.

Дата получения 29.10.2021 г.