Контрольная работа №2
Решение типового варианта

1. Исследуйте, являются ли векторы $x^2+2x,\ 3x^2-1,\ x+4$ линейно зависимыми.

Решение

Условие линейной зависимости:

$\alpha(x^2+2x)+\beta(3x^2-1)+\gamma(x+4)=0$, при этом среди чисел α,β,γ есть ненулевые.

Раскроем скобки, приравняем коэффициенты при x^2, x и свободные члены. Получим:

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=0,\\ 2\alpha+\gamma=0,\\ -\beta+4\gamma=0\end{cases}$$

Решая, получим, что система имеет только нулевое решение, значит, векторы линейно независимы.

2. Убедитесь, что векторы $(1,2,-3),\ (0,-2,1),\ (1,0,2)$ образуют базис в пространстве R^3. Применив процесс ортогонализации, найдите ортонормированный базис в пространстве R^3, взяв за исходный базис указанные векторы.

   Решение

   Составим определитель из векторов и убедимся, что он не равен нулю, а значит, векторы некомпланарны, следовательно, линейно независимы. Применим процесс ортогонализации для построения новой системы e_1, e_2, e_3.

$$e_1=\frac{a_1}{|a_1|}=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

$$x_2=a_2-\lambda e_1.$$

   Умножим скалярно на e_1, получим:

$\lambda=(a_2,e_1)=(0,-2,1)\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)=-\frac{7}{\sqrt{14}}$, тогда

$$x_2=(0,-2,1)+\frac{7}{\sqrt{14}}\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)=\left(\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\right)$$

$$e_2=\frac{x_2}{|x_2|}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Найдем $x_3 = a_3 - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2$. Умножив по очереди на e_1 и e_2 получим:

$$\lambda_1 = (a_3, e_1) = (1,0,2)\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = -\frac{5}{\sqrt{14}}$$

$$\lambda_2 = (a_3, e_2) = (1,0,2)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Тогда $x_3 = a_3 - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 = \left(\frac{32}{21}, \frac{8}{21}, \frac{16}{21}\right)$, $e_3 = \left(\frac{32}{\sqrt{1344}}, \frac{8}{\sqrt{1344}}, \frac{16}{\sqrt{1344}}\right)$.

Проверка:

$(e_1, e_2) = 0 = (e_1, e_3) = (e_2, e_3)$.

3. Даны два линейных преобразования $\begin{cases} x_1 = 3y_1 + y_2 - 2y_3 \\ x_2 = 3y_3 \\ x_3 = y_1 - 2y_2 \end{cases}$ и $\begin{cases} y_1 = z_1 - 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - 3z_2 + 4z_3 \\ y_3 = 3z_1 + z_2 - 2z_3 \end{cases}$. Найдите линейное преобразование, выражающее x_1, x_2, x_3 через z_1, z_2, z_3.

Решение

X=AY, Y=BZ, следовательно, X=ABZ=CZ, т.е. надо перемножить матрицы преобразований:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -11 & 8 \\ 9 & 3 & -6 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix},$$ осталось записать преобразование, задаваемое этой матрицей.

4. Даны два базиса e_1, e_2 и e_1', e_2' и матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в базисе e_1, e_2. Найдите матрицу A' этого преобразования в базисе e_1', e_2', если $e_1' = e_1 - e_2$, $e_2' = -2e_1 + 3e_2$.

Решение

Матрица перехода от старого базиса к новому $B = P^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Тогда

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, т.е. в новом базисе данное линейное преобразование в координатах примет вид:

$$\begin{cases} y_1' = 4x_1' - 5x_2' \\ y_2' = 2x_1' - 3x_2' \end{cases}.$$

5. Найдите собственные числа и собственные вектора матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 5 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 5 & 3 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$(2-\lambda)(1-\lambda)^2=0$, $\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=1$ - собственные числа.

Собственные векторы:

$\lambda_1=2$

$\begin{cases}-x_1+x_2=0\\ -x_2=0\\ 5x_1+3x_2=0\end{cases}$, (0,0,1) – собственный вектор

$\lambda_{2,3}=1$

$\begin{cases}x_2=0\\ 5x_1+3x_2+x_3=0\end{cases}$, (1,0,-5) – собственный вектор.

6. В ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 дано линейное преобразование

$$\begin{cases}y_1=2x_1+x_3\\ y_2=x_2\\ y_3=x_1+2x_3\end{cases}.$$

Путем перехода к новому ортонормированному базису приведите матрицу преобразования к диагональному виду. Укажите матрицу перехода.

Решение

Матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

Найдем собственные числа и собственные векторы (см.№5):

$\lambda_1=3, \lambda_2=\lambda_3=1,$

$e_1'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$(пронормировали),

$e_2'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

e'_3 найдем из расчета, что нам нужен <u>ортонормированный</u> базис, т.е. ищем вектор, ортогональный векторам e'_1 и e'_2. Его можно найти через векторное произведение векторов e'_1 и e'_2:

$e'_3 = e'_1 \times e'_2 = (0;1;0)$.

Диагональная матрица будет иметь вид: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, матрица перехода:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Приведите к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, y_1) = x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2$. Укажите формулы перехода от переменных x_1, x_2 к x'_1, x'_2.

Решение

Матрица квадратичной формы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, находим собственные числа и вектора, как в № 5. Получаем:

$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2.$$

Векторы: (1,-1), (1,1).

Значит, квадратичная форма приводится к виду $f(x_1, y_1) = 4x_1'^2 - 2x_2'^2$ при помощи перехода к новым переменным по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_2 \\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_2 \end{cases}$$ (пронормировали собственные векторы)

Проверка:

$$f(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_2\right)^2 - 6\left(\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_2\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_2\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_2\right)^2 =$$

$$= 4x_1'^2 - 2x_2'^2.$$