Контрольная работа №1
Решение типового варианта

1.Найти значение многочлена $f(x)=4x^2-3x+2$ от матрицы
$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Решение:

$f(A)=4A^2-3A+2E$, где $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+3\cdot(-2) & 1\cdot3+3\cdot1\\ -2\cdot1+1\cdot(-2) & -2\cdot3+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 6\\ -4 & -5\end{pmatrix}$$

$$-3A=\begin{pmatrix}-3 & -9\\ 6 & -3\end{pmatrix}.$$

Тогда $f(A)=\begin{pmatrix}-20 & 24\\ -16 & -20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -9\\ 6 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21 & 15\\ -10 & -21\end{pmatrix}$

Ответ: $f(A)=\begin{pmatrix}-21 & 15\\ -10 & -21\end{pmatrix}$

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases}x_1 & -2x_2 & +3x_3=2\\ -2x_1 & +x_2 & -x_3=-3\\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3=7\end{cases}$$

Решение:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{vmatrix}=1+4+18-(6+3+4)=23-13=10$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & -2 & 3\\ -3 & 1 & -1\\ 7 & -3 & 1\end{vmatrix}=2+14+27-(21+6+6)=43-33=10$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & -3 & -1\\ 2 & 7 & 1\end{vmatrix}=-3-4-42-(-4-7-18)=-49+29=-20$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & -3\\ 3 & -3 & 7\end{vmatrix}=7+12+12-(28+9+4)=31-41=-10$$

Тогда: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}=\dfrac{10}{10}=1;\quad x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}=\dfrac{-20}{10}=-2;\quad x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}=\dfrac{-10}{10}=-1$

Ответ: $(1;-2;-1)$

3. Найти длину вектора $a=2m-3n$, если $|m|=1,|n|=2,(m\wedge n)=\dfrac{\pi}{3}$

Решение:

$|a|=\sqrt{(a,a)}$, тогда $(a,a)=|a|^2$. Найдем скалярное произведение, используя его свойства.

$$(a,a)=(2m-3n,2m-3n)=(2m,2m)+(2m,-3n)+(-3n,2m)+(-3n,-3n)=$$
$$=4(m,m)-6(m,n)-6(m,n)+9(n,n)=4|m|^2-12|m|\cdot|n|\cos(m\wedge n)+9|n|^2=$$
$$=4\cdot 1-12\cdot 1\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{4}+9\cdot 4=4-12+36=28.$$

Ответ: 28.

4. Даны векторы $a=p+4q, b=2p-q, |p|=2, |q|=3, (p\wedge q)=\dfrac{\pi}{6}$.

Найти площадь треугольника, построенного на векторах a и b.

Решение:

Найдем векторное произведение векторов, используя его свойства.

$[a,b]=[p+4q,2p-q]=[p,2p-q]+[4p,2p-q]= [p,2p]+[p,-q]+$
$+[4q,2p]+[4q,-q]=2[p,p]-[p,q]-4\cdot 2[p,q]-4[q,q]=$
$= 2[p,p]-9[p,q]-4[q,q]=2\cdot 0-9[p,q]-4\cdot 0=-9[p,q]$

Тогда $\left|[a,b]\right|=\left|-9[p,q]\right|=9\left|p\right|\left|q\right|\sin\frac{\pi}{6}=9\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=9\cdot 3=27$

$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|[a,b]\right|=\frac{27}{2}$.

Ответ: $\frac{27}{2}$.

5. Найти объем пирамиды с вершинами в точках:
$A(1;-1;2), B(0;1;1), C(2;-2;3), D(2;2;4)$.

Решение:

$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$. $\overrightarrow{AB}=(0-1;1-(-1);1-2)=(-1;2;-1)$.
$\overrightarrow{AC}=(2-1;-2-(-1);3-2)=(1;-1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(2-1;2-(-1);4-2)=(1;3;2)$.

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{vmatrix}=-1.\quad V=\frac{1}{6}\left|-1\right|=\frac{1}{6}.$$

Ответ: $V=\frac{1}{6}$.

6. Даны вершины треугольника $ABC: A(1;3), B(2;1), C(4;2)$. Найти точку пересечения высоты CN и стороны AB.

Решение:

Найдем уравнение стороны AB: $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-3}{1-3}$; $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}$;

$-2(x-1)=y-3; \quad -2x+2=y-3; \quad 2x+y-5=0.$

Так как CN перпендикулярна $AB,$ то нормальный вектор прямой AB $n=(2;1)$ является направляющим для CN. Найдем уравнение высоты $CN.$

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-2}{1}; x-4=2(y-2); x-4=2y-4; x-2y=0$$

Точка пересечения является решением системы:

$$\begin{cases} 2x+y-5=0 \\ x-2y=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x+y=5 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

Используя формулы Крамера получим:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-10-0}{-4-1}=\frac{-10}{-5}=2; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-5}=\frac{0-5}{-5}=\frac{-5}{-5}=1.$$

Ответ: $N(2;1)$

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку D, перпендикулярно плоскости (ABC), если $A(1;2;3), B(2;3;1), C(0;4;5), D(3;1;4).$

Решение:

Составим уравнение плоскости (ABC):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 3-1 & 1-3 \\ 0-1 & 4-2 & 5-3 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$$6(x-1)-0(y-2)+3(z-3)=0; 6x-6+3z-9=0;$$

$$6x+3z-15=0; 2x+z-5=0.$$

Так, как искомая прямая перпендикулярна плоскости (ABC) ,то нормальный вектор $\vec{n} = (2;0;1)$ является направляющим для прямой.
Уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{1}.$$

8. Составить каноническое уравнение эллипса, большая полуось которого равна 10, а эксцентриситет равен 0,3.

Решение:

Эксцентриситет эллипса определяется равенством: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Подставив данные, получим: $0,3 = \frac{c}{10}; c = 10 \cdot 0,3 = 3.$ Так, как $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow$ $b^2 = 100 - 9 = 91.$ Тогда, искомое уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{91} = 1.$

Ответ: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{91} = 1.$