Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Физика»

С. В. Пискунов, О. И. Проневич, П. С. Шаповалов

МЕХАНИКА

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ
по курсу «Физика»
для студентов технических специальностей
дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2013

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.3я73
П34

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом энергетического факультета ГГТУ им. П. О. Сухого (*протокол № 4 от 28.12.2012 г.*)

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. каф. «Высшая математика» ГГТУ им. П. О. Сухого *Л. Л. Великович*

Пискунов, С. В.

П34 Механика : лаборатор. практикум по курсу «Физика» для студентов техн. специальностей днев. формы обучения / С. В. Пискунов, О. И. Проневич, П. С. Шаповалов. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2013. – 48 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ; 32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat Reader. – Режим доступа: http://lib.gstu.local. – Загл. с титул. экрана.

ISBN 978-985-535-153-6.

Содержит краткие теоретические сведения по разделу «Механика», методику измерений и порядок выполнения лабораторных работ.

Для студентов технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.3я73

ISBN 978-985-535-153-6

Лабораторная работа № 1-2
ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ТЕЛ

Цель работы:

1. Изучить основные законы равноускоренного движения.
2. Измерить величину ускорения свободного падения тел.

Приборы и принадлежности: штатив с передвижными платформами, несущими электромагнит и прерыватель; электрический секундомер; метровая линейка; стальные шарики (для лаборатории 2-506); установка «Машина Атвуда» (для лаборатории 2-508).

Теоретическая часть

Механическим движением тела называется изменение его положения в пространстве относительно других тел с течением времени. Для описания положения тела в пространстве используется система отсчета. Она состоит из тела отсчета и системы координат. Обычно используется прямоугольная декартова система координат, состоящая из взаимно перпендикулярных осей *OX*, *OY* и *OZ*. Различают правую и левую систему координат. Для правой системы, которая чаще используется, если смотреть с оси *OZ*, переход от *OX* к *OY* происходит против часовой стрелки. Положения точки в пространстве в декартовой системе координат задается указанием группы из трех чисел: x, y, z. Также положения точки в пространстве можно задать радиус-ветором $\vec{r}(t)$, который проводится из начала координат в заданную точку пространства. Связь радиус-вектора с координатами точки выражается формулой

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad (2.1)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты, направленные вдоль соответствующих осей *OX*, *OY* и *OZ* (рис. 2.1).

Длина радиус-вектора (модуль) равна: $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Для характеристики движения используется такое понятие, как *траектория движения – линия, вдоль которой движется тело. Если траектория представляет собой прямую линию, то говорят, что движение прямолинейное. Если траектория является кривой линией – криволинейное движение.*

Путь – длина траектории движения тела. Перемещение – вектор, соединяющий начальную и конечную точки движения тела. Модуль перемещения тела не может быть больше пути его движения.

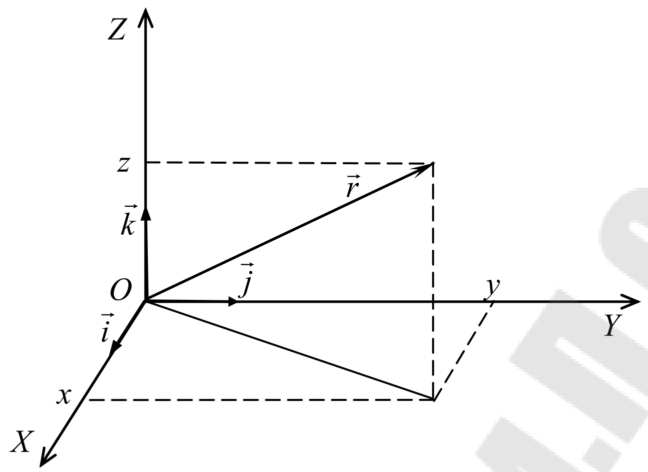


Рис. 2.1

Для характеристики движения используется величина: *скорость движения – путь* (*перемещение*), *пройденный телом за единицу времени*. Различают среднюю скорость движения и мгновенную. Средняя скорость пути находится как отношение всего пути, пройденного телом, к промежутку времени, за которое этот путь пройден, т. е. $\upsilon_{\text{ср}} = \dfrac{S}{t}$. В случае средней скорости перемещения имеем: $\vec{\upsilon}_{\text{ср}} = \dfrac{\vec{r}}{t}$. В данных формулах: S – путь пройденный телом, $\vec{r}$ – вектор перемещения тела, t – время движения.

Если скорость движения тела меняется с течением времени, удобнее использовать *мгновенную скорость движения – скорость пути* (*перемещения*) *тела в данный момент времени*. Мгновенная скорость тела находится по формулам:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}; \qquad (2.2)$$

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (2.3)$$

Здесь ΔS и $\Delta\vec{r}$ – приращение пути и перемещения, соответственно, за время Δt; $\dfrac{df}{dt}$ – означает производную функции f по времени t.

Формула (2.2) задает мгновенную скорость пути, (2.3) – мгновенную скорость перемещения.

Так как $\Delta\vec{r}$ при предельном переходе сливается с касательной к траектории, то скорость направлена по касательной к траектории (рис. 2.2).

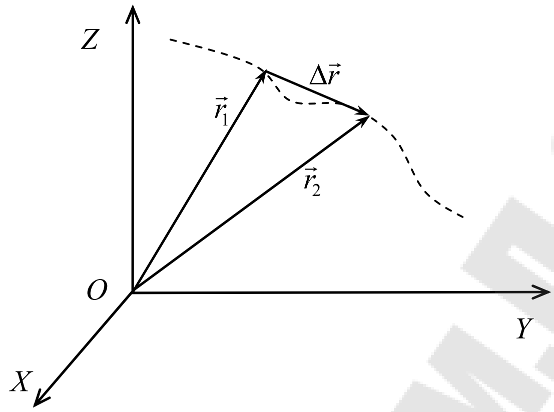


Рис. 2.2

Вектор скорости перемещения можно представить в следующем виде:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}, \tag{2.4}$$

где $\upsilon_x = dx/dt$, $\upsilon_y = dy/dt$, $\upsilon_z = dz/dt$ – скорости тела вдоль соответствующих осей координат *x*, *y*, *z*. Модуль скорости тела равен:

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Если движение происходит с постоянной скоростью, то говорят, что движение является равномерным. Путь в этом случае можно найти по формуле

$$S = \upsilon t. \tag{2.5}$$

Ускорение движения тела – быстрота изменения вектора скорости тела со временем.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \tag{2.6}$$

Модуль ускорения тела равен:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Если движение осуществляется с постоянным ускорением, то говорят, что движение является равноускоренным.

Для нахождения скорости равноускоренного движения воспользуемся соотношением $d\upsilon = a dt$, интегрируя, получим:

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = a\int_0^t dt, \quad \upsilon - \upsilon_0 = at, \quad \text{или} \quad \upsilon = \upsilon_0 + at. \tag{2.7}$$

Здесь υ_0 – скорость тела в момент времени $t = 0$.

Представив скорость в виде $dS = \upsilon dt = (\upsilon_0 + at)dt$ и интегрируя, имеем:

$$\int_0^S dS = \int_0^t (\upsilon_0 + at)dt = \upsilon_0 \int_0^t dt + a\int_0^t t dt; \tag{2.8}$$

$$S = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{2.9}$$

Выражение (2.9) *– основное кинематическое уравнение равноускоренного движения. Если в уравнении* (2.9) $a < 0$, *то говорят, что движение является равнозамедленным.* Наиболее часто равноускоренное движение тел встречается при свободном падении тел без учета сопротивления воздуха ($a = g = 9{,}8$ м/с^2).

В случае произвольного движения тела кинематическое уравнение движения для вектора перемещения $\vec{r}$ имеет вид:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \int_0^t \int_0^t \vec{a} dt\, dt. \tag{2.10}$$

Здесь $\vec{r}_0$ – радиус-вектор начального положения тела при $t = 0$.

Для описания криволинейного движения вводятся понятия: тангенциальное и нормальное ускорения.

Ускорение, которое определяет только быстроту изменения величины скорости и направлено вдоль вектора скорости, называется тангенциальным ускорением:

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \tag{2.11}$$

При равномерном движении тела по траектории ($\upsilon = \text{const}$) $a_\tau = 0$.

Ускорение, которое определяет только быстроту изменения направления скорости, называется нормальным ускорением. Бесконечно малое изменение вектора скорости будет направлено по радиусу к центру кривизны, так как треугольник скоростей будет равнобедренным и угол при вершине в пределе стремится к нулю. Поэтому нормальное ускорения перпендикулярно к направлению вектора скорости. Модуль нормального ускорения равен:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R, \tag{2.12}$$

где R – радиус кривизны траектории; ω – угловая скорость движения тела.

Модуль полного ускорение точки, движущейся по криволинейной траектории (рис. 2.3), согласно теореме Пифагора равен:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{2.13}$$

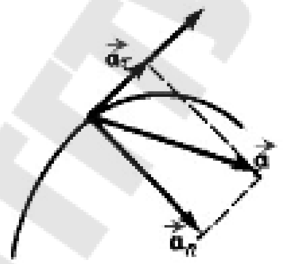


Рис. 2.3

Пусть на тело действует сила $\vec{F}$, тогда элементарная работа dA по перемещению тела на малую величину $d\vec{r}$ равна скалярному произведению этих векторов:

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = F dr \cos\alpha. \tag{2.14}$$

Здесь α – угол между направлением действия силы $\vec{F}$ и перемещением тела $d\vec{r}$.

Полная работа при перемещении тела из положения *1* в положение *2* равна:

$$A = \int_1^2 dA.$$

Для силы гравитационного взаимодействия двух точечных тел $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$ (G – гравитационная постоянная, m_1 и m_2 – массы тел, r – расстояние между ними), работа равна:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} G\frac{m_1 m_2}{r^2}dr = -G\frac{m_1 m_2}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} = G\frac{m_1 m_2}{r_1} - G\frac{m_1 m_2}{r_2} = W_1 - W_2. \quad (2.15)$$

Работа упругих сил $F = -kx$ (k – коэффициент упругости, x – координата вдоль смещения тела относительно точки равновесия) равна:

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kxdx = -\frac{kx^2}{2}\Bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{kx_1}{2} - \frac{kx_2}{2} = W_1 - W_2. \quad (2.16)$$

Работа сил тяжести в поле тяготения земли $\vec{F} = m\vec{g}$ (m – масса тела, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения) имеет вид:

$$A = -\int_{h_1}^{h_2} mgdh = -mgh\Big|_{h_2}^{h_1} = mgh_1 - mgh_2 = W_1 - W_2. \quad (2.17)$$

Знак «–» перед интегралом показывает, что направление вертикальной оси и силы тяжести противоположны.

В формулах (2.15)–(2.17) *работа сил зависит только от координаты точек начального и конечного положения тела и не зависит от формы траектории. Работа таких сил по замкнутой траектории равна нулю. Таким образом, данные силы являются консервативными или потенциальными силами*. Работа перемещения в поле консервативных сил представлена как разность двух значений некоторой функции координат – потенциальной энергии поля сил. *Потенциальная энергия* (W) *– это скалярная функция координат, убыль которой равна работе сил поля*.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух тел равна:

$$W = G\frac{m_1 m_2}{r}. \quad (2.18)$$

Потенциальная энергия упругих сил имеет вид:

$$W = \frac{kx^2}{2}. \quad (2.19)$$

Потенциальная энергия тела в поле тяготения земли равна:

$$W = mgh. \tag{2.20}$$

Найдем энергию движения тела, учитывая, что согласно второму закону Ньютона $F = ma$:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} madr = \int_{r_1}^{r_2} m \frac{d\upsilon}{dt} dr =$$

$$= \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m \frac{dr}{dt} d\upsilon = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \tag{2.21}$$

Получилось, что работу перемещения можно представить как разность двух значений некоторой функции скорости. Кинетическая энергия – это функция скорости, изменение которой связано с совершаемой работой. *Кинетическая энергия тела* (*E*) *– это величина, равная половине произведения массы тела на квадрат его скорости*: $E = \frac{m\upsilon^2}{2}$. Работа, совершаемая телом при изменении скорости движения, равна разности кинетических энергий тела, т. е.:

$$A = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = E_2 - E_1 = \Delta E. \tag{2.22}$$

Полная энергия (*U*) *системы равна сумме кинетической и потенциальной энергий*:

$$U = W + E. \tag{2.23}$$

Исходя из этого, закон сохранения механической энергии можно сформулировать в следующем виде: *в замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, сумма потенциальной и кинетической энергий постоянна*:

$$W + E = \text{const}.$$

Неконсервативные силы называются диссипативными силами. Наличие этих сил приводит к преобразованию (диссипации) энергии. В механике к диссипативным силам относятся *силы трения*. Если в замкнутой системе взаимодействующих тел действуют диссипативные силы, то работа этих сил равна изменению полной механической энергии системы.

Описание установки и методика измерений для лаборатории 2-508

В этом задании законы ускоренного движения тел изучаются с помощью универсальной установки «Машина Атвуда» для обеспечения как равномерного, так и равноускоренного движения с различными по величине ускорениями, внешний вид которого показан на рис. 2.4.

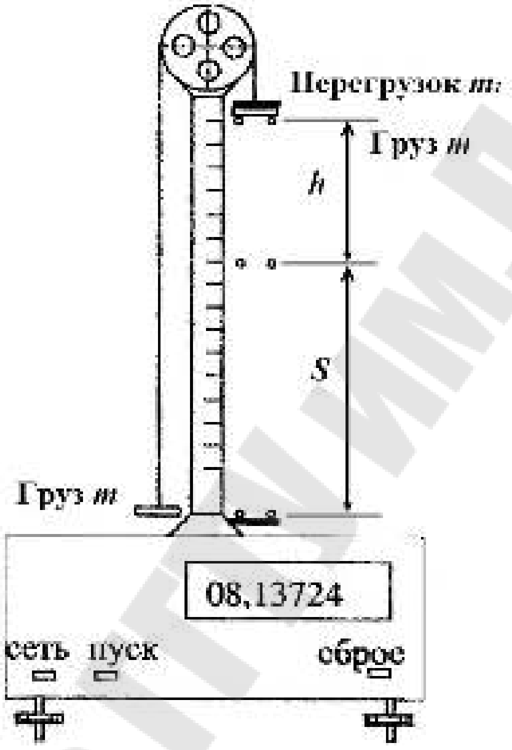


Рис. 2.4

В исходном положении нижняя грань правого грузика должна находиться на 1 мм выше линии старта, а тормоз нужно включить нажатием клавиши «пуск». Если не включено электропитание «сеть», то электромагнит не работает! На правый груз m положить перегрузок m_1 и отпустить клавишу «пуск». Грузы придут в ускоренное движение. После прохождения расстояния h перегрузок m_1 снимается съемным устройством, автоматически пускается секундомер и равномерно движущиеся грузы проходят путь S, в конце которого датчик тормоза останавливает секундомер. Зная его показания и пройденный путь S, выразим скорость, которую получает система тел за время разгона:

$$\upsilon = \frac{S}{t}.$$

Покажем схематически движение грузов ($m + m_1$) и m (рис. 2.5). Систему отсчета свяжем с центром блока, направив ось Z вниз.

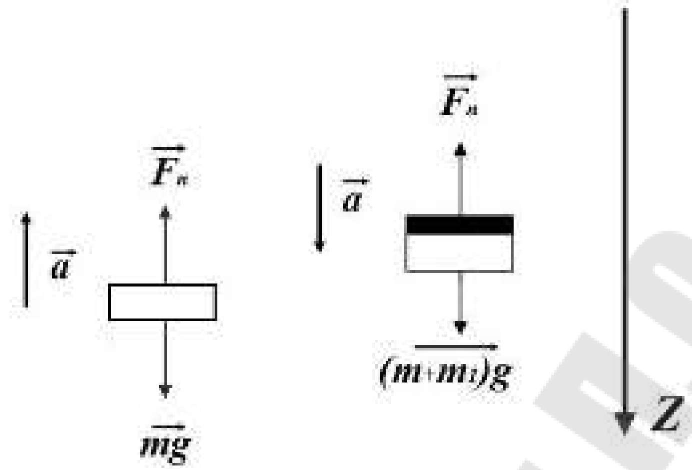


Рис. 2.5

Записав уравнение второго закона Ньютона для движения правого и левого грузов, получим систему уравнений, вычитая которые, получаем соотношение, из которого легко вычислить ускорение грузов:

$$(m+m_1)g - F_n = (m+m_1)a;$$

$$mg - F_n = m(-a);$$

$$m_1 g = 2ma + m_1 a;$$

$$a = \frac{m_1 g}{2m + m_1}.$$

Из закона сохранения механической энергии $mgh = \frac{m\upsilon^2}{2}$ следует:

$$\upsilon = \sqrt{2ah},$$

$$\text{или } \upsilon = \sqrt{\frac{2m_1 gh}{2m+m_1}},$$

откуда $g = \frac{(2m+m_1)}{m_1}\frac{S^2}{2ht^2}.$

Порядок выполнения работы для лаборатории 2-508

1. Включить установку в сеть 220 В и тумблером «сеть» зафиксировать верхний кронштейн в самом верхнем положении, а съемное кольцо в некотором среднем положении. Измерить по шкале на стойке расстояния h и S, проходимые при ускоренном движении и при равномерном движении, соответственно.

2. Нажимая и отпуская клавишу «пуск», найти положение, при котором блок расторможен. Опустив левый груз в крайнее нижнее положение, убедитесь, что правый груз своей нижней плоскостью расположен на 1 мм выше линии указателя. Включить тормоз блока, изменив положение клавиши «пуск».

3. Обнулить показания счетчика времени, нажав клавишу «сброс», положить на правый груз перегрузок (его получить у преподавателя) и нажать клавишу «пуск».

4. Повторить пункты 1–3 не менее трех раз и данные занести в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Номер	***S*, м**	***h*, м**	***t*, с**
1			
2			
3			
…			
n	<…>	<…>	<…>

5. Принимая массу груза m и перегрузка m_1 постоянной, по средним значениям $< S >$, $< h >$, $< t >$ вычислить среднее значение ускорения свободного падения по формуле

$$< g > = \frac{(2m + m_1)}{m_1} \frac{< S >^2}{2 < h >< t >^2}.$$

6. Произвести оценку погрешности прямых измерений для величин S, h, t и оценку косвенных измерений для величины g в соответствии с методическим указанием «Теория погрешностей» № 3419 при заданной надежности $\alpha = 0{,}95$.

7. Результат представить в виде:

$$g = \langle g \rangle \pm \Delta g, \quad \varepsilon_g = ..., \;\; \alpha = 0{,}95.$$

8. Используя формулу $<\upsilon>=<g><t>$, найти значение скорости перегрузка в момент снятия его с груза m. Эта скорость является начальной на отрезке S и конечной на отрезке h.

9. Найти значения полной механической энергии $(E_п + E_к)$ для перегрузка m_1 до начала движения $E_1 = m_1 <g><h>$ и после снятия перегрузка $E_2 = \frac{m_1 <\upsilon>^2}{2}$. Проверить справедливость закона сохранения полной механической энергии $E_1 = E_2$.

10. Расчеты можно повторить по пунктам 1–9 для разных перегрузков (m_2, $m_1 + m_2$) и расстояний (h и S).

11. Сделать выводы.

Описание установки и методика измерений для лаборатории 2-506

Ускорение свободного падения можно измерить более простым способом. Схема соответствующей установки приведена на рис. 2.6.

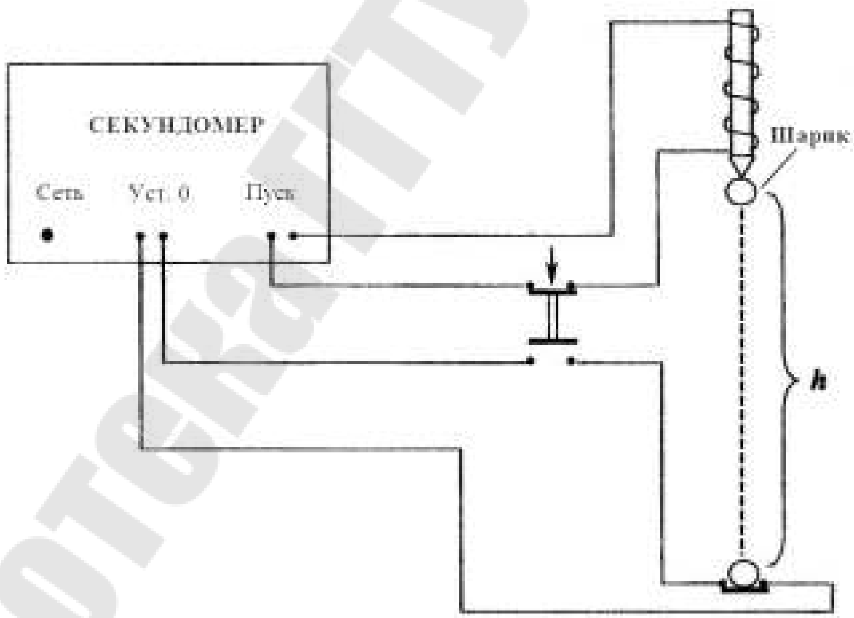


Рис. 2.6

Для измерения времени в установке используется секундомер, цепь прохождения импульсов которого можно прерывать (или замыкать) с помощью контактов, смонтированных на стойке. При подаче напряжения на электромагнит (шарик удерживается в верхнем положении) цепь оказывается разомкнутой. Один и тот же переключатель размыкает цепь питания электромагнита и замыкает цепь прохождения импульсов, которая может быть автоматически разорвана еще другими (нижними) контактами при ударе шарика об откидную площадку.

Используя формулу $S = \upsilon_0 t + \frac{gt^2}{2}$, получим при $S = h$, $\upsilon_0 = 0$, $h = \frac{gt^2}{2}$:

$$g = \frac{2h}{t^2}.$$

Измеряя высоту перемещения нижней точки шарика (эта точка определяет момент времени, когда прекращается отсчет времени падения) и время его свободного падения прямыми измерениями, можно по формуле $g = \frac{2h}{t^2}$ подсчитать ускорение свободного падения.

Зная время падения шарика, можно вычислить скорость в момент удара о платформу прерывателя: $\upsilon = \upsilon_0 + gt$, $\upsilon_0 = 0$, $\upsilon = gt$.

Тогда по формулам $E_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$ и $E_п = mgh$ можно определить кинетическую и потенциальную энергии, соответственно.

Порядок выполнения работы для лаборатории 2-506

1. Включить секундомер в сеть и прогреть 3–5 мин. Откидную площадку прерывателя поднять в горизонтальное положение, в этом положении она фиксируется магнитом.
2. Рычажок переключателя «пуск» на верхней платформе надо поднять вверх. Нажать клавишу «Уст. 0» секундомера.
3. Поднести к электромагниту стальной шарик и отпустить его. Измерить расстояние *h*, которое пройдет нижняя его точка до платформы. Расстояние *h* можно изменить, перемещая верхнюю платформу.
4. Щелкнуть тумблером «пуск». Шарик оторвется от электромагнита и будет падать, а секундомер отсчитывать время *t*. Ударом о площадку прерывателя он разорвет цепь поступления импульсов в секундомер и остановит его.
5. Измерения пунктов 1–4 повторить не менее трех раз, записывая результаты в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Номер	***h*, м**	***t*, с**
1		
2		
3		
…		
n	<…>	<…>

6. По средним значениям $<h>$ и $<t>$ вычислить среднее значение ускорения свободного падения по формуле

$$<g>=\frac{2<h>}{<t>^2}.$$

7. Произвести оценку погрешности прямых измерений для величин h, t и оценку косвенных измерений для величины g в соответствии с методическим указанием «Теория погрешностей» № 3419 при заданной надежности $\alpha = 0{,}95$.

8. Вычислить скорость шарика в момент удара об откидную площадку прерывателя по формуле $<\upsilon>=<g><t>$ и проверить справедливость закона сохранения механической энергии:

$$E_{\text{п}} = E_{\text{к}}.$$

9. Расчеты можно повторить по пунктам 1–8 для различных расстояний h, изменяя положение верхней платформы.

10. Сделать выводы.

Контрольные вопросы

1. Консервативные силы.
2. Кинематические уравнения равнопеременного движения.
3. Радиус-вектор $\vec{r}(t)$.
4. Связь между величинами: радиус-вектором, скоростью, ускорением.
5. Работа постоянной и переменной силы.
6. Связь работы с кинетической энергией.
7. Связь работы с потенциальной энергией.
8. Полная механическая энергия.
9. Закон сохранения механической энергии.
10. Связь между силой $\vec{F}$ и потенциальной энергией $W(r)$.

Лабораторная работа № 1-3
ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ПРИ УПРУГОМ УДАРЕ

Цель работы:

1. Изучить законы сохранения энергии и импульса при упругом ударе шаров.
2. Определить коэффициент восстановления скорости шаров.

Приборы и принадлежности: прибор для исследования столкновения шаров ГРМ-08.

Теоретическая часть

Силы, рассматриваемые в механике, делятся на консервативные и неконсервативные. *Консервативные силы – силы, работа которых не зависит от формы траектории, а зависит только от начальной и конечной точек приложения сил*. При движении по любой замкнутой системы работа консервативных сил равна нулю. Для неконсервативных (диссипативных) сил работа зависит от формы траектории пути. К неконсервативным силам относятся силы трения. При действии силы трения происходит преобразование (диссипация) механической энергии системы во внутреннюю энергию тел, т. е. кинетическую энергию движения атомов и молекул.

Совокупность материальных точек и тел, движущихся согласно законам классической механики и взаимодействующих друг с другом и с телами, не включенными в эту совокупность, называется механической системой. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются внутренними. Силы, с которыми на механическую систему действуют внешние тела, называются внешними. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется замкнутой.

При движении механической системы ее состояние меняется с течением времени. Однако существуют физические величины, которые обладают свойствами сохраняться во времени. К таким величинам относятся: импульс, энергия, момент импульса. Эти три величины имеют важное общее свойство аддитивности: их значения для системы, состоящей из большого числа частиц или тел, равны сумме значений для каждой из частиц в отдельности. Законы сохранения энергии, импульса и момента импульса являются универсальными законами природы.

Импульс. Закон сохранения импульса

Импульс тела (*количество движения*) $\vec{p}$ *– физическая величина, являющаяся мерой механического движения тела и равная произведению массы этого тела* m *на его скорость* $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Направление импульса совпадает с направлением вектора скорости. Импульс системы тел равен векторной сумме импульсов тел, составляющих систему:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i,$$

где $\vec{p}_i$ – импульс *i*-го тела.

Изменение импульса системы найдем, если продифференцируем последнее выражение по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \qquad (3.1)$$

Согласно 2-му закону Ньютона производная по времени импульса *i*-го тела системы равна:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_k \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i,$$

где $\vec{F}_{ik}$ – внутренние силы, т. е. силы, действующие на *i*-е тела со стороны *k*-го тела системы; $\vec{F}_i$ – внешние силы, действующие на *i*-е тело. Импульс системы тел равен векторной сумме импульсов тел системы $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt}$. Тогда производная импульса системы по времени равна:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \left(\sum_k \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i \right). \qquad (3.2)$$

Согласно третьему закону Ньютона: если на *i*-е тело действует со стороны *k*-го тела некоторая сила, то на *k*-е тело действует равная по величине сила и противоположная по направлению $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. То есть сумма всех внутренних сил, действующих в системе, равна нулю: $\sum_{ik} \vec{F}_{ik} = 0.$ Тогда $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{внеш}}$, где $\vec{F}_{\text{внеш}} = \sum_i \vec{F}_i$ – сумма внешних сил, действующих на тела системы. Если система тел является замкнутой, то внешние силы на систему не действуют и тогда $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0.$ Отсюда следует:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const}. \tag{3.3}$$

Формула (3.3) является выражением *закона сохранения импульса*: *импульс замкнутой системы тел остается постоянным*, *т. е. не меняется со временем*.

Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства. Пространство называется однородным, если параллельный перенос системы отсчета не меняет вид уравнений, описывающих физические законы.

Если сумма импульсов замкнутой системы тел остается постоянной, то импульс отдельных тел системы при их взаимодействии может меняться со временем. Импульс может сохраняться и у незамкнутой системы при условии, что результирующая всех внешних сил равна нулю.

Механическая энергия. Закон сохранении энергии

Тела могут обладать кинетической и потенциальной энергией. *Кинетическая энергия* (*E*) – *энергия движения тела*, *равная половине произведения массы тела* m *на квадрат его скорости* υ:

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{3.4}$$

Потенциальная энергия (*W*) – *энергия взаимодействия тел*, *зависящая от их расположения*. Выражения потенциальной энергии для разных видов поля сил различны (см. лаборатор. работу № 1-2). Сумма кинетической и потенциальной энергии системы тел называется механической энергией системы (*U*). Для механической системы выполняется закон сохранения энергии: *механическая энергия замкнутой системы тел*, *в которой действуют только консервативные силы*, *сохраняется*, *т. е.*:

$$U = E + W = \text{const}. \tag{3.5}$$

Убыль потенциальной энергии системы (разность значений потенциальной энергии в начальной и конечной точках пути) тратится на приращение кинетической энергии системы.

Если в системе действуют диссипативные силы трения и сопротивления, то закон сохранения механической энергии не выполняется. Работа внутренних диссипативных сил в системе тратится на увеличение внутренней энергии тел системы. Внутренняя энергия – это сумма энергий молекулярных взаимодействий и тепловых движений молекул тела. Увеличение внутренней энергии тела приводит к возрастанию температуры тела. Полная энергия механической системы тел равна сумме механической энергии и внутренней энергии.

Общий закон сохранения энергии – *в замкнутой системе тел энергия сохраняется*. Закон сохранения энергии есть следствие *однородности времени – уравнения, описывающие физические законы, одинаковы в любой момент времени*.

Удар абсолютно упругих и неупругих тел

Примером применения законов сохранения импульса и энергии является удар абсолютно упругих и неупругих тел. Ударом называется кратковременное взаимодействие тел, при котором происходит изменение скорости взаимодействующих тел. Различают две фазы удара.

1-я фаза столкновения – от момента соприкосновения, когда расстояние между центрами масс равно сумме радиусов шаров, и до момента, когда сближение прекращается. Сначала возникает и растет деформация шаров (тел), так как расстояние между центрами масс сокращается и, как следствие, возникают силы отталкивания, сообщающие телам соответствующие ускорения. В конце первой фазы тела имеют максимальную деформацию.

2-я фаза столкновения – расстояние между центрами тел увеличивается до тех пор, пока не прекратится их контакт. Деформация тел быстро уменьшается, а скорости тел изменяются.

Если после взаимодействия полностью восстанавливаются геометрические размеры и форма тел, то удар считается абсолютно упругим. Если вторая фаза удара отсутствует и после удара тела имеют одинаковую скорость, то удар называют абсолютно неупругим.

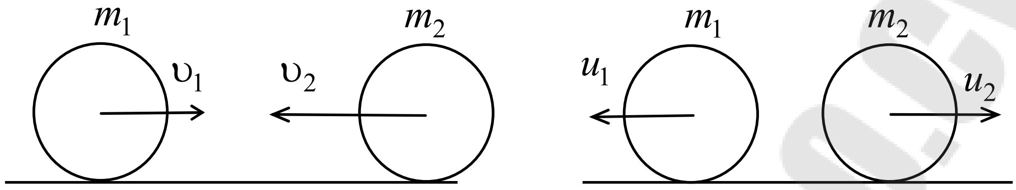
Абсолютно упругим называется удар, при котором тела полностью восстанавливают геометрические размеры и форму, а полная механическая энергия системы не изменяется.

Для абсолютно упругого удара выполняется закон сохранения механической энергии и закон сохранения импульса:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}+\frac{m_2\upsilon_2^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}; \tag{3.6}$$

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\,. \qquad (3.7)$$

Здесь m_i – масса тела; υ_i и u_i – скорость тела до соударения и после соударения, соответственно; индекс $i = 1$ – обозначает первый шар, $i = 2$ – второй шар.



а) *б*)

Рис. 3.1. Абсолютно упругое столкновение:
а – до удара; *б* – после удара

Если тела являются шарами, а удар центральным, то движение тел будет происходить по прямой линии (рис. 3.1). Направим ось X по направлению движения первого тела до соударения (вправо), тогда уравнение (3.7) можно записать в скалярном виде:

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = -m_1u_1 + m_2u_2\,. \qquad (3.8)$$

В формулах (3.6) и (3.8), группируя члены для первого тела в левую, а второго в правую сторону уравнений, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{2}\left(\upsilon_1^2 - u_1^2\right) = \dfrac{m_2}{2}\left(u_2^2 - \upsilon_2^2\right), \\ m_1\left(\upsilon_1 + u_1\right) = m_2\left(u_2 + \upsilon_2\right). \end{cases} \qquad (3.9)$$

Разделим первое уравнения в (3.9) на второе и, сокращая на массу тел, получим:

$$\frac{\upsilon_1^2 - u_1^2}{\upsilon_1 + u_1} = \frac{u_2^2 - \upsilon_2^2}{u_2 + \upsilon_2}\,. \qquad (3.10)$$

Используя формулу для разности квадратов, имеем:

$$\frac{(\upsilon_1 + u_1)(\upsilon_1 - u_1)}{\upsilon_1 + u_1} = \frac{(u_2 + \upsilon_2)(u_2 - \upsilon_2)}{u_2 + \upsilon_2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 - u_1 = u_2 - \upsilon_2\,. \qquad (3.11)$$

Подставляя u_2 из уравнения (3.11) в (3.8), получим скорость первого шара после удара через скорости шаров до удара:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.12)$$

Подставляя u_1 из уравнения (3.11) в (3.8), получим скорость второго шара после удара:

$$u_2 = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}. \qquad (3.13)$$

Абсолютно неупругий удар – столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое целое.

При абсолютно неупругом ударе выполняется только закон сохранения импульса. Тела после удара имеют одинаковую скорость. При абсолютно неупругом ударе нарушается закон сохранения механической энергии, так как часть ее переходит при ударе в потенциальную энергию деформации тела, а затем в тепло.

Запишем закон сохранения импульса для абсолютно неупругого удара:

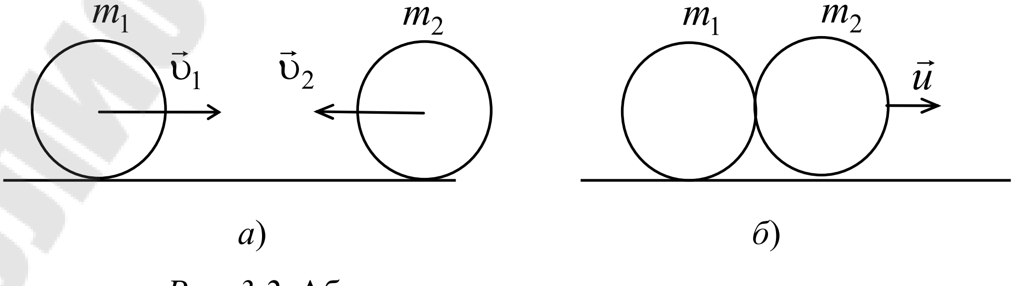
$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}. \qquad (3.14)$$

Тогда скорость тел после соударений равна:

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.15)$$

Если соударение шаров центральное, то, направив ось X по направлению движения первого тела (вправо), запишем закон сохранения импульса для абсолютно неупругого удара в скалярной форме (рис. 3.2):

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}. \qquad (3.16)$$



а) *б*)

Рис. 3.2. Абсолютно неупругое столкновение: *а* – до удара; *б* – после удара

Кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел за короткое время удара преобразуется в энергию или упругой деформации (в случае абсолютно упругого удара), или в тепловую (при абсолютно неупругом ударе).

Экспериментальные измерения показывают, что относительная скорость движения $u_{\text{отн}}$ после удара не достигает своего прежнего значения (до удара). *Отношение относительной скорости после и до удара называется коэффициентом восстановления скорости*:

$$K_u = \frac{u_{\text{после}}}{u_{\text{до}}} = \left|\frac{u_1 - u_2}{\upsilon_1 - \upsilon_2}\right|. \qquad (3.17)$$

Описание установки и метода измерений

Установка представляет собой модель двух математических маятников, две шкалы для измерения углов отклонения и пусковой электромагнит. Внешний вид установки (ГРМ-08) и расположение основных клавиш управления показан на рис. 3.3. В положении равновесия оба шарика должны касаться друг друга, а нити подвеса должны быть параллельны. Начало отсчета (ноль) угловых шкал должно находиться против соответствующих указателей шариков. Удар будет центральным, так как при ударе центры масс шаров лежат на линии удара. Шар с индексом «2» до удара будет покоиться.

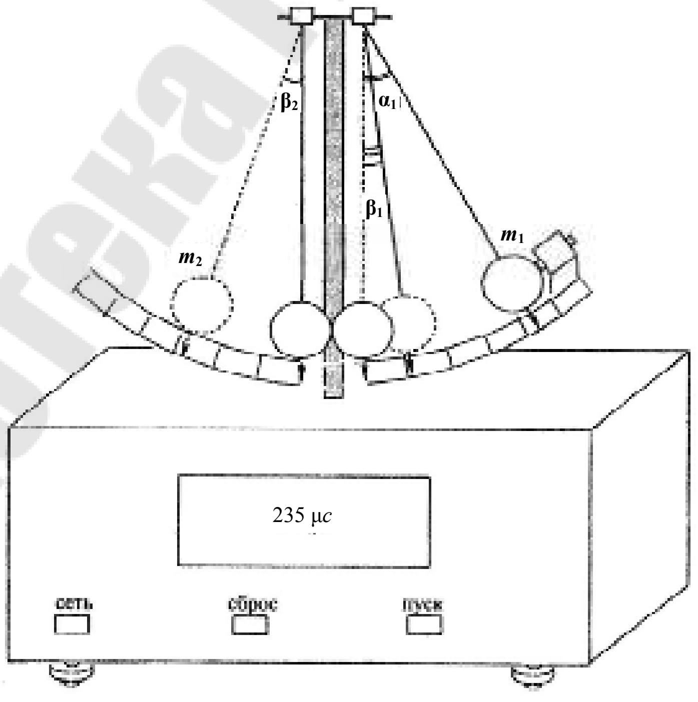


Рис. 3.3

Запишем закон сохранения импульса, считая, что первый шар после упругого удара движется в направлении, противоположном скорости υ_1:

$$m_1\upsilon_1 + 0 = -m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

Скорость первого шара υ_1 найдем из закона сохранения энергии: потенциальная энергия вышерасположенного шара переходит в кинетическую энергию его движения:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2}, \text{ откуда } \upsilon_1 = \sqrt{2gh_1}.$$

Стартовую высоту подъема первого шара можно вычислить геометрически, зная длину нити и угол отклонения:

$$h_1 = l - l\cos\alpha_1 = l(1-\cos\alpha_1), \text{ тогда } \upsilon_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha_1)}.$$

Используем формулу тригонометрии и, не вдаваясь в аналогичные выкладки, соответственно можем записать:

$$\upsilon_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_1}{2}, \quad \upsilon_2 = 0,$$

$$u_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\beta_1}{2}, \quad u_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\beta_2}{2},$$

где α_1 – начальный угол отклонения первого шара; β_1 – максимальный угол отклонения первого шара сразу после первого удара; β_2 – максимальный угол отклонения второго шара сразу после первого удара.

Порядок выполнения работы

1. Отвинтить шары и взвешиванием определить их массу m_1 и m_2. Измерить длину l подвесов шаров.

2. Навесить шары, клавишей «пуск» включить электромагнит и прицепить к нему шар, отклонив его на удобный угол α_1, и закрепить в таком положении электромагнит.

3. Отпустить клавишу «пуск». После первого столкновения шаров зафиксировать углы их максимального отклонения – β_1 и β_2. Результаты второго и последующих столкновений принимать во внимание не следует. Измерения повторить не менее трех раз. Вычислить средние значения углов $<\beta_1>$ и $<\beta_2>$.

4. По формулам $\upsilon_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha_1}{2}$, $u_1 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{<\beta_1>}{2}$, $u_2 = 2\sqrt{gl}\sin\frac{<\beta_2>}{2}$ определить средние скорости шаров до и после ударов. Найти импульсы шаров до и после удара:

$$p_1 = m_1\upsilon_1, \quad p_1' = m_1 u_1, \quad p_2' = m_2 u_2.$$

Проверить закон сохранения импульса.

5. Вычислить коэффициент восстановления скорости по формуле

$$k_\upsilon = \frac{|u_1 - u_2|}{|\upsilon_1 - \upsilon_2|}.$$

6. Сделать выводы.

Контрольные вопросы

1. Импульс тела.
2. Импульс силы.
3. Абсолютно неупругий удар (АНУ).
4. Абсолютно упругий удар (АУУ).
5. Закон сохранения импульса при АНУ 2-х шаров.
6. Закон сохранения импульса при АУУ 2-х шаров.
7. Закон сохранения энергии при АУУ 2-х шаров.
8. Закон сохранения энергии при АНУ 2-х шаров.
9. Коэффициент восстановления скорости.
10. Консервативные силы.

Лабораторная работа № 1-4
ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ

Цель работы:

1. Проверить справедливость закона сохранения момента импульса при неупругом ударе.

2. Определить скорость полета пули.

Приборы и принадлежности: баллистический крутильный маятник ГРМ-09, набор пулек, линейка.

Теоретическая часть

Момент силы

При вращательном движении все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения. Для получения вращения к телу нужно приложить силу, эффект которой определяется величиной силы и ее точкой приложения относительно оси вращения. Параметр, характеризующий силу, называется моментом силы. *Моментом силы относительно точки O является вектор, равный векторному произведению вектора, проведенного из точки O к точке приложения силы $\vec{r}$, на вектор силы $\vec{F}$*, т. е.:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{4.1}$$

Модуль момента силы равен:

$$M = Fr\sin\alpha, \tag{4.2}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Величина $l = r\sin\alpha$ называется плечом силы – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O (рис. 4.1).

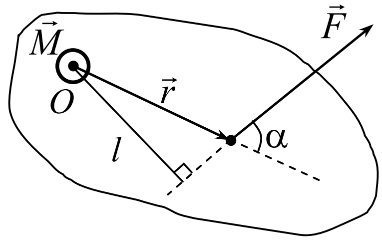


Рис. 4.1

Вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора $\vec{r}$, $\vec{F}$, и составляет с ними правую тройку векторов, т. е. если смотреть с конца вектора $\vec{M}$, переход от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ происходит против часовой стрелки.

Момент силы M_z относительно неподвижной оси Z есть скалярная величина, равная проекции на ось вектора момента силы $\vec{M}$ относительно произвольной точки, лежащей на этой оси. Если вектор $\vec{M}$ лежит на оси вращения, то $M_z = |\vec{M}|$, если вектор $\vec{M}$ перпендикулярен оси, то $M_z = 0$.

Момент инерции твердого тела

Моментом инерции материальной точки относительно оси вращения называется произведение массы материальной точки m на квадрат расстояния до оси r:

$$J = mr^2. \tag{4.3}$$

Момент инерции системы материальных точек относительно некоторой оси вращения равен:

$$J = \sum_i m_i r_i^2, \tag{4.4}$$

где m_i – масса i-й материальной точки; r_i – расстояние от i-й точки до оси вращения.

Момент инерции твердого тела относительно оси вращения находится с помощью интеграла:

$$J = \int_{(m)} r^2 dm. \tag{4.5}$$

Интегрирование производится по всему объему тела V.

Момент импульса

Моментом импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно неподвижной точки O называется векторное произведение вектора $\vec{r}$, проведенного из точки O к материальной точке, на вектор импульса этой материальной точки $\vec{p} = m\vec{u}$ (рис. 4.2), т. е.:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{u}]. \tag{4.6}$$

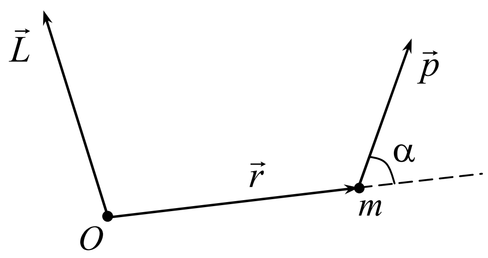


Рис. 4.2

Направления вектора момента импульса перпендикулярно векторам $\vec{r}$, $\vec{p}$ и составляет с ними правую тройку векторов. Модуль вектора $\vec{L}$ равен:

$$L = rp\sin\alpha = rmu\sin\alpha, \tag{4.7}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$.

Моментом импульса системы материальных точек относительно неподвижной точки O называется вектор $\vec{L}$, равный векторной сумме моментов импульса относительно той же точки всех материальных точек системы:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i, \vec{p}_i].$$

Здесь $\vec{r}_i$ – вектор, проведенный от точки O к i-й материальной точке; $\vec{p}_i$ – импульс i-й точки.

Моментом импульса L_z механической системы относительно оси вращения Z называют проекцию на эту ось вектора момента импульса $\vec{L}$, определенного относительно произвольной точки O данной оси.

Закон сохранения момента импульса

Выясним, какая механическая величина ответственна за изменение вектора момента импульса $\vec{L}$. Для этого продифференцируем векторное произведение $[\vec{r}_i \vec{p}_i]$ по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}[\vec{r}_i \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \vec{p}_i\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right]. \tag{4.8}$$

При выводе уравнения (4.8) учтено, что $\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \vec{p}_i\right] = [\vec{u}_i, \vec{p}_i] = 0$ как векторное произведение коллинеарных (т. е. параллельных) векторов.

Согласно второму закону Ньютона $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$, где $\vec{F}_i$ – результирующая всех внешних и внутренних сил, действующих на i-ю материальную точку. Следовательно, получим:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right]. \qquad (4.9)$$

Величина, стоящая в правой части уравнения (4.9), есть сумма моментов сил действующих материальных точек системы. Силы, с которыми взаимодействуют друг с другом две материальные точки, равны по величине, лежат на одной прямой и противоположны по направлению (рис. 4.3).

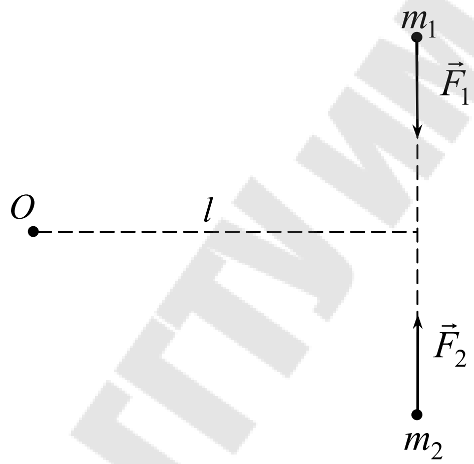


Рис. 4.3

Их моменты относительно произвольной точки O равны по величине и противоположны по направлению. Поэтому моменты внутренних сил попарно уравновешивают друг друга, и сумма моментов всех внутренних сил для любой системы материальных точек, и в частности для твердого тела, всегда равна нулю. Обозначая $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i$, момент внешних сил, действующих на систему материальных точек, равен:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad (4.10)$$

Уравнение (4.10) *называется уравнением моментов*: *производная по времени от момента импульса механической системы отно-*

сительно неподвижной точки равна моменту всех внешних сил, действующих на систему, относительно той же точки.

Из уравнения моментов следует, что если момент внешних сил, действующих на механическую систему, равен нулю, $\vec{M}=0$, то

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0 \text{ и } \vec{L}=\text{const}. \tag{4.11}$$

Выражение (4.11) есть математическая запись закона сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы относительно неподвижной точки не изменяется с течением времени.*

Подобно законам сохранения импульса и энергии, закон сохранения момента импульса принадлежит к числу фундаментальных законов природы, которые выходят за рамки классической механики. Закон сохранения момента импульса является следствием изотропности пространства. Изотропность пространства означает, что вид уравнений, описывающих физические законы, не меняется при поворотах системы координат. То есть в пространстве нет какого-то выделенного направления, относительно которого существует «особая» симметрия, все направления равноправны.

Запишем уравнение динамики вращательного движения в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат с началом в точке O:

$$\frac{dL_x}{dt}=M_x; \quad \frac{dL_y}{dt}=M_y; \quad \frac{dL_z}{dt}=M_z. \tag{4.12}$$

Здесь L_x, L_y, L_z – проекции момента импульса на оси X, Y, Z; M_x, M_y, M_z – проекции соответствующих моментов сил.

Если момент внешних сил относительно некоторой неподвижной оси равен нулю, то момент импульса частицы относительно этой оси остается постоянным. Если $M_z=0$, то $L_z=\text{const}$.

Найдем связь между моментом импульса L_z вращающейся точки массой m относительно оси вращения Z и угловой скоростью ω (рис. 4.4):

$$L_z=mur\sin\alpha. \tag{4.13}$$

Учитывая связь линейной и угловой скорости $u=R\omega$ и $r\sin\alpha=R$, получим:

$$L_z = J\omega. \quad (4.14)$$

Здесь $J = mR^2$ – момент инерции материальной точки относительно оси вращения.

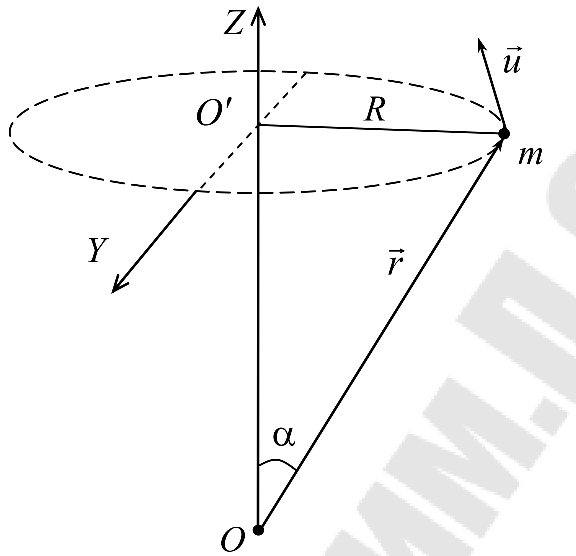


Рис. 4.4

Описание установки и метода измерений

С помощью баллистического крутильного маятника ГРМ-09 (рис. 4.5) определим скорость пули, кинетическую энергию пули и маятника после удара.

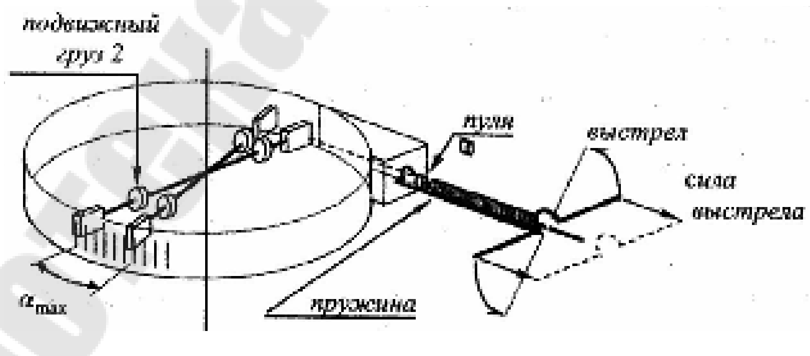


Рис. 4.5

Баллистический маятник является разновидностью физического маятника. Горизонтально летящая пуля попадает в баллистический маятник и застревает в нем в результате абсолютно неупругого удара. Характер сил, возникающих в процессе взаимодействия, нам не известен. Поэтому применим для решения этой задачи закон сохранения момента импульса.

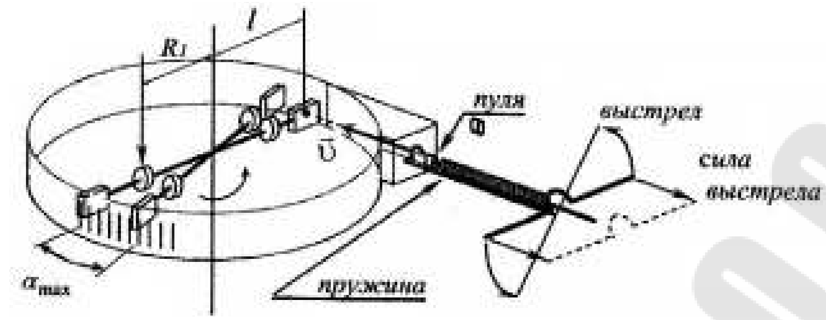


Рис. 4.6

Момент импульса пули относительно оси вращения до удара равен $m\upsilon l$, а неподвижного маятника – нулю. После удара момент импульса системы «маятник–пуля» равен: $(J_M + ml^2)\omega$. По закону сохранения момента импульса:

$$m\upsilon l = (J_M + ml^2)\omega,$$

где m – масса пули; υ – скорость пули; J_M – момент инерции баллистического маятника; l – расстояние от оси вращения до места попадания пули на маятнике; ω – угловая скорость вращения системы.

Тогда $\upsilon = \dfrac{(J_M + ml^2)\omega}{ml}$.

Момент инерции баллистического маятника рассчитан с учетом его формы и зависит от местоположения перемещающихся грузов R относительно оси вращения. Момент инерции крутильного маятника равен: $J_M = (7{,}759 \cdot 10^{-4} + 0{,}376R^2)$ кг · м^2.

Порядок выполнения работы

1. Максимально сблизить грузы 2 (рис. 4.5) и измерить расстояние от оси вращения до центра масс этих грузов R_1 (рис. 4.6).

2. Установить маятник в таком положении, при котором указатель угла его отклонения (в положении равновесия) показывает ноль.

3. Выстрелить из стреляющего устройства и зафиксировать максимальный угол отклонения маятника α_1. Опыт повторить 3 раза. Вычислить среднее значение угла отклонения $< \alpha_1 >$ в градусах, а за-

тем перевести его в радианы. Измерить расстояние от оси вращения до центра попадания пули l.

4. Включить установку и обнулить счетчик времени. Отклонить маятник на угол 30–40° и измерить время t_1 десяти полных колебаний. Вычислить среднее значение времени $<t_1>$.

5. Вычислить период колебаний: $<T_1>=\dfrac{<t_1>}{n}$, где $n = 10$.

Вычислить $\omega_0=\dfrac{2\pi}{<T_1>}=\dfrac{2\pi n}{<t_1>}$, где ω_0 – собственная частота колебаний. Тогда угловая скорость вращения системы $\omega_1=\omega_0<\alpha_1>$.

6. Вычислить момент инерции баллистического маятника: $J_{M_1}=(7{,}759\cdot 10^{-4}+0{,}376R_1^2)$ и момент инерции системы «маятник–пуля» $(J_{M_1}+ml^2)$.

7. Результаты измерений и расчетов занести в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Номер	***m*, кг**	***l*, м**	***R*₁, м**	**α_1, град**	***t*₁, с**	**α_1, рад**	**$(J_{M_1}+ml^2)$**
1							
2							
3							
<…>				<…>	<…>	<…>	

8. По формуле $\upsilon_1=\dfrac{(J_{M_1}+ml^2)\omega_1}{ml}$ определить скорость полета пули.

9. Начальную кинетическую энергию пули вычислить по формуле $E_к^{пули}=\dfrac{m\upsilon_1^2}{2}$.

10. Кинетическую энергию баллистического маятника после абсолютно неупругого удара вычислить по формуле $E_к^{маят}=\dfrac{(J_{M_1}+ml^2)\omega_1^2}{2}$. Сравнить ее с кинетической энергией пули $E_к^{пули}$ и сделать выводы.

11. Максимально отдалить грузы 2 (рис. 4.5) и измерить расстояние R_2 от оси вращения до центра груза (рис. 4.6).

12. Повторить пункты 2–6. Результаты измерений записать в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Номер	***m*, кг**	***l*, м**	***R*₂, м**	α_2**, град**	***t*₂, с**	α_2**, рад**	$(J_{M_2} + ml^2)$
1							
2							
3							
<…>				<…>	<…>	<…>	

13. По формуле $\upsilon_2 = \dfrac{(J_{M_2} + ml^2)\omega_2}{ml}$ определить скорость полета пули.

14. Проверить закон сохранения момента импульса, сравнив результаты пунктов 8 и 13, и сделать выводы.

Контрольные вопросы

1. Импульс тела.
2. Закон сохранения импульса при абсолютно упругом и абсолютно неупругом ударах.
3. Кинетическая энергия вращательного движения.
4. Закон сохранения энергии при абсолютно упругом и абсолютно неупругом ударах.
5. Момент импульса.
6. Закон сохранения момента импульса.
7. Уравнение моментов.
8. Первый закон Ньютона.
9. Второй закон Ньютона.
10. Третий закон Ньютона.

Лабораторная работа № 1-5
ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ КРЕСТООБРАЗНОГО МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Цель работы:

1. Определить момент инерции маятника и найти момент силы трения.

2. Исследовать зависимость момента инерции системы от распределения массы относительно оси вращения.

Приборы и принадлежности: маятник Обербека (крестообразный маховик с горизонтальной осью вращения), инертные тела (4 шт.), электронный секундомер, линейка, штангенциркуль, набор грузов.

Теоретическая часть

Вращательное движение

Вращательным движением или вращением называется такое движения тела, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения.

Для описания вращательного движения вводятся следующие динамические параметры: момент инерции, момент силы, момент импульса тела. Аналогами их в поступательном движении являются масса, сила, импульс тела.

Основное уравнение вращательного движения

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω (рис. 5.1).

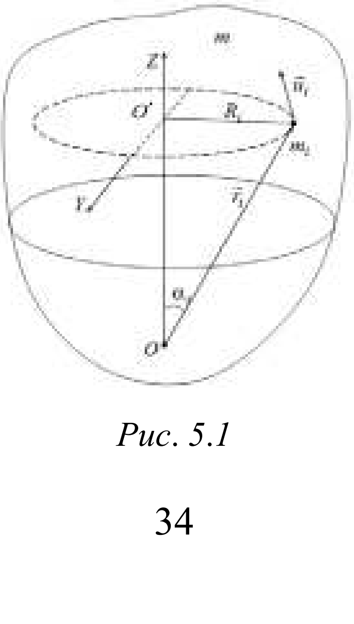


Рис. 5.1

Найдем проекцию момента импульса тела на ось Z.

Разбивая мысленно тело на элементарные массы Δm_i, получим, что момент импульса i-й элементарной массы относительно точки O равен:

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{u}_i\right], \tag{5.1}$$

где $\vec{u}_i$ – линейная скорость i-й элементарной массы.

Модуль линейной скорости i-й элементарной массы при ее вращательном движении вокруг оси OZ имеет вид:

$$u_i = R_i \omega. \tag{5.2}$$

Здесь R_i – расстояние от элементарной массы до оси вращения. Учитывая (2), получим, что проекция $\vec{L}_i$ на ось OZ равна:

$$L_{iz} = \Delta m_i u_i r_i \sin\alpha_i = \Delta m_i R_i^2 \omega. \tag{5.3}$$

Здесь учтено, что $r_i \sin\alpha_i = R_i$. Суммируя по всем элементарным массам, получим момент импульса тела относительно оси OZ:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2\right)\omega. \tag{5.4}$$

Выражение, стоящее в скобках формулы (4), называется моментом инерции тела и обозначается буквой J. Тогда формулу (5.4) можно переписать в следующем виде:

$$L_z = J\omega. \tag{5.5}$$

Дифференцируя выражение (5.5) по времени и учитывая уравнение моментов $\frac{dL_z}{dt} = M_z$, получим:

$$M_z = J\frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon, \tag{5.6}$$

где ε – угловое ускорение вращения тела вокруг оси OZ.

Уравнение (5.6) *называется основным уравнением вращательного движения*.

Момент инерции тела

Момент инерции тела является мерой его инерции при вращательном движении и зависит не только от массы данного тела, но и от распределения данной массы относительно оси вращения. Эта величина скалярная. Единица измерения – кг · м^2. В динамике вращательного движения момент инерции играет ту же роль, что и масса в динамике поступательного движения. Момент инерции определяет величину углового ускорения, получаемого телом под действием момента силы.

Момент инерции материальной точки относительно некоторой оси вращения равен:

$$J = mr^2, \tag{5.7}$$

где m – масса материальной точки; r – расстояние от точки до оси вращения.

В силу аддитивности момента инерции для системы материальных точек момент инерции имеет вид:

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2, \tag{5.8}$$

где m_i – масса i-й материальной точки; r_i – расстояние i-й точки от оси вращения; n – число материальных точек в системе.

Для протяженных тел момент инерции определяется как сумма моментов инерции отдельных элементарных объемов dV, на которые можно разбить данное тело и которые можно считать материальными точками:

$$J = \int_{(m)} r^2 dm, \tag{5.9}$$

где $dm = \rho dV$ – масса элементарного объема; ρ – плотность тела в данной точке.

Для однородных тел, у которых $\rho = \text{const}$, момент инерции вычисляется по формуле

$$J = \rho \int_{(V)} r^2 dV. \tag{5.10}$$

Теорема Штейнера

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется по *теореме Штейнера*: *мо-*

мент инерции тела J_O относительно произвольной оси вращения O равен сумме момента инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс J_C, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями, т. е.:

$$J_O = J_C + md^2, \tag{5.11}$$

где J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела; J_O – искомый момент инерции относительно параллельной оси; m – масса тела; d – расстояние между указанными осями.

Момент инерции тонкого обода (обруча)

Все точки обода находятся на одинаковом расстоянии R от центра обода. Используя свойства аддитивности момента инерции, получим, что момент инерции обода относительно оси, перпендикулярной ободу и проходящей через его центр, равен:

$$J = mR^2. \tag{5.12}$$

Используя теорему Штейнера, получим, что момент инерции обода относительно оси, перпендикулярной ободу и проходящей через обод, равен:

$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2. \tag{5.13}$$

Момент инерции однородного стержня

Пусть дан очень тонкий стержень длиной l. Причем его масса распределена вдоль его длины равномерно. Разобьем его на бесконечно малые элементы длиной dx (рис. 5.2).

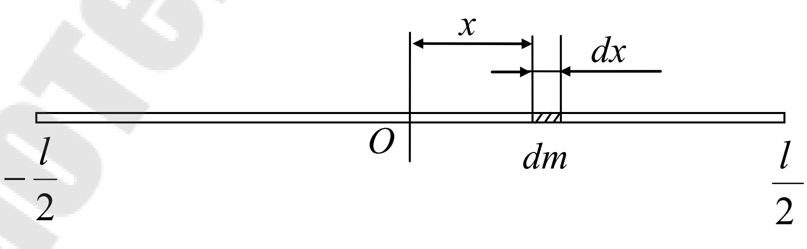


Рис. 5.2

Элементарные массы стержня равны $dm = \rho dV = \rho S dx$, где S – площадь поперечного сечения стержня. Момент инерции элементарной массы относительно оси вращения, перпендикулярной к длине стержня и проходящей через центр масс, будет равен: $dJ = dm\,x^2 = \rho S x^2\,dx$. Момент инерции всего стержня можно найти как интегральную сумму от последнего выражения:

$$J = \int\limits_{-l/2}^{l/2} \rho S x^2 dx = \left.\frac{\rho S x^3}{3}\right|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho S l^3}{12}. \qquad (5.14)$$

Так как масса стержня равна $m = \rho S l$, то момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр масс (середину) и перпендикулярно ему, равен:

$$J = \frac{ml^2}{12}. \qquad (5.15)$$

Используя теорему Штейнера, получим момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню:

$$J = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{3}. \qquad (5.16)$$

Момент инерции диска

Диск радиуса R с образующей h разбиваем на бесконечно тонкие ободы толщиной dx, причем вся масса такого обода будет находиться на одинаковом расстоянии от оси вращения, если ось проходит через центр масс и перпендикулярна плоскости диска (рис. 5.3).

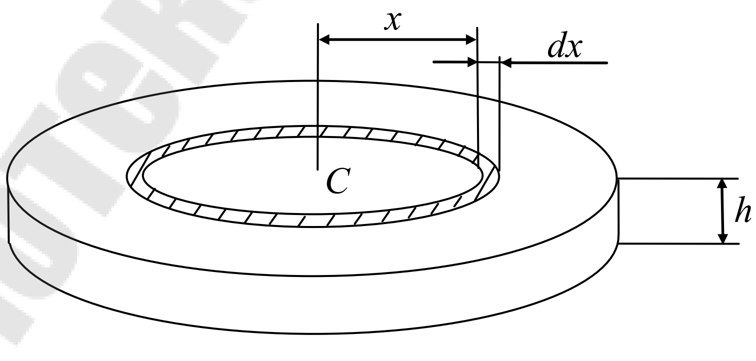


Рис. 5.3

Момент инерции выделенного обода равен $dJ = dm \cdot x^2$. Масса выделенного обода равна $dm = \rho\, dV = \rho\, 2\pi x h dx$. Момент инерции диска складывается из моментов инерции составляющих его ободов, радиусы которых меняются от нуля до радиуса диска R:

$$J = \int_0^R 2\pi\rho h x^3 dx = \left.\frac{2\pi\rho h x^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi\rho h R^4}{2}. \tag{5.17}$$

Так как масса диска равна $m = \rho V = \rho\pi R^2 h$, то для момента инерции диска относительно оси, перпендикулярной диску и проходящей через его центр, получим:

$$J = \frac{mR^2}{2}. \tag{5.18}$$

Используя теорему Штейнера, получим, что момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной диску и проходящей через его край, равен:

$$J = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3mR^2}{2}. \tag{5.19}$$

Момент инерции шара

Вычислим момент инерции шара радиуса R относительно оси Z, проходящей через его центр масс. Для этого разобьем шар секущими параллельными плоскостями на диски, радиусы которых будут изменятся от 0 до R в обоих полушариях (рис. 5.4).

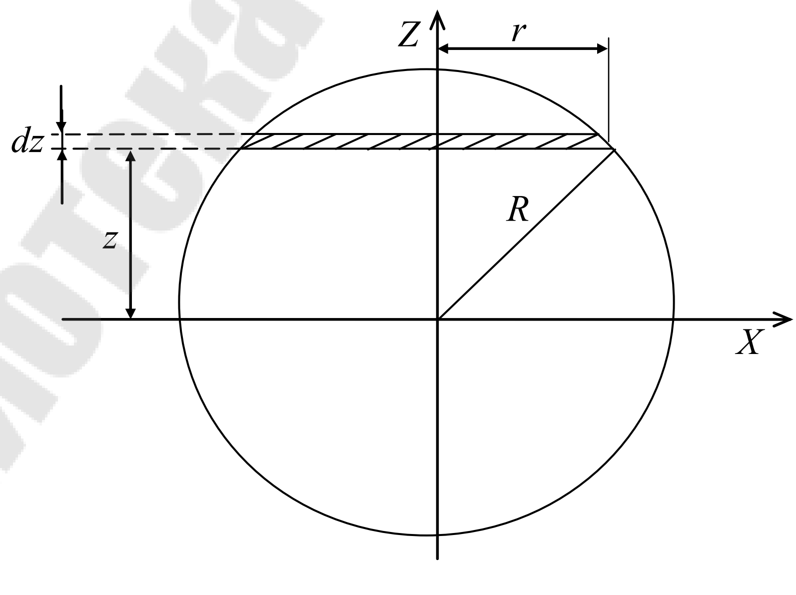


Рис. 5.4

Объем выделенного диска будет равен: $dV = \pi r^2\, dz$, а его момент инерции относительно оси Z равен: $dJ = \dfrac{dm\, r^2}{2}$. Момент инерции шара равен сумме моментов инерции дисков, радиусы которых изменяются от нуля до R:

$$J = \int_{-R}^{R} dJ = \int_{-R}^{R} \frac{r^2 dm}{2}. \tag{5.20}$$

Для квадрата радиуса выделеных дисков, используя теорему Пифагора, получим: $r^2 = R^2 - z^2$, а их масса: $dm = \rho\pi r^2 dz = \rho\,\pi(R^2 - z^2)$. Подставляя данные выражения в (5.20), имеем:

$$J = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - z^2\right)^2 dz. \tag{5.21}$$

Возводя в квадрат скобки и используя свойства аддитивности интеграла, получим:

$$J = \frac{\pi\rho R^4}{2}\int_{-R}^{R} dz - \pi\rho R^2 \int_{-R}^{R} z^2 dz + \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{R} z^4 dz =$$

$$= \pi\rho R^5 - \frac{2\pi\rho R^5}{3} + \frac{\pi\rho R^5}{5} = \frac{8\pi\rho R^5}{15}. \tag{5.22}$$

Учитывая, что масса шара равна $m = \rho V = \dfrac{4\pi\rho R^3}{3}$ для момента инерции однородного шара относительно оси проходящей через его центр, получим:

$$J = \frac{2mR^2}{5}. \tag{5.23}$$

Используя теорему Штейнера, получим, что момент инерции однородного шара относительно оси проходящей через его край равен:

$$J = \frac{2mR^2}{5} + mR^2 = \frac{7mR^2}{5}. \tag{5.24}$$

В заключение приведем значения моментов инерции (табл. 5.1) для некоторых тел (тела считаются однородными, m – масса тела).

Таблица 5.1

Тело	**Положение оси**	**Момент инерции**
Полый тонкостенный цилиндр (обод) радиуса *R*	Перпендикулярно оси симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом *R*	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом *R*	Ось, лежащая на образующей	$\frac{3}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной *l*	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной *l*	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом *R*	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$
Шар радиусом *R*	Ось лежит на поверхности шара	$\frac{7}{5}mR^2$

Кинетическая энергия вращения

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$E_{\text{вращ}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i {u_i}^2}{2}. \tag{5.25}$$

Подставляя в (5.25) значения для угловой скорости вращения этих объемов $\omega = \frac{u_i}{r_i}$, получим:

$$E_{\text{вращ}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} {r_i}^2 = \frac{\omega^2}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i {r_i}^2\right). \tag{5.26}$$

Учитывая, что выражение, стоящее в скобках, согласно формуле (5.8) равно моменту инерции тела, получим, что кинетическая энергия вращающегося тела равна:

$$E_{\text{вращ}} = \frac{J\omega^2}{2}. \tag{5.27}$$

Формула (5.27) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

В случае плоского движения тела, например, цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$E = \frac{mu_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}, \tag{5.28}$$

где m – масса катящегося тела; u_C – скорость центра масс тела; J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр его масс; ω – угловая скорость тела.

Описание установки и методика измерений

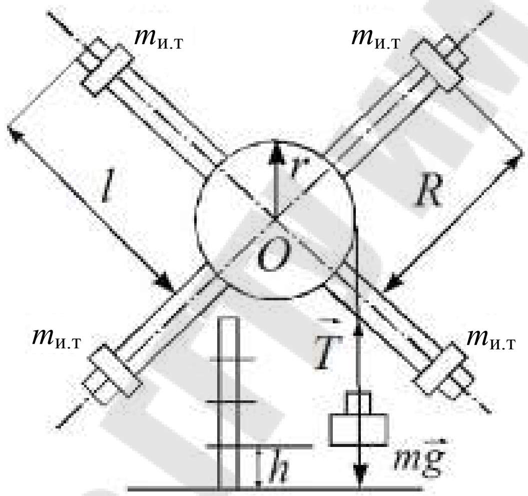


Рис. 5.5

На рис. 5.5 представлена принципиальная схема установки, с помощью которой производятся исследования. Четыре стержня укреплены на втулке под прямым углом. На стержнях находятся инертные тела массой $m_{и.т}$ каждый. Втулки и шкив насажены на общую ось. Ось закреплена в подшипниках так, что вся система может вращаться вокруг горизонтальной оси. Передвигая грузы по стержням, можно легко изменять момент инерции I системы. На шкив намотана нить, к которой прикреплена платформа известной массы. На платформу кладется груз, нить натягивается и создает вращающий момент:

$$M = Tr,$$

где T – сила натяжения нити, r – радиус шкива.

Кроме того, на маятник действует тормозящий момент силы трения в оси $M_{\text{тр}}$, который направлен в противоположную сторону M.

Силу T можно найти из уравнения движения платформы с грузом:

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$$

или в скалярном виде:

$$mg - T = ma,\ T = mg - ma,$$

где m – масса платформы с грузом $m = m_{\text{пл}} + m_{\text{гр}}$; a – ускорение платформы с грузом.

Ускорение a связано с угловым ускорением ε соотношением:

$$\varepsilon = \frac{a}{r}.$$

С учетом этого основное уравнение динамики вращения твердого тела в скалярной форме имеет вид:

$$I\varepsilon = M - M_{\text{тр}} = m(g - a)r - M_{\text{тр}}.$$

В данное уравнение входит ускорение a платформы. Это ускорение можно определить, измеряя время t, в течение которого платформа опускается на расстояние h:

$$a = \frac{2h}{t^2}.$$

Тогда основное уравнение динамики вращения твердого тела принимает вид:

$$I\varepsilon = m(g - \frac{2h}{t})r - M_{\text{тр}}.$$

Для момента инерции I получаем выражение:

$$I = \frac{m(g - \frac{2h}{t^2})r - M_{\text{тр}}}{\varepsilon}$$

или с учетом ускорения a платформы:

$$I = \frac{m(g - \frac{2h}{t^2})r - M_{\text{тр}}}{\frac{2h}{rt^2}}.$$

Порядок выполнения работы

Задание № 1. Определить момент инерции маятника и нахождение момента силы трения

1. Установить высоту падения груза h перемещением подвижного кронштейна.

2. Закрепить четыре инертных тела на любом одинаковом расстоянии $R \geq 0$ от оси маятника. Маятник должен находиться в равновесии.

3. Изменяя массу груза $m_{\text{гр}}$ на платформе, для каждого груза измерить время t движения платформы три раза. Учесть, что масса платформы с грузом в каждом случае равна $m = m_{\text{пл}} + m_{\text{гр}}$. Полученные данные занести в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Номер	$m_{\text{гр}} \cdot 10^{-3}$, кг	$(m_{\text{пл}} + m_{\text{гр}}) \cdot 10^{-3}$, кг	t, с	$<t>$, с	I, кг · м^2
1					
2					
3					

4. Вычислить значения a, ε, M для каждого груза по формулам:

$$a = \frac{2h}{<t>^2}; \;\; \varepsilon = \frac{a}{r}; \;\; M = m(g - \frac{2h}{<t>^2})r,$$

где $<t>$ – среднее время движения платформы с грузом.

5. Построить график зависимости $\varepsilon = f(M)$, отмечая точки на координатной плоскости. Затем провести усредненную прямую так, чтобы половина точек лежало выше, а половина ниже прямой.

6. Продолжая прямую до пересечения с осью абсцисс (экстраполируя), определить момент силы трения $M_{\text{тр}}$ (рис. 5.6).

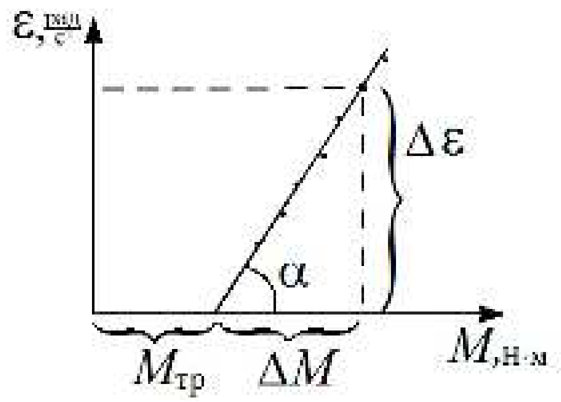


Рис. 5.6

7. По графику определить момент инерции крестообразного маятника I. Величина I определяется как тангенс угла наклона прямой графика к оси абсцисс. Для этого необходимо для одного любого значения M определить соответствующее значение ε путем восстановления перпендикуляра до пересечения с прямой (рис. 5.6).

Так как $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{I} = \dfrac{\Delta\varepsilon}{\Delta M}$, то

$$I = \frac{\Delta M}{\Delta\varepsilon}.$$

Здесь ΔM – разность между моментом силы для данной точки и моментом силы трения $M_{тр}$,

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_0 = 0$.

Задание № 2. Исследовать зависимость момента инерции системы от распределения массы относительно оси вращения

1. Установить высоту падения h платформы с грузом.

2. На стержнях закрепить четыре инертных тела на расстоянии R от оси вращения.

3. Установить на платформу груз произвольной массы $m_{гр}$.

4. Измерить время t движения платформы.

5. Изменяя расстояние R инертных тел до оси вращения, повторить пункты 2–4. Полученные данные занести в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Номер	***R* · 10⁻², м**	***t*, с**	**<*t*>, с**	***I*, кг · м²**
1	0			
2				
3				
4				

6. Для каждого R вычислить момент инерции системы I с учетом силы трения по формуле

$$I = \frac{m(g - \dfrac{2h}{< t >^2})r - M_{\text{тр}}}{\dfrac{2h}{r < t >^2}}.$$

7. Момент силы трения системы $M_{\text{тр}}$ взять из 1-го задания.

8. Построить график зависимости $I = f(R)$.

Контрольные вопросы

1. Момент силы.
2. Момент инерции.
3. Момент импульса.
4. Закон сохранения момента импульса.
5. Основное уравнение динамики вращательного движения.
6. Теорема Штейнера (записать формулу и определение).
7. Кинетическая энергия вращательного движения.
8. Связь момента импульса с моментом инерции.
9. Угловое ускорение.
10. Угловая скорость.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М. : Высш. шк., 2004. – 542 с.
2. Савельев, И. В. Курс общей физики / И. В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – Т. 1. – 350 с.
3. Детлаф, А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М. : Академия, 2003. – 720 с.
4. Сивухин, Д. В. Общий курс физики / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1989. – Т. 1. – 576 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Пискунов Сергей Васильевич
Проневич Олег Иванович
Шаповалов Петр Степанович

МЕХАНИКА

Лабораторный практикум по курсу «Физика» для студентов технических специальностей дневной формы обучения

Электронный аналог печатного издания

Редактор *А. В. Власов*
Компьютерная верстка *М. В. Кравцова*

Подписано в печать 10.09.13.
Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Ризография. Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 3,0.
Изд. № 103.
http://www.gstu.by

Издатель и полиграфическое исполнение:
Издательский центр Учреждения образования
«Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого».
ЛИ № 02330/0549424 от 08.04.2009 г.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48