

**ОПИСАНИЕ
ИЗОБРЕТЕНИЯ
К ПАТЕНТУ**
(12)

РЕСПУБЛИКА БЕЛАРУСЬ



(19) **ВУ** (11) **2200**

(13) **С1**

(51)⁶ G 06G 7/48

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПАТЕНТНЫЙ
КОМИТЕТ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**(54) СПОСОБ РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

(21) Номер заявки: 2631
(22) 26.12.1994
(46) 30.06.1998

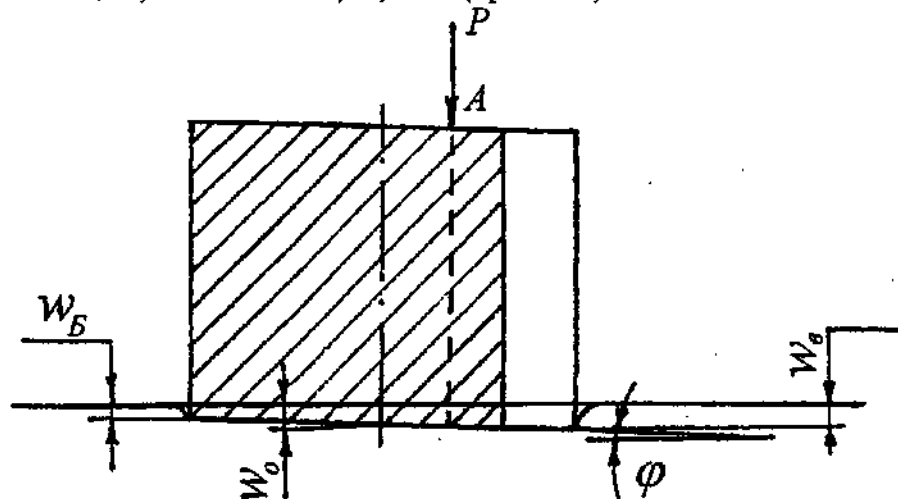
(71) Заявитель: Гомельский политехнический институт (ВУ)
(72) Авторы: Тариков Г.П., Россол А.И., Кенько В.М. (ВУ)
(73) Патентообладатель: Гомельский политехнический институт (ВУ)

(57)

Способ решения пространственных контактных задач теории упругости, заключающийся в том, что на токопроводящий аналог площади контакта нагруженного штампа с упругим полупространством подают переменное электрическое напряжение, моделирующее линейное и угловое перемещения соответствующих участков основания штампа, при этом в качестве токопроводящего аналога используют набор изолированных друг от друга пластин, измеряют с помощью зонда величину созданного электрического поля, а на основании полученного значения вычисляют плотность заряда токопроводящего аналога и величину реактивного давления на площади контакта, отличающийся тем, что в качестве аналога используют набор пластин, выполненных в виде параллельных полос, которые ориентируют нормально к плоскости приложения действующей на штамп нагрузки, а по характеру распределения величины плотности заряда дополнительно судят о размерах ядра сечения.

(56)

1. Файнбурд В. М. Использование электростатической аналогии в решении пространственной контактной задачи упругости. // Сопротивление материалов и теория сооружений.-В. XI.-Киев, 1970.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов.-М.: Наука, 1974.-с. 158.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.-М.: Наука, 1980.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости.-М.: Гостехиздат, 1955.
5. А. с. СССР 570905, МКИ G06G 7/48, 1977 (прототип).



Фиг. 1

ВУ 2200 С1

Изобретение относится к области экспериментальных способов решения контактных задач и может быть применено при расчете на прочность контактируемых деталей машин, при проектировании и расчете червячных и зубчатых передач, при обработке металлов давлением, при расчете фундаментов под различные инженерные сооружения и механизмы.

Известен способ решения контактной задачи с помощью электростатического поля [1], заключающийся в том, что на токопроводящую пластину-аналог площадки контакта центрально нагруженного штампа подается постоянный электрический потенциал, создающий электростатическое поле пластины. Затем с помощью зонда и измерительного прибора определяется плотность заряда в различных точках поверхности пластины-аналога, что в принятом масштабе дает значения реактивного давления в соответствующих точках площадки контакта.

Однако данным способом невозможно решить задачу о вдавливании штампа с плоским основанием в упругое полупространство в случае нагружения штампа внецентренно приложенной к нему силой, т.к. невозможно моделировать перемещение участков основания штампа на различную глубину.

Известно также решение способом электроконтактного моделирования задачи о вдавливании кругового штампа с плоским основанием под действием центрально приложенной нагрузки, когда пластину-аналог площадки контакта выполняют в виде набора концентрично расположенных токопроводящих колец, на каждое из которых подают одинаковый электрический потенциал, моделирующий перемещение всех точек основания штампа [2]. С помощью зонда определяют плотность заряда в рассматриваемых точках пластины-аналога и, по критериям подобия, определяют реактивное давление в соответствующих точках области контакта.

При внецентренном нагружении плоского штампа различные участки его основания перемещаются на различную глубину и, подавая одинаковый потенциал на каждое кольцо, определить реактивное давление на каждом участке основания известным способом не представляется возможным, а, следовательно, нельзя вычислить величину опрокидывающего момента и размеры ядра сечения.

Наиболее близким к заявляемому является способ, реализуемый в устройстве для моделирования пространственных контактных задач [3], при котором токопроводящий аналог представлен набором пластин, расположенных в одной плоскости, на каждую из которых подают переменное напряжение, моделирующее линейное и угловое перемещение штампа, а по величине плотности заряда вычисляют значение реактивного давления на поверхности контакта и опрокидывающий момент.

Но вышеприведенный порядок действий и условия их осуществления, в части использования пластины-аналога определенной формы, также не позволяют решать контактные задачи для штампов с плоским основанием, при их внецентренном нагружении. В случае такого нагружения, нормально расположенные к плоскости действующей нагрузки, участки основания штампа внедряются в упругое полупространство при их линейно-угловом перемещении. И определить реактивные давления на этих участках, а также размеры ядра сечения, а, соответственно, максимальную величину эксцентриситета приложения нагрузки известным способом невозможно.

Заявляемый способ направлен на расширение класса решаемых пространственных контактных задач и повышения точности в случае внецентренного нагружения. Это достигается тем, что в известном способе решения контактных задач, заключающемся в том, что на токопроводящий аналог площади контакта нагруженного штампа с упругим полупространством подают переменное электрическое напряжение, моделирующее линейное и угловое перемещения соответствующих участков основания штампа, с последующим измерением зондом величины созданного электрического поля, на основании полученного значения которой вычисляют плотность заряда токопроводящего аналога и величину реактивного давления на площади контакта, - в соответствии с изобретением, токопроводящий аналог площади контакта представляют набором пластин, выполненных в виде параллельных полос, которые ориентируют нормально к плоскости приложения действующей на штамп нагрузки, а по характеру распределения величины плотности заряда дополнительно судят о размерах ядра сечения.

При внецентренной нагрузке штампа (фиг. 1) точка А приложения силы Р не совпадает с осью, проходящей через центр тяжести фигуры основания штампа. Положение этой точки A_0 , в месте пересечения следа силы Р с основанием, в общем случае определяется координатами X_0, Y_0 (фиг. 2-4). Плоскость I-I, проходящую через точку приложения силы Р и точку пересечения главных осей, будем называть плоскостью приложения действующей на штамп нагрузки. Эта нагрузка обуславливает различное линейное перемещение точек основания штампа и их поворот вокруг некоторой оси, расположенной в плоскости XY. С одинаковой закономерностью будут перемещаться точки, расположенные в нормальном к плоскости I-I направлении, образуя участки основания, внедренные на различную глубину. Моделировать в данном случае контактную задачу с помощью применения известных способов подготовки аналогов площадок контакта не представляется возможным, поэтому в заявляемом решении токопроводящий аналог, который геометрически подобный форме штампа в плане, разбивают на ряд пластин, нормально расположенных к плоскости приложения действующей нагрузки (фиг. 2, 3, 4). Эти пластины

располагают в одной плоскости изолировано друг от друга и на каждую из них подают переменное электрическое напряжение, моделирующее перемещение соответствующего участка основания штампа. Чем больше пластин и меньше зазор между ними, тем точнее можно задать величину подаваемого напряжения. Однако, ширина токопроводящих пластин должна быть соизмерима с шириной зонда. В противном случае, последний будет искажать образующееся электрическое поле и, тем самым, снижать точность измерения.

Из полученного экспериментальным путем графика зависимости относительной погрешности измерений от величины зазора между пластинами Δ следует (фиг. 5), что зазор не должен превышать 0,5 мм.

При решении задач заявляемого класса обеспечивается возможность определения, для различной формы плоского штампа, размеров ядра сечения, т.е. области в окрестностях центра тяжести, которая ограничивает зону приложения нагрузки. Если след действующей силы P находится внутри ядра сечения, то исключается отрыв штампа от упругого полупространства, в которое он внедряется. Из технической литературы известно, что при теоретических расчетах, например, плоского штампа с прямоугольным основанием, размеры ядра сечения ограничиваются величинами h (b и b) b вдоль осей X и Y (где h и b - длина и ширина основания штампа) [4]. Т.е. эксцентриситет e приложения силы P принимают $e \leq h/6$ и $e \leq b/6$, а применительно к штампу квадратной формы $e \leq a/3$ (где a - размер стороны основания). Но решение задачи заявляемым способом и применение методов теории упругости позволяет значительно увеличить значение эксцентриситета и величину допускаемого опрокидывающего момента $M = P \cdot e$, что подтверждают нижеприведенные примеры.

Если реактивное давление в точке площадки контакта обозначить $p(x,y)$, то уравнения равновесия штампа будут следующими:

результатирующее давление в области контакта Σ :

$$P = \iint_{\Sigma} p(x,y) dx \cdot dy$$

возникающие моменты

$$x_0 \cdot P = \iint_{\Sigma} x \cdot p(x,y) dx \cdot dy$$

$$y_0 \cdot P = \iint_{\Sigma} y \cdot p(x,y) dx \cdot dy$$

где x_0, y_0 - координаты точки пересечения линии (следа) действия силы P с плоскостью XY .

Решение задачи о вдавливании центрально нагруженного штампа с плоским основанием сводится к интегральному уравнению

$$\iint_{\Sigma} \frac{P(\zeta, \eta) d\zeta \cdot d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\delta}{\theta}, \text{ где } \theta = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \quad (1)$$

Здесь: δ - перемещение штампа;

$P(x,y)$ - реактивное давление под штампом;

ν - коэффициент Пуассона;

E - модуль упругости I рода;

ζ, η - координаты точки, в которой давление определяется в данный момент.

При внецентренном приложении нагрузки уравнение будет иметь вид:

$$\iint_{\Sigma} \frac{P(\zeta, \eta) d\zeta \cdot d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\delta - \beta_y x + \beta_x y}{\theta} \quad (2)$$

где β_x, β_y - проекции вектора поворота штампа на оси X и Y .

Если взять токопроводящую пластину, которая обладает некоторым электрическим зарядом Q и имеет форму Σ основания штампа в плане [5], то выражение для электростатического потенциала можно записать в виде

$$\Psi(x,y) = \frac{1}{4\pi K_0 \epsilon} \iint_{\Sigma} \frac{q(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (3)$$

Обозначив правую часть (2) через $W(x,y)$, а левую часть (3) введем обозначение $\Psi(x,y) = \Psi(x,y) - 4\pi K_0 \epsilon$, получим уравнения

$$\iint_{\Sigma} \frac{P(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}} = W(x,y) \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma} \frac{q(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}} = \Psi(x,y) \quad (4)$$

ВУ 2200 С1

Из уравнений (4) следует, что для решения задачи заявляемым способом можно применить электростатическую аналогию.

Для этого на аналоге площадки контакта необходимо задать электрический потенциал в соответствии с правой частью уравнений (4).

На фиг. 1 представлена схема внецентренно нагруженного штампа с основанием квадратной формы с вырезом; на фиг. 2 - аналог площадки контакта штампа, изображенного на фиг. 1; на фиг. 3 и фиг. 4 - аналоги площадок контакта внецентренно нагруженного штампа с прямоугольной и круглой формой основания в плане; на фиг. 5 - график зависимости относительной погрешности от величины зазора между пластинами; на фиг. 6 - графики зависимости коэффициентов K , K_0 и K_1 от размеров выреза в штампе на фиг. 1 и фиг. 2; на фиг. 7 и фиг. 8 - линии равных отношений контактных давлений для штампа на фиг. 1 и фиг. 2, в случае поворота его вокруг оси Y_c по часовой стрелке и против соответственно.

Поскольку для задачи с внецентренным нагружением известно теоретическое решение лишь в случае выполнения штампа круговой формы в плане [6], авторами решена эта задача заявляемым способом с целью оценки величины погрешности. Аналог площадки контакта представлял собой набор отдельных параллельно расположенных пластин, изолированных друг от друга (фиг. 4). В табл. приведены значения отношений реактивного давления p , действующего по сечению I-I от точки 1 к точке 2, к p_{cp} ($p_{cp} = p/F$), найденные аналитически и экспериментально. Здесь p_{cp} - среднее давление на площади контакта, F - площадь контакта.

x / a	Значения p / p _{cp}	
	Теоретические	Экспериментальные
0,9	1,663	1,552
0,7	0,945	0,921
0,5	0,722	0,709
0,3	0,602	0,614
0,1	0,528	0,534
0,0	0,500	0,507
0,1	0,477	0,483
0,3	0,445	0,454
0,5	0,433	0,427
0,7	0,455	0,441
0,9	0,917	0,878

Из таблицы следует, что погрешность, в основном, не превышает 5%.

Решена авторами задача о вдавливании штампа с плоским основанием квадратной формы в плане с вырезом в упругое полупространство под действием внецентренной силы P , плоскость приложения которой проходит через ось X (фиг. 1, 2). Задача сводится к интегральному уравнению

$$\iint_{\Sigma} \frac{P(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}} = \frac{\delta - \beta_y x}{\theta}$$

Введя обозначения $W(x, y) = \frac{\delta - \beta_y x}{\theta}$, получим уравнение

$$\iint_{\Sigma} \frac{P(\zeta, \eta) d\zeta d\eta}{\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}} = W(x, y) \quad (5)$$

к которому была применена электростатическая аналогия. Уравнения равновесия штампа в этом случае имеют вид:

$$P = \iint_{\Sigma} p(x, y) dx dy$$

$$X_0 P = \iint_{\Sigma} x \cdot p(x, y) dx dy$$

Решение задачи осуществлялось в соответствии с заявляемым способом:

1. Создавался аналог площади контакта, геометрически подобный и имеющий ее форму в плане, который разбивался на ряд пластин, расположенных нормально к плоскости приложения действующей нагрузки (фиг. 2). Ширина каждой пластины равнялась ширине измерительного зонда, а величина изоляционного зазора между пластинами не превышала 0,5 мм.

2. На каждую из пластин подавался электрический потенциал, моделирующий правую часть уравнения (5) при заданном перемещении и угле поворота соответствующего участка основания штампа.

3. С помощью зонда определялась плотность заряда $q(x_i, y_i)$ и вычислялись реактивные давления $p(x_i, y_i)$ в соответствующих точках площади контакта и сила P , действующая на штамп.
4. Зная характер распределения и величину реактивных давлений, а также значение силы P , определялись опрокидывающий момент, вызывающий поворот штампа, и эксцентриситет e . Были решены задачи для штампов со значениями $\alpha = 1/4, 1/3, 1/2, 2/3$ при различных углах поворота φ штампа (здесь $\alpha = c/a$, см. фиг. 2) и получены выражения для определения перемещения (осадки) и угла поворота (см. фиг. 1).

$$\omega_0 = P \frac{(1-\nu_0^2)}{a E_0} K_0 \quad \text{и} \quad \text{tg} \varphi = M_{yc} (1-\nu_0^2) K_1 / a^3 E_0 \quad (6)$$

5. На основании экспериментальных данных были построены графические зависимости коэффициентов K_0 и K_1 от значения α и направления поворота штампа (фиг. 6). Сплошные линии показывают значения при повороте штампа по часовой стрелке, пунктирные - против. При этом перемещения любой точки основания штампа определялись по формуле:

$$\omega = \omega_0 \pm x \text{tg} \varphi \quad (7)$$

где X - расстояние от главной центральной оси Y_c до рассматриваемой точки.

6. Штамп не будет отрываться при повороте вокруг оси Y_c (фиг. 1 и 2) по часовой стрелке или против, если $\omega_B \geq 0$ и $\omega_B \leq 0$. Выразив ω_B и ω_B через ω_0 и $\text{tg} \varphi$ согласно (7), получаем

$$\omega_0 = x \text{tg} \varphi \geq 0$$

Подставляя уравнения (6) и (7), с учетом того, что $M_{yc} = P \cdot e$ и, введя обозначение $K = K_0 \cdot a / K_1 \cdot X$, получим

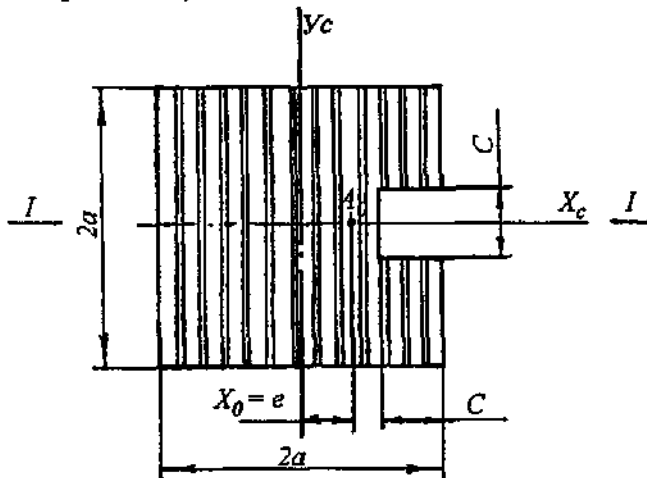
$$e \leq K \cdot a \quad (8)$$

При выполнении условия (8) штамп не будет отрываться от упругого полупространства. Значения K приведены на графике (фиг. 6).

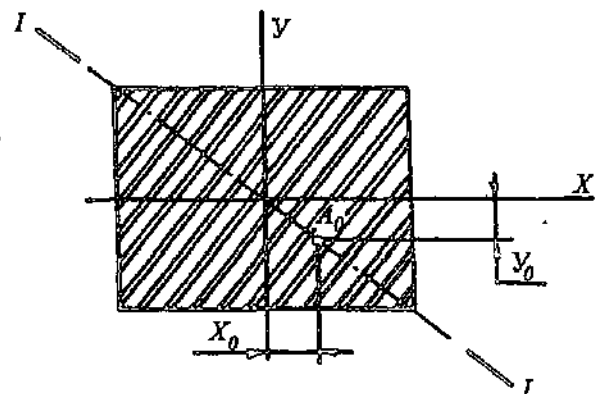
Сравнительный анализ значений K , полученных при решении задачи заявляемым способом электрического моделирования и методом сопротивления материалов, показывает, что возможно значительное увеличение значения эксцентриситета и допускаемого момента (т.к. $M = P \cdot e$) при практической внецентричной нагрузке штампов. Например, при расчете коротких внецентрично-сжатых элементов в сопротивлении материалов полагают, что нормальные напряжения распределяются по линейному закону. В этом случае растягивающие напряжения не возникают, если сила приложена в пределах ядра сечения. Применительно к штампу квадратной формы, размеры ядра сечения ограничены величиной $e \leq a/3$, т.е. $K = 1/3$. Полученные же заявляемым способом значения K значительно больше (см. фиг. 6), что позволяет говорить о более точном определении размеров ядра сечения.

В результате математической обработки результатов измерения, авторами получены данные, на основе которых построены линии равных отношений контактных давлений $p(x, y)$ и p_{cp} (где $p_{cp} = P / F$) для штампа рассматриваемой формы. На фиг. 7, 8 приведены такие линии для случаев поворота штампа вокруг оси Y_c по часовой стрелке (фиг. 7) и против (фиг. 8) соответственно. При этом значения углов наклона были приняты равными 12° и 24° .

Таким образом, заявляемый способ позволяет расширить класс решаемых способом электрического моделирования задач, добавив к известным решениям задачу с внецентричной загрузкой штампа. Кроме того, обеспечивается возможность более точного определения размеров ядра сечения.

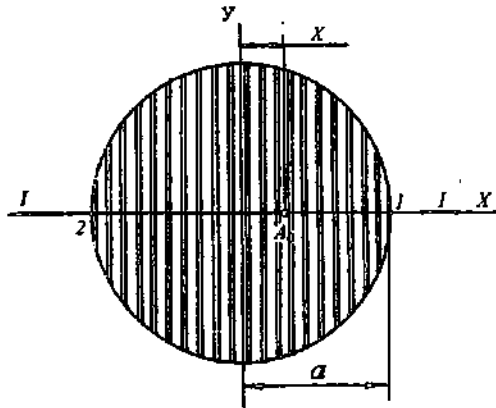


Фиг. 2

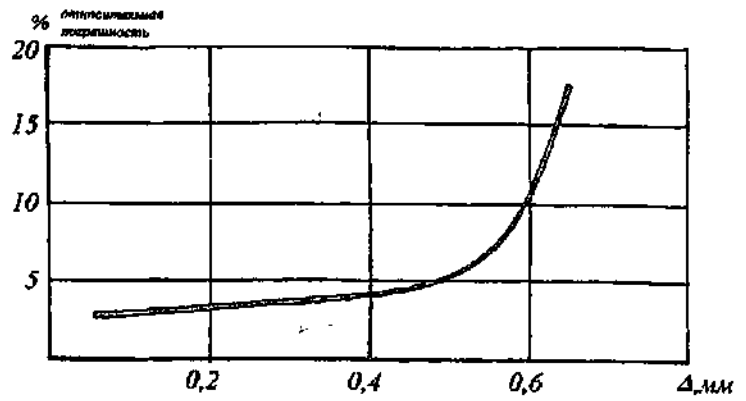


Фиг. 3

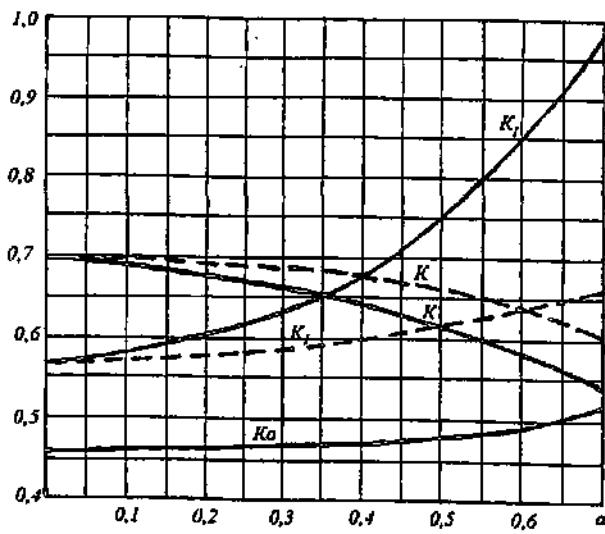
ВУ 2200 С1



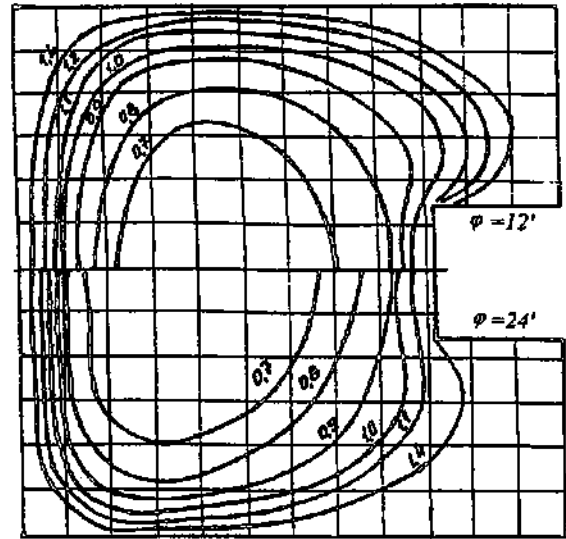
Фиг. 4



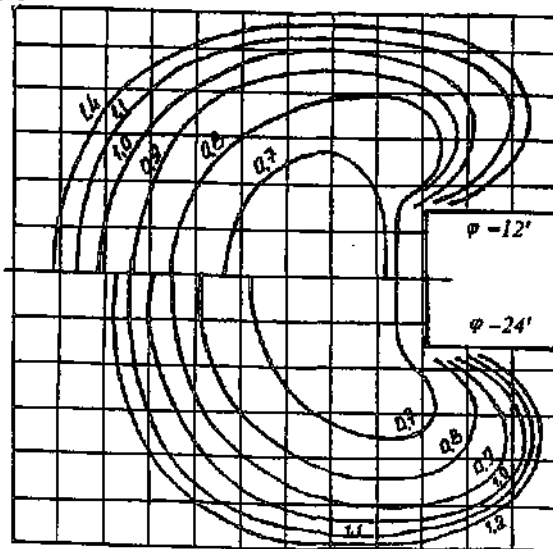
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

Составитель В.А. Тугбаев
 Редактор В.Н. Позняк
 Корректор Т.Н. Никитина