Министерство образования Республики Беларусь

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого

Кафедра «Высшая математика»

В. А. Зыкунов, Ю. Д. Черниченко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

к домашним заданиям
по дисциплине «Высшая математика»,
для студентов дневного отделения

Гомель 2001

УДК 517.9

Авторы-составители: **Зыкунов В. А., Черниченко Ю. Д.**

Дифференциальные уравнения: Практическое пособие к домашним заданиям по дисциплине «Высшая математика» для студентов дневного отделения. - Гомель: ГГТУ им. П. О. Сухого, 2001. – 80 с.

Материал практического пособия полностью соответствует разделу программы «Дифференциальные уравнения» общего курса высшей математики. Наряду с кратко, но четко изложенной теорией, практическое пособие содержит много решенных примеров и достаточное количество заданий для домашней работы.

Для студентов дневного отделения.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика»
ГГТУ им. П. О. Сухого Великович Л. Л.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$, называют ***дифференциальным уравнением n-го порядка***.

Решением или ***интегралом*** дифференциального уравнения (1.1) называется любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая его в тождество.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ называется ***общим решением*** уравнения (1.1), если:

а) она удовлетворяет уравнению (1.1) при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$;

б) при любых начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{1.2}$$

существуют такие значения постоянных $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$, что функция

$$y = \varphi\left(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right) \tag{1.3}$$

удовлетворяет начальным условиям (1.2) и называется ***частным решением*** уравнения (1.1).

Равенство

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{1.4}$$

неявно определяющее общее решение, называется ***общим интегралом***, а равенство

$$\Phi\left(x, y, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0\right) = 0 \tag{1.5}$$

– ***частным интегралом*** дифференциального уравнения n-го порядка (1.1).

Решить (проинтегрировать) дифференциальное уравнение n-го порядка (1.1) значит:

а) найти его общее решение или общий интеграл (если начальные условия не заданы) или

б) найти частное решение или частный интеграл, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

Задачу нахождения частного решения (1.3) или частного интеграла (1.5), удовлетворяющую заданным начальным условиям (1.2), называют задачей Коши для уравнения (1.1).

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение (1.1) при $n=1$ принимает вид

$$F(x,y,y')=0 \tag{2.1}$$

и называется ***дифференциальным уравнением первого порядка, неразрешенным относительно производной***.

Если уравнение (2.1) можно разрешить относительно производной, то его можно записать в виде

$$y'=f(x,y) \tag{2.2}$$

и тогда его называют ***дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной***.

Для уравнения (2.2) справедлива ***теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной***.

Теорема 2.1. *Если в уравнении*

$$y'=f(x,y)$$

функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D на плоскости $X0Y$, содержащей некоторую точку $(x_0;y_0)$, то существует единственное решение этого уравнения

$$y=\varphi(x),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0)=y_0.$$

Замечание 2.1. *С геометрической точки зрения общее решение* или *общий интеграл* представляют собой однопараметрическое семейство кривых на координатной плоскости $X0Y$, зависящее от одного параметра *C*. *Частному решению* или *частному интегралу* соответствует *одна кривая этого семейства*, проходящая через заданную точку с координатами $(x_0;y_0)$ на плоскости $X0Y$, в которой выполняются условия *теоремы* 2.1. *о существовании и единственности решения дифференциального уравнения* (2.2).

§ 2.1. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{2.3}$$

или в дифференциальной форме

$$X_1(x)Y_1(y)dx + X_2(x)Y_2(y)dy = 0. \tag{2.4}$$

Умножая обе части уравнения (2.3) на $dx / g(y)$ $\left(g(y) \neq 0\right)$, получим уравнение

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \tag{2.5}$$

которое называется ***уравнением с разделенными переменными***.

Отсюда после интегрирования находят общий интеграл уравнения (2.3):

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C. \tag{2.6}$$

Аналогично, разделив обе части уравнения (2.4) на $X_2(x)Y_1(y) \neq 0$ и проинтегрировав, находят общий интеграл уравнения (2.4):

$$\int \frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx + \int \frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy = C. \tag{2.7}$$

Замечание 2.2. Отдельно исследуются случаи, когда $g(y) = 0$ в уравнении (2.3) и $X_2(x)Y_1(y) = 0$ в уравнении (2.4). В этих случаях могут появиться ***особые решения***.

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c), \ \ b \neq 0, \tag{2.8}$$

с помощью замены

$$u = ax + bx + c, \tag{2.9}$$

где u – новая искомая функция.

Пример 2.1. Найти общее решение уравнения $y' = -\dfrac{y}{x}$.

Решение.

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, переменные в исходном уравнении разделяются:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \;\; y \neq 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C_0,$$

откуда

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$$

или

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,$$

где с целью дальнейших преобразований обозначили произвольную постоянную C_0 через $\ln|C|$ $(C \neq 0)$.

Отсюда получаем общее решение:

$$y = \frac{C}{x},$$

где C – любое действительное число, т.к. $y = 0$ является решением исходного дифференциального уравнения и входит в общее решение при $C = 0$.

Пример 2.2. Найти частный интеграл уравнения $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$, удовлетворяющий начальному условию $y(1) = -1$.

Решение.

Разделяя переменные, находим:

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0, \;\; xy \neq 0,$$

или

$$\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0,\ \ xy\neq 0.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=C,$$

откуда

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$$

или

$$\ln|xy|+x-y=C.$$

Из начального условия $y(1)=-1$ находим:

$$\ln|-1|+1-(-1)=C,\text{ т.е. } C=2.$$

Тогда

$$\ln|xy|+x-y=2$$

есть частный интеграл исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющий заданному начальному условию.

Пример 2.3. Найти общее решение дифференциального уравнения
$y'=(8x+2y+1)^2$.

Решение.

Введем замену $u=8x+2y+1$.

Отсюда находим:

$$u'=8+2y',$$

откуда

$$y'=\frac{1}{2}(u'-8).$$

Тогда исходное уравнение преобразуется к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{1}{2}(u'-8)=u^2$$

или

$$u' = 2\left(u^2 + 4\right).$$

Умножая обе части последнего уравнения на $dx / \left(2u^2 + 8\right)$ и интегрируя, имеем:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + 4} = x + C_1.$$

Выполняя интегрирование в левой части, находим

$$\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} = x + C_1$$

или

$$u = 2\operatorname{tg}\left(4x + C\right),$$

где $C = 4C_1$.

Возвращаясь к старой переменной, получаем общий интеграл уравнения:

$$8x + 2y + 1 = 2\operatorname{tg}\left(4x + C\right).$$

ЗАДАНИЯ

Задание 2.1. Найти общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений:

1) $y' = -\dfrac{y\ln y}{x\ln x}$. Ответ: $\ln\left|\ln y\right| + \ln\left|\ln x\right| = C$.

2) $y' = 2xy + xy^2$. Ответ: $\dfrac{y}{y+2} = Ce^{x^2}$.

3) $y' = \dfrac{\sqrt{y^2+1}}{xy}$. Ответ: $\sqrt{y^2+1} - \ln|x| = C$.

4) $y' = x\left(y^2 + 1\right)$. Ответ: $\operatorname{arctg} y - \dfrac{1}{2}x^2 = C$.

5) $y' = 2x\cos\left(x^2\right)\cos^2 y$. Ответ: $\operatorname{tg} y - \sin x^2 = C$.

6) $x'_y = \dfrac{1+x^2}{1+y^2}$. Ответ: $x = \dfrac{y+C}{1-Cy}$; или $\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x = C$.

7) $y' = \dfrac{y}{x^2 - a^2}$. Ответ: $y^{2a} = C\dfrac{x-a}{x+a}$.

8) $y' = \dfrac{a-y}{x^2}$. Ответ: $y = Ce^{y/x} + a$.

9) $y' = \dfrac{1+y^2}{\sqrt{x}}$. Ответ: $2\sqrt{x} - \operatorname{arctg} y = C$.

10) $y' = \operatorname{ctg} y \operatorname{tg} x$. Ответ: $\cos x = C\cos y$.

11) $y' = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{1+x^2}$. Ответ: $\arcsin y - \operatorname{arctg} x = C$.

Задание 2.2. Найти частные решения (частные интегралы) дифференциальных уравнений:

1) $xydx + (x+1)dy = 0,\ y(0) = 1$. Ответ: $y = (x+1)e^{-x}$.

2) $(y-2)dx + \operatorname{ctg} x dy = 0,\ y(0) = 1$. Ответ: $y = 2 - \cos x$.

3) $x^4 dy - y^2 dx = 0,\ y(1) = 1$. Ответ: $y = 3x^3\left(1+2x^3\right)^{-1}$.

4) $y^2 dx - x(y-1)dy = 0,\ y(1) = -1$. Ответ: $\ln|y| + \dfrac{1}{y} - \ln|x| = -1$.

5) $\sin^2 y dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\ y(0) = \dfrac{\pi}{4}$. Ответ: $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{\arcsin x + 1}\right)$.

6) $\sqrt{1-x^2}\,dy - \sqrt{1-y^2}\,dx = 0,\ y(0) = 0$. Ответ: $y = x$.

7) $\left(x - y^2 x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0,\ y(0) = 2$. Ответ: $y^2 = \dfrac{4-x^2}{1-x^2}$.

8) $3e^x \operatorname{tg} y dx + \left(1-e^x\right)\sec^2 y dy = 0,\ y(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Ответ: $\operatorname{tg} y = \left(\dfrac{1-e^x}{1-e}\right)^3$.

9) $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$. Ответ: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1$.

10) $(1-\sin x)dy - (1+\cos y)dx = 0,\ y(0) = \dfrac{\pi}{2}$. Ответ: $y = -2\operatorname{arctg}\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

11) $(1+\cos x)dy + ydx = 0,\ y(0) = 1$. Ответ: $y = e^{-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

Задание 2.3. Найти общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений:

1) $y' = \cos(x+y)$. Ответ: $\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{x}{2}\right) - x = C$.

2) $y' = e^{x-y}$. Ответ: $e^y - e^x = C$.

3) $y' = (y-4x+3)^2$. Ответ: $y = 4x - 1 + e^{4x}\left(C - \frac{1}{4}e^{4x}\right)^{-1}$.

4) $y' = \cos^2(y-\pi)$. Ответ: $-\operatorname{tg} y + x = C$.

5) $y' = (y-x)^2$. Ответ: $y = x - 1 + e^{-2x}\left(C + \frac{1}{2}e^{-2x}\right)^{-1}$.

6) $y' = 1 - \operatorname{tg}(x-y)$. Ответ: $\ln\left|\operatorname{tg}(x-y)\right| - \frac{1}{2}\ln\left(1+\operatorname{tg}^2(x-y)\right) - x = C$.

7) $y' = (x-y)^{-1}$. Ответ: $e^{-y}(x-y-1) = C$.

8) $y' = e^{-2x-y}$. Ответ: $e^y + \frac{1}{2}e^{-2x} = C$.

9) $y' = \sin(x+y) + \cos(x+y)$. Ответ: $-\ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\right| + x = C$.

10) $y' = x + y + \frac{1}{x+y}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}\ln\left|x+y+(x+y)^2+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2(x+y)}{\sqrt{3}} + x = C$.

11) $y' = 2 + \frac{1}{(x-y)^2}$. Ответ: $-2x + y + \operatorname{arctg}(x-y) = C$.

§ 2.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка и уравнения, приводящиеся к ним

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной функцией n-го измерения*** относительно переменных x и y, если при любом λ справедливо тождество:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y). \qquad (2.10)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x,y), \qquad (2.11)$$

называется ***однородным***, если функция $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения относительно x и y.

Однородное уравнение (2.11) приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$u = \frac{y}{x} \quad \left(\text{или } u = \frac{x}{y}\right) \tag{2.12}$$

где $u = u(x)$ – новая неизвестная функция.

В этом случае из (2.12) находят

$$y' = xu' + u, \tag{2.13}$$

подстановка которого в (2.11) приводит к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u + xu' = f(1, u)$$

или

$$\frac{du}{f(1,u) - u} = \frac{dx}{x}. \tag{2.14}$$

Интегрирование уравнения (2.14) дает:

$$\int \frac{du}{f(1,u) - u} = \ln|x| + C.$$

Подставляя после интегрирования вместо u выражение (2.12), получают общий интеграл уравнения (2.11).

Замечание 2.3. Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.15}$$

будет ***однородным***, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{2.16}$$

при $c_1 = c_2 = 0$ является однородным; если же хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 отличны от нуля, а определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.17}$$

то уравнение (2.16) приводится к однородному

$$\frac{du}{dt} = f\left(\frac{a_1t + b_1v}{a_2t + b_2v}\right) \tag{2.18}$$

с помощью замены переменных

$$\begin{cases} x = t + \alpha, \\ y = v + \beta, \end{cases} \tag{2.19}$$

где t – новая независимая переменная; $v = v(t)$ – новая функция, а числа α и β находятся как решения системы

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

В том случае, когда условие (2.17) не выполняется, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda, \tag{2.21}$$

то подстановкой

$$z = a_1 x + b_1 y \tag{2.22}$$

уравнение (2.16) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Действительно, из (2.22) следует, что

$$z' = a_1 + b_1 y' \text{ или } y' = \frac{1}{b_1} z' - \frac{a_1}{b_1},$$

подстановка которого в (2.16) с учетом (2.21) дает:

$$\frac{1}{b_1} z' - \frac{a_1}{b_1} = f\left(\frac{z + c_1}{\lambda z + c_2}\right).$$

Пример 2.4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$(x + y)dx + (y - x)dy = 0.$$

Решение.

Разрешая уравнение относительно производной, получим

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

Откуда, используя подстановку (2.12) и вытекающее из нее выражение (2.13), находим:

$$xu' + u = \frac{1 + u}{1 - u}$$

или после разделения переменных:

$$\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}.$$

Отсюда, выполняя интегрирование, имеем:

$$\operatorname{arctg} u-\frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right)=\ln|x|+\ln|C_1|.$$

Подставляя вместо u выражение (2.12), находим общий интеграл исходного уравнения:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)=\ln|C_1|$$

или

$$x^2+y^2=Ce^{\operatorname{arctg}(y/x)},$$

где $C=\frac{1}{|C_1|}$.

Пример 2.5. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y'=\frac{x+y-3}{x-y-1}.$$

Решение.

Поскольку условие (2.17) выполнено, т.е. $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$, то, чтобы преобразовать исходное уравнение в однородное, сделаем замену вида (2.19): $\begin{cases}x=t+\alpha,\\ y=v+\beta.\end{cases}$

Тогда

$$\frac{dv}{dt}=\frac{t+v+(\alpha+\beta-3)}{t-v+(\alpha-\beta-1)}.$$

Решая систему двух уравнений

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3=0,\\ \alpha-\beta-1=0,\end{cases}$$

находим: $\alpha=2,\quad \beta=1$.

В результате получаем однородное уравнение

$$\frac{dv}{dt}=\frac{t+v}{t-v},$$

которое решается подстановкой $u = \frac{v}{t}$.

Отсюда следует

$$v = ut, \quad \frac{dv}{dt} = u't + u,$$

и в результате приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$u't + u = \frac{1+u}{1-u}$$

или

$$t\frac{du}{dt} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{udu}{1+u^2} = \int \frac{dt}{t} + \ln|C|,$$

откуда

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) = \ln|t| + \ln|C|$$

или

$$e^{\operatorname{arctg} u} = Ct\sqrt{1+u^2}.$$

Подставляя сюда $\frac{v}{t}$ вместо u, получаем:

$$C\sqrt{t^2+v^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{v}{t}}.$$

Наконец, переходя к переменным $x = t + 2$, $y = v + 1$, находим общий интеграл:

$$C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg}\frac{y-1}{x-2}}.$$

Пример 2.6. Найти частный интеграл уравнения

$$y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}, \quad y(0) = -2.$$

Решение.

Поскольку выполнено условие (2.21), т.е. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ или $\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \lambda$, то подстановкой вида (2.22)

$$z = 2x + y, \ \ z' = 2 + y',$$

исходное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5} \text{ или } z' = \frac{5z+9}{2z+5}.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{(2z+5)dz}{5z+9} = dx,$$

откуда следует:

$$\frac{2}{5}\int\left(1 + \frac{7}{10\left(z + \frac{9}{5}\right)}\right)dz = x + C \ \text{ или } \ \frac{2}{5}z + \frac{7}{25}\ln|5z+9| = x + C.$$

Возвращаясь к старой переменной $z = 2x + y$, находим общий интеграл исходного уравнения:

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\ln|10x + 5y + 9| = x + C \text{ или } 10y - 5x + 7\ln|10x + 5y + 9| = C_1,$$

где $C_1 = 25C$.

Из начального условия $y(0) = -2$ имеем:

$$-20 + 7\ln|-1| = C_1, \quad C_1 = -20.$$

Тогда

$$10y - 5x + 7\ln|10x + 5y + 9| = -20$$

есть частный интеграл исходного уравнения, удовлетворяющий заданному начальному условию.

ЗАДАНИЯ

Задание 2.4. Найти общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений:

1) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$. Ответ: $y^2 + 2xy - x^2 = C$.

2) $(x+y)dx+xdy=0$. Ответ: $x^2+2xy=C$.

3) $\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)dx-xdy=0$. Ответ: $1+2Cy-C^2x^2=0$.

4) $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0$. Ответ: $(x+y)^2(2x+y)^3=C$.

5) $(x^3+y^3)dx-xy^2dy=0$. Ответ: $y=x\cdot\sqrt[3]{3\ln Cx}$.

6) $(x-y)ydx-x^2dy=0$. Ответ: $y=x/\ln Cx$.

7) $\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0$. Ответ: $ye^{\sqrt{\frac{x}{y}}}=C$.

8) $(x+y)dx+\frac{x^2}{y}dy=0$. Ответ: $y=\frac{2x}{2Cx^2-1}$.

9) $x\cos\frac{y}{x}(ydx+xdy)=y\sin\frac{y}{x}(xdy-ydx)$. Ответ: $xy\cos\frac{y}{x}=C$.

10) $\left(y^2-2xy\right)dx=x^2dy$. Ответ: $(y-3x)/y=Cx^3$.

11) $\left(x^2-y^2\right)dx=\frac{x^3}{y}dy$. Ответ: $y^2=\frac{x^2}{2\ln|x|+C}$.

Задание 2.5. Найти общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений:

1) $y'=\frac{x-2y+5}{-2x+y-4}$. Ответ: $(x-1+y)^3=C(y-x-3)$.

2) $y'=\frac{7x-3y+2}{3x-4y+5}$. Ответ: $\frac{7}{2}x^2-3xy+2x+2y^2-5y=C$.

3) $y'=\frac{-7x+3y+7}{3x-7y-3}$. Ответ: $(y-x+1)^2(y+x-1)^5=C$.

4) $y'=\frac{x+2y+1}{2x-3}$. Ответ: $y=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\ln|2x-3|+2Cx-\frac{5}{4}-3C$.

5) $y'=\frac{-2x-y+1}{x-2y+3}$. Ответ: $-x^2-xy+x+y^2-3y=C$.

6) $y'=\frac{x+y+1}{6x+2}$. Ответ: $y=\frac{x}{5}-\frac{3}{5}+(6x+2)^{1/6}C$.

7) $y'=\frac{-x-y+2}{3x+1}$. Ответ: $y=-\frac{1}{4}\left(-9+x-(3x+1)^{-1/3}\cdot C\right)$.

8) $y' = \dfrac{9x - y - 1}{7x + y + 2}$. Ответ: $\left(9x + y + \dfrac{17}{8}\right) \cdot \left(-x + y + \dfrac{3}{2}\right)^4 = C$.

9) $y' = \dfrac{x + 8y + 2}{8x + y - 2}$. Ответ: $\left(y - x + \dfrac{4}{7}\right)^9 = C(x + y)^7$.

10) $y' = \dfrac{x - 7y - 7}{7x + y - 1}$. Ответ: $-\dfrac{x^2}{2} + 7xy + 7x - y + \dfrac{y^2}{2} = C$.

11) $y' = \dfrac{2x + 3y + 3}{3x + 2}$. Ответ: $y = \left(\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{9}\right)\ln|3x + 2| + 3Cx - \dfrac{5}{9} + 2C$.

Задание 2.6. Найти частные решения (частные интегралы) дифференциальных уравнений:

1) $y' = \dfrac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}$, $y(-1) = 0$. Ответ: $-2y + x - \dfrac{1}{4}\ln|8y + 5 + 4x| = -1$.

2) $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$, $y(0) = 2$. Ответ: $\dfrac{y}{2} + \dfrac{3}{2}x + \ln|y - 1 + x| = 1$.

3) $y' = \dfrac{2 + x + y}{1 - 2x - 2y}$, $y(0) = 4$. Ответ: $2y + x + 5\ln|y - 3 + x| = 8$.

4) $y' = \dfrac{x - y + 1}{2x - 2y + 3}$, $y(0) = 1$. Ответ: $-2y + x - \ln|-y + 2 + x| = -2$.

5) $y' = \dfrac{4x + 2y + 2}{2x + y - 1}$, $y(0) = -1$. Ответ: $2x - y - 1 + \ln|2x + y| = 0$.

6) $y' = \dfrac{-x + y + 2}{-2x + 2y + 7}$, $y(0) = -6$. Ответ: $-2y + x + 3\ln|-y - 5 + x| = 12$.

7) $y' = \dfrac{4x + y - 1}{8x + 2y - 1}$, $y(0) = 0$. Ответ: $-x + 2y - \dfrac{8}{9}\ln\left|\dfrac{36x + 9y - 5}{5}\right| = 0$.

8) $y' = \dfrac{2x - y}{4x - 2y + 1}$, $y(0) = 0$. Ответ: $\dfrac{1}{2}x - y - \dfrac{1}{6}\ln\left|3x - \dfrac{3}{2}y + 1\right| = 0$.

9) $y' = \dfrac{4x + 2y + 1}{2x + y}$, $y(0) = 0$. Ответ: $-\dfrac{1}{2}y + x + \dfrac{1}{8}\ln|4y + 1 + 8x| = 0$.

10) $y' = \dfrac{2x + y - 2}{6x + 3y + 1}$, $y(0) = 1$. Ответ: $-3y + x - \ln|2x + y| = -3$.

11) $y' = \dfrac{4x + 8y + 3}{x + 2y + 1}$, $y(0) = 0$. Ответ: $16x - 4y - \dfrac{4}{9}\ln\left|\dfrac{9x + 18y + 7}{7}\right| = 0$.

§ 2.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

1⁰. *Линейные дифференциальные уравнения первого порядка*

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (2.23)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные непрерывные функции от x (или постоянные), называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка***.

Решение линейного уравнения (2.23) ищут в виде

$$y = u(x) \cdot v(x), \qquad (2.24)$$

где $u(x)$, $v(x)$ – неизвестные функции, определяемые на основании уравнения (2.23).

После подстановки в уравнение (2.23) выражений для у из (2.24) и $y' = u'v + uv'$ будем иметь:

$$vu' + \left(v' + P(x)v\right)u = Q(x). \qquad (2.25)$$

Если в уравнении (2.25) выбрать функцию $v(x)$ такой, чтобы

$$v' + P(x)v = 0, \qquad (2.26)$$

тогда функция $u(x)$ определится как решение уравнения

$$vu' = Q(x). \qquad (2.27)$$

Уравнение (2.26) является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

откуда

$$\ln|v| = -\int P(x)dx + \ln|C_1|$$

или

$$v(x) = C_1 e^{-\int P(x)dx}. \qquad (2.28)$$

Подставляя решение (2.28) при $C_1 = 1$ в уравнение (2.27) после разделения переменных и интегрирования, находим:

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C. \qquad (2.29)$$

Объединяя выражения (2.24), (2.28) и (2.29), получим общее решение исходного уравнения:

$$y = \left(\int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C \right) e^{-\int P(x)dx}. \tag{2.30}$$

Пример 2.7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3.$$

Решение.

Полагаем $y = uv$, тогда $y' = u'v + uv'$.

Подстановка выражений для y и y' в исходное уравнение дает:

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1} uv = (x+1)^3$$

или

$$vu' + u\left(v' - \frac{2v}{x+1} \right) = (x+1)^3.$$

Отсюда имеем два дифференциальных уравнения для определения функций:

а) $v' - \dfrac{2v}{x+1} = 0;$

б) $vu' = (x+1)^3.$

Разделяя переменные в уравнении а), находим:

$$\frac{dv}{v} = \frac{2}{x+1} dx,$$

откуда

$$\ln|v| = 2\ln|x+1|$$

или

$$v = (x+1)^2.$$

Подставляя решение для $v(x)$ в уравнение б), получим уравнение для определения функции $u(x)$:

$$(x+1)^2 u' = (x+1)^3$$

или

$$du = (x+1)dx.$$

Откуда находим:

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

2^0. *Уравнение Бернулли*

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \tag{2.31}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции от x (или постоянные), а $\alpha \in R$ $(\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1)$, называется ***уравнением Бернулли***.

Уравнение Бернулли может быть приведено к линейному подстановкой

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Решение уравнения (2.31) можно искать и непосредственно, т.е. подобно тому, как это делалось для линейных дифференциальных уравнений, применяя подстановку

$$y = u(x)v(x).$$

Пример 2.8. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' + xy = x^3y^3.$$

Решение.

Полагая $y = uv$, находим: $y' = u'v + uv'$.

Подстановка этих выражений для y и y' в исходное уравнение дает:

$$u'v + uv' + xuv = x^3u^3v^3$$

или

$$u'v + u(v' + xv) = x^3u^3v^3.$$

Для определения функции $v(x)$ потребуем выполнения соотношения

$$\text{а) } v' + xv = 0,$$

тогда для определения функции $u(x)$ получим уравнение

$$\text{б) } u' = x^3u^3v^2.$$

Разделяя переменные в уравнении а), находим

$$\frac{dv}{v} = -xdx,$$

откуда

$$\ln|v| = -\frac{x^2}{2} \text{ или } v = e^{-x^2/2}.$$

Теперь, подставляя решение для функции $v(x)$ в уравнение б), получим уравнение для определения функции $u(x)$:

$$u' = x^3u^3e^{-x^2} \text{ или } \frac{du}{u^3} = x^3e^{-x^2}dx.$$

Отсюда находим:

$$-\frac{1}{2u^2} = \int e^{-x^2}x^3dx - \frac{C}{2}.$$

После интегрирования по частям, имеем:

$$\frac{1}{u^2} = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} + C$$

или

$$u = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)e^{-x^2} + C}}.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения есть

$$y = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{(x^2+1)e^{-x^2} + C}}$$

или

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}}.$$

Замечание 2.4. Если дифференциальное уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не является линейным дифференциальным уравнением первого порядка (или уравнением

Бернулли) относительно функции $y(x)$, но является линейным (или уравнением Бернулли) относительно функции $x(y)$, то его решение ищут, полагая

$$x = u(y) \cdot v(y).$$

Пример 2.9. Найти частный интеграл дифференциального уравнения

$$ydx - (3x + 1 + \ln y)dy = 0, \quad y\left(\frac{5}{9}\right) = 1.$$

Решение.

Исходное уравнение является линейным относительно функции $x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}x = \frac{1 + \ln y}{y}.$$

Полагая

$$x = u(y) \cdot v(y),$$

находим $\dfrac{dx}{dy} = u'v + uv'$.

Подстановка этих выражений для x и dx / dy в исходное уравнение дает:

$$u'v + u\left(v' - \frac{3}{y}v\right) = \frac{1 + \ln y}{y}.$$

Отсюда имеем два дифференциальных уравнения для определения функций $v(y)$ и $u(y)$:

$$\text{а) } v' - \frac{3}{y}v = 0;$$

$$\text{б) } u'v = \frac{1 + \ln y}{y}.$$

После разделения переменных в уравнении а), находим

$$\frac{dv}{v} = \frac{3}{y}dy,$$

откуда

$$\ln|v| = 3\ln|y| \text{ или } v = y^3.$$

Далее, подставляя решение для функции $v(y)$ в уравнение б), получим уравнение для определения функции $u(y)$:

$$u'y^3 = \frac{1+\ln y}{y} \text{ или } du = \frac{1+\ln y}{y^4}dy.$$

Отсюда, после интегрирования по частям, находим

$$u = \int(1+\ln y)y^{-4}dy + C = -\frac{1}{3y^3}(1+\ln y) - \frac{1}{9y^3} + C$$

или

$$u = -\frac{4}{9y^3} - \frac{\ln y}{3y^3} + C.$$

Следовательно, общий интеграл исходного уравнения есть

$$x = Cy^3 - \frac{1}{3}\ln y - \frac{4}{9}.$$

Подставляя в общий интеграл начальное условие $y\left(\frac{5}{9}\right) = 1$, находим:

$$\frac{5}{9} = C - \frac{1}{3}\ln 1 - \frac{4}{9},$$

откуда

$$C = 1.$$

Тогда

$$x = y^3 - \frac{1}{3}\ln y - \frac{4}{9}$$

есть частный интеграл исходного уравнения, удовлетворяющий заданному начальному условию.

ЗАДАНИЯ

Задание 2.7. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y' - \frac{y}{x} = x$. Ответ: $y = x^2 + Cx$.

2) $y' + \frac{2y}{x} = x^3$. Ответ: $y = \frac{1}{6}\left(x^4 + \frac{6}{x^2}C\right)$.

3) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$. Ответ: $y = \frac{x+C}{\cos x}$.

4) $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$. Ответ: $y = \frac{e^x + C}{x}$.

5) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$. Ответ: $y = \sin x + C\cos x$.

6) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 1$. Ответ: $y = \left(\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C\right)\cos x$.

7) $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = 1$. Ответ: $y = \frac{-1 + \sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,x} \cdot C}{\mathrm{tg}\,x}$.

8) $y' - ye^x = e^{2x}$. Ответ: $y = -e^x - 1 + e^{\left(e^x\right)}C$.

9) $y' - \frac{y}{x} = x + \ln x$. Ответ: $y = x^2 + \frac{1}{2}x\ln^2 x + Cx$.

10) $y' + \frac{y}{x} = e^x$. Ответ: $y = \frac{xe^x - e^x + C}{x}$.

11) $y' - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^3}$. Ответ: $y = -\frac{1}{x} + 1 + Ce^{-\frac{1}{x}}$.

Задание 2.8. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$. Ответ: $y = \frac{1}{x^2 + Cx}$.

2) $y' - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{2y}$. Ответ: $y^2 = -x\ln|x| + Cx$.

3) $y' - y = \frac{x}{y}$. Ответ: $y^2 = -x - \frac{1}{2} + Ce^{2x}$.

4) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^2\ln x}{x}$. Ответ: $y^{-1} = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4} + Cx^2$.

5) $y' - \frac{x}{1-x^2}y = \frac{y^2}{1-x^2}$. Ответ: $y^{-1} = -x + C\sqrt{x^2-1}$.

6) $y' + \frac{y}{x} = x^2y^2$. Ответ: $y^{-1} = -\frac{1}{2}x^3 + Cx$.

7) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{x}{y}$. Ответ: $y^2 = \frac{x\sin 2x + x^2 - 1 + \cos^2 x + C}{2\cos^2 x}$.

8) $y' + y = -\frac{1}{y^2}$. Ответ: $y^3 = -1 + Ce^{-3x}$.

9) $y' - \operatorname{ctg} x \cdot y = \frac{1}{y}$. Ответ: $y^2 = \frac{\operatorname{tg} x(-2 + C \operatorname{tg} x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

10) $y' - y = x^2 y^{-3}$. Ответ: $y^4 = -x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{8} + Ce^{4x}$.

11) $y' + xy = \frac{x^3}{y}$. Ответ: $y^2 = x^2 - 1 + Ce^{-x^2}$.

Задание 2.9. Найти частные интегралы дифференциальных уравнений:

1) $\left(1+y^2\right)dx - \left(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy\right)dy = 0,\ y(0) = 0$. Ответ: $\sqrt{1+y^2} \cdot x + \cos y = 1$.

2) $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0,\ y(0) = 1$. Ответ: $\frac{x}{y^2} + \frac{1}{y^3} = 1$.

3) $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3 y\right)dy = 0,\ y(1) = 2$. Ответ: $2 = \frac{xy}{\sqrt{x^2 y - 1}}$.

4) $y^2 dx + \left(x - 2xy - y^2\right)dy = 0,\ y(1) = 1$. Ответ: $x = y^2$.

5) $dx - \left(x^{-2}y^3 + xy\right)dy = 0,\ y(0) = 0$. Ответ: $e^{-\frac{3}{2}y^2}\left(x^3 + y^2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

6) $ydx + \left(x + \frac{y}{x}\right)dy = 0,\ y(0) = 1$. Ответ: $y^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

7) $ydx - \left(\frac{x^2}{y} + x\right)dy = 0,\ y(1) = 1$. Ответ: $\frac{y}{x} + \ln|y| = 1$.

8) $dy - 2e^x\left(y - \sqrt{y}\right)dx = 0,\ y(0) = 0$. Ответ: $y = \left(1 - e^{1-e^x}\right)^2$.

9) $ydx + x(1 - xy\ln y)dy = 0,\ y(1) = 1$. Ответ: $x = -\frac{2}{y\left(\ln^2 y - 2\right)}$.

10) $ydx = \left(e^{-y} - x\right)dy,\ y(1) = 1$. Ответ: $x = \frac{1}{y}\left(1 + \frac{1}{e} - \frac{1}{e^y}\right)$.

11) $dx - dy(1+x)\frac{x}{y-3} = 0,\ y(-2) = 1$. Ответ: $x = \frac{y-3}{2-y}$.

§ 2.4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{2.32}$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если существует такая функция $u = u(x,y)$, что левая часть уравнения (2.32) является полным дифференциалом функции $u(x,y)$, т.е.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du\,. \tag{2.33}$$

Для того чтобы дифференциальное уравнение (2.32) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области D выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,, \tag{2.34}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – непрерывные функции вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ во всей области D.

Если условие (2.34) выполнено, то уравнение (2.32) можно записать в виде:

$$du(x,y) = 0, \tag{2.35}$$

откуда следует, что равенство

$$u(x,y) = C, \quad C = Const\,, \tag{2.36}$$

является общим интегралом уравнения (2.32).

Общий интеграл (2.36) уравнения (2.32) находится путем интегрирования системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y). \end{cases} \tag{2.37}$$

Пример 2.10. Найти частный интеграл дифференциального уравнения

$$\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2 y + 4y^3\right)dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

Решение.

Проверяем условие (2.34). Обозначая

$$P(x,y) = 3x^2 + 6xy^2,$$
$$Q(x,y) = 6x^2 y + 4y^3,$$

находим

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy.$$

Таким образом, условие (2.34) выполнено для всех значений x и y. Следовательно, исходное уравнение есть полный дифференциал некоторой неизвестной функции $u(x,y)$. Этот дифференциал такой, что

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0,$$

откуда получаем систему уравнений вида (2.37)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3. \qquad (2.37')$$

Первое уравнение можем переписать в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = 3x^2 + 6xy^2, \\ y = const. \end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение этой системы, находим:

$$u = \int\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ (как и y) – постоянная величина, т.е. не зависящая от x.

Отсюда, дифференцируя u по y и учитывая второе уравнение системы (2.37'), получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3,$$

откуда находим:

$$\varphi'(y) = 4y^3,$$

следовательно,

$$\varphi(y) = y^4 + C_1.$$

Тогда

$$u(x,y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_1,$$

и, следовательно,

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

Наконец, подставляя в общий интеграл начальное условие $y(0)=1$, находим:

$$C=1,$$

а уравнение

$$x^3+3x^2y^2+y^4=1$$

есть частный интеграл исходного уравнения, удовлетворяющий заданному начальному условию.

Если левая часть уравнения (2.32) не является полным дифференциалом, то существует функция $\mu=\mu(x,y)$ – ***интегрирующий множитель*** – такая, что

$$(\mu P)dx+(\mu Q)dy=du. \qquad (2.38)$$

Отсюда следует, что функция $\mu(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P)=\frac{\partial}{\partial x}(\mu Q). \qquad (2.39)$$

Интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ легко находится в двух случаях:

а) $\mu=\mu(x)$, тогда

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx; \qquad (2.40)$$

б) $\mu=\mu(y)$, тогда

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dy. \qquad (2.41)$$

Определив из (2.40) или (2.41) интегрирующий множитель μ, функцию $u(x,y)$ находят интегрированием уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mu P, \qquad (2.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mu Q. \qquad (2.43)$$

Пример 2.11. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$\left(x^2y^2-1\right)dx+2x^3ydy=0.$$

Решение.

Здесь $P=x^2y^2-1, \quad Q=2x^3y$.

Так как $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)=\dfrac{1}{2x^3y}\left(2x^2y-6x^2y\right)=-\dfrac{2}{x}$,

то $\mu=\mu(x)$, а равенство (2.40) запишется в виде

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{x}dx,$$

отсюда находим

$$\ln|\mu|=-2\ln|x|+\ln|C_1| \text{ или } \mu=\frac{1}{x^2},$$

где положили $C_1=1$.

Тогда равенства (2.42) и (2.43) принимают следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2-\frac{1}{x^2},\ \frac{\partial u}{\partial y}=2xy.$$

Отсюда, интегрируя первое равенство по x, находим

$$u=\int\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)dx+\varphi(y)=y^2x+\frac{1}{x}+\varphi(y).$$

Далее, дифференцируя u по y и принимая во внимание второе равенство, получим уравнение для определения функции $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2xy+\varphi'(y)=2xy,$$

откуда

$$\varphi'(y)=0, \quad \varphi(y)=C_1.$$

Следовательно,

$$u(x,y)=y^2x+\frac{1}{x}+C_1,$$

тогда

$$y^2x+\frac{1}{x}=C$$

есть общий интеграл исходного уравнения.

ЗАДАНИЯ

Задание 2.10. Решить следующие задачи Коши:

1) $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0, \quad y(1)=1.$ Ответ: $\frac{x^3}{3}+xy-y^2=\frac{1}{3}.$

2) $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0, \quad y(1)=0.$ Ответ: $\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=\frac{4}{3}.$

3) $(x^3-3xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)dy=0, \quad y(0)=1.$

Ответ: $\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+2x+\frac{y^3}{3}=\frac{1}{3}.$

4) $\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0, \quad y(0)=-1.$ Ответ: $\frac{x^2}{y^3}-\frac{1}{y}=1.$

5) $(x^3+xy^2+y)dx+(y^3+x^2y+x)dy=0, \quad y(0)=2.$

Ответ: $\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{2}y^2+xy+\frac{y^4}{4}=4.$

6) $\left(\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)dy=0, \quad y(1)=2.$

Ответ: $\ln\left|\frac{y}{x}\right|-\frac{xy}{x-y}=\ln 2+2.$

7) $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dy=0, \quad y(0)=0.$

Ответ: $x^4+3x^2y^2+y^3=0.$

8) $\left(\frac{1}{x^2}+\frac{3y^2}{x^4}\right)dx-\frac{2y}{x^3}dy=0, \quad y(1)=0.$ Ответ: $x^2+y^2=x^3.$

9) $\left(x-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0, \quad y(0)=1.$

Ответ: $x^2+y^2-2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}=1.$

10) $\left(e^x+\cos y\right)dx+\left(e^y-\sin y\cdot x\right)dy=0, \quad y(0)=0.$

Ответ: $e^x+x\cos y+e^y=2.$

11) $\left(1+e^y\right)dx+\left(2-e^y\cdot x\right)dy=0, \quad y(0)=0.$

Ответ: $\dfrac{x+2}{1+e^y}-2\ln\left(1+e^y\right)+2y=1-2\ln 2.$

Задание 2.11. **Найти общие интегралы дифференциальных уравнений, допускающих интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$:**

1) $\left(x+y^2\right)dx-2xydy=0.$ Ответ: $y^2=x\ln|x|+Cx.$

2) $y(1+xy)dx-xdy=0.$ Ответ: $y^{-1}=-\dfrac{1}{2}\left(x-C\dfrac{1}{x}\right).$

3) $\dfrac{y}{x}dx+\left(y^3-\ln x\right)dy=0.$ Ответ: $\dfrac{\ln x}{y}+\dfrac{1}{2}y^2=C.$

4) $xydx+\left(x^2+y\right)dy=0.$ Ответ: $\dfrac{1}{2}x^2y^2+\dfrac{1}{3}y^3=C.$

5) $\left(x^2+xy^2\right)dx-x^2ydy=0.$ Ответ: $y^2=-2x+Cx^2.$

6) $\left(x^2-2y\right)dx+xdy=0.$ Ответ: $y=-x^2\ln|x|+Cx^2.$

7) $(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0.$

Ответ: $e^x(x\sin y-\sin y+y\cos y)=C.$

8) $2ydx-\left(x+y^3\right)dy=0.$ Ответ: $\dfrac{x}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{5}y^{5/2}=C.$

9) $\left(e^x+y^2\right)dx+2ydy=0.$ Ответ: $y^2=e^x\left(-\dfrac{1}{2}+e^{-2x}\cdot C\right).$

10) $\left(\sin x+e^y\right)dx+\cos xdy=0.$ Ответ: $y=\ln\dfrac{\cos x}{C+x}.$

11) $\dfrac{y}{x^2}dx+\dfrac{xy+1}{x}dy=0.$ Ответ: $-\dfrac{1}{xy}+\ln|y|=C.$

§ 2.5. Особые решения дифференциального уравнения первого порядка

Если уравнение

$$\Phi(x, y, C) = 0 \tag{2.44}$$

есть общий интеграл дифференциального уравнения

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.45}$$

то решение дифференциального уравнения (2.45), которое нельзя получить из общего интеграла (2.44) ни при каком значении C, называют ***особым решением (особым интегралом)*** дифференциального уравнения первого порядка.

Если уравнение

$$\Psi(x, y) = 0 \tag{2.46}$$

есть неявное решение системы

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0, \end{cases} \tag{2.47}$$

относительно параметра C и при этом функция $y(x)$, определяемая неявно уравнением (2.46), удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению (2.45) и не принадлежит семейству кривых (2.44), то уравнение (2.46) является ***особым интегралом*** дифференциального уравнения (2.45).

Замечание 2.5. С геометрической точки зрения особый интеграл (особое решение) представляет собой огибающую семейства интегральных кривых, входящих в общий интеграл (2.44). Причем через любую точку кривой, изображающей особое решение, проходит, кроме нее, еще и другая, касающаяся ее, интегральная кривая данного дифференциального уравнения, ***т.е. в каждой точке особого решения нарушаются условия Теоремы 2.1. о существовании и единственности решения дифференциального уравнения (задачи Коши)***.

Пример 2.12. Найти особые решения дифференциального уравнения

$$y^2\left(1 + y'^2\right) = R^2$$

и построить семейство его интегральных кривых и их огибающие.

Решение.

Разрешаем данное уравнение относительно y':

$$y' = \pm\frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{ydy}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \pm dx,$$

$$\int\frac{ydy}{\sqrt{R^2 - y^2}} = \pm(x - C),$$

откуда

$$-\sqrt{R^2 - y^2} = \pm(x - C)$$

или

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2$$

и есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, представляющий собой семейство интегральных кривых – семейство окружностей радиуса R с центрами в точках $(C;0)$ (рис. 2.1.).

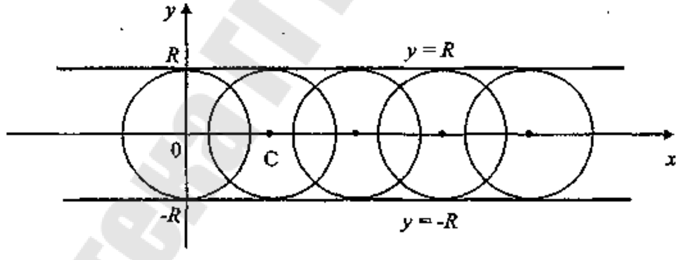

Рис. 2.1.

Для того чтобы найти особое решение исходного дифференциального уравнения, составляем систему (2.47):

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = (x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C} = 2(x - C) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$x - C = 0,$$
$$y^2 - R^2 = 0,$$

откуда находим, что решения этой системы

$$y = \pm R$$

являются особыми решениями данного дифференциального уравнения, т.к. удовлетворяют ему и являются огибающими семейства его интегральных кривых (рис. 2.1.).

ЗАДАНИЯ

Задание 2.12. Найти особые интегралы (особые решения) дифференциальных уравнений и построить семейства интегральных кривых и их огибающие:

1) $y'^2 + y^2 = 1$. Ответ общего решения: $y = \pm\sin(x + C)$;
особого решения: $y = \pm 1$.

2) $xy'^2 - 2yy' + x = 0$. Ответ общего решения: $y = \dfrac{x^2 + C^2}{2C}$;
особого решения: $y = \pm x$.

3) $y'^2 = 4y^3(1 - y)$. Ответ общего решения: $y = \dfrac{1}{(C - x)^2 + 1}$;
особого решения: $y = 1$.

4) $y(y - xy')^2 = y - 2xy'$. Ответ общего решения: $y^2 = Cx(2 - Cx)$;
особого решения: $y = \pm 1$.

5) $yy'^2 - 2xy' + y = 0$. Ответ общего решения: $y^2 = 2Cx - C^2$;
особого решения: $y = \pm x$.

6) $y'^2 - y^2 = -2$. Ответ общего решения: $y = \dfrac{C}{2}e^{\pm x} + \dfrac{1}{C}e^{\mp x}$;
особого решения: $y = \pm\sqrt{2}$.

7) $x\left(\dfrac{2y}{x} - y'\right)^2 + x - \dfrac{y}{x} + y' = 0$. Ответ общего решения: $y = Cx - x^2(1 + C^2)$;
особого решения: $y = \dfrac{1}{4} - x^2$.

8) $y'^2 + y^2 = y$. Ответ общего решения: $y = \pm\dfrac{1}{2}\sin(x + C) + \dfrac{1}{2}$;
особых решений: $y = 0$, $y = 1$.

9) $y'^2 = y^2(1-y)$. Ответ общего решения: $\frac{y^2}{4}\left(1-Ce^x\right)+y=1$;

особого решения: $y=0$.

10) $x^2y'^2 - y^2 + y = 0$. Ответ общего решения: $y=\frac{1+C^2x^2}{4Cx}+\frac{1}{2}$;

особых решений: $y=0,\ y=1$.

11) $x^2y'^2 = y$. Ответ общего решения: $y=\frac{1}{4}\ln^2 Cx$;

особого решения: $y=0$.

§ 2.6. Уравнения Лагранжа и Клеро

Уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{2.48}$$

где φ и ψ – известные функции от y', называется ***уравнением Лагранжа***.

Если в уравнении (2.48)

$$\varphi(y') = y',$$

то уравнение (2.48) принимает вид

$$y = xy' + \psi(y') \tag{2.49}$$

и называется ***уравнением Клеро***.

Для интегрирования уравнений Лагранжа (2.48) и Клеро (2.49) вводят вспомогательный параметр

$$p = y' = \frac{dy}{dx}$$

и записывают эти уравнения в виде:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \tag{2.48'}$$

$$y = xp + \psi(p). \tag{2.49'}$$

Далее, дифференцируя по x уравнения (2.48') и (2.49'), получают:

$$p = \varphi(p) + \left[x\varphi'(p) + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx},$$

$$\left[x + \psi'(p)\right]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Затем, решая найденные уравнения совместно соответственно с уравнениями (2.48') и (2.49'), находят решения уравнений Лагранжа и Клеро.

Пример 2.13. Найти общее и особое решения дифференциального уравнения

$$y = xy'^2 + y'^2.$$

Решение.

Полагая $y' = p$, будем иметь: $y = p^2(x+1)$.

Дифференцируя последнее уравнение по x, получим:

$$p = p^2 + 2p(x+1)\frac{dp}{dx}$$

или

$$2p(x+1)\frac{dp}{dx} = p(1-p).$$

Отсюда, разделяя переменные, находим:

а) $2\dfrac{dp}{1-p} = \dfrac{dx}{x+1}, \quad p \neq 0, p \neq 1;$

б) $p(1-p) = 0.$

Интегрирование уравнения а) дает:

$$2\int \frac{dp}{1-p} = \int \frac{dx}{x+1},$$

откуда

$$-2\ln|1-p| = \ln|x+1| - 2\ln|C|$$

или

$$x+1 = \frac{C^2}{(p-1)^2}.$$

Исключая параметр p из системы уравнений

$$\begin{cases} y = p^2(x+1), \\ x+1 = \dfrac{C^2}{(p-1)^2}, \end{cases}$$

находим общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = \left(C + \sqrt{x+1}\right)^2.$$

Особое решение исходного дифференциального уравнения находится как обычно из системы уравнений вида (2.47):

$$\begin{cases} y = \left(C + \sqrt{x+1}\right)^2, \\ 2\left(C + \sqrt{x+1}\right) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что решение

$$y = 0$$

является особым решением исходного дифференциального уравнения, поскольку оно удовлетворяет ему, но не может быть получено из общего решения ни при каком значении C.

Далее, решая уравнение б), находим

$$p = 0 \text{ и } p = 1,$$

подстановка которых в уравнение

$$y = p^2(x+1)$$

дает

$$y = 0 \text{ и } y = x + 1.$$

Функция $y = 0$, как было показано ранее, является особым решением, а функция $y = x + 1$ является частным решением, т.к. получается из общего решения при $C = 0$.

Пример 2.14. Для дифференциального уравнения $y = xy' + \dfrac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$ найти его особый интеграл и построить семейство интегральных кривых и его огибающую.

Решение.

Полагая $y' = p$, будем иметь: $y = xp + \dfrac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$.

Продифференцировав последнее уравнение по x, получим

$$p = p + \left[x + \frac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}}\right]\frac{dp}{dx},$$

откуда следует

$$\text{а) } \frac{dp}{dx} = 0;$$

б) $x + \frac{a}{\left(1+p^2\right)^{3/2}} = 0$.

Интегрирование уравнения а) дает:

$$p = C.$$

Теперь, исключая параметр р из системы уравнений

$$\begin{cases} y = xp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}, \\ p = C, \end{cases}$$

находим общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}},$$

представляющее собой семейство прямых (рис. 2.2.).

Особый интеграл (уравнение огибающей) получим, исключая параметр C из системы уравнений:

$$\begin{cases} x + \frac{a}{\left(1+C^2\right)^{3/2}} = 0, \\ y = Cx + \frac{aC}{\sqrt{1+C^2}}. \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$x = -\frac{a}{\left(1+C^2\right)^{3/2}},$$

$$y = \frac{aC^3}{\left(1+C^2\right)^{3/2}}.$$

Возводя обе части каждого из найденных уравнений в степень $2/3$ и затем складывая их почленно, получим особый интеграл:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Эта кривая – астроида, однако только ее левая часть является огибающей семейства интегральных кривых, т.к. $x \le 0$ (рис. 2.2.).

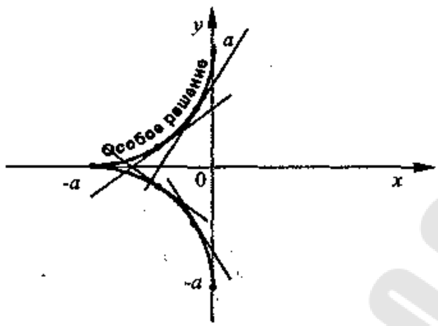

Рис. 2.2.

ЗАДАНИЯ

Задание 2.13. Найти особые интегралы (особые решения) дифференциальных уравнений и построить семейства интегральных кривых и их огибающие:

1) $y = xy' + \sqrt{y'^2 - 1}$. Ответ: $y = Cx + \sqrt{C^2 - 1}$;

особое решение: $y = -\sqrt{x^2 - 1}$.

2) $y = xy' - \frac{1}{4}y'^2$. Ответ: $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$;

особое решение: $y = x^2$.

3) $y = xy' - \frac{4}{y' + 1}$. Ответ: $y = Cx - \frac{4}{C+1}$;

особое решение: $y = \pm 4\sqrt{-x} - x$.

4) $y = xy' + y'^2$. Ответ: $y = Cx + C^2$;

особое решение: $y = -\frac{x^2}{4}$.

5) $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$. Ответ: $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$;

особое решение: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

6) $y = xy' + 1 + y'^2$. Ответ: $y = Cx + 1 + C^2$;

особое решение: $y = 1 - \frac{x^2}{4}$.

7) $y = xy' + y' - y'^2$. Ответ: $y = Cx + C - C^2$;

особое решение: $4y = (x+1)^2$.

8) $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$. Ответ: $y = Cx + \sqrt{1 - C^2}$;

особое решение: $y^2 - x^2 = 1$.

9) $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$. Ответ: $y = Cx + \dfrac{1}{C}$;

особое решение: $y = 4x$.

10) $y = xy' - \dfrac{1}{y'^2}$. Ответ: $y = Cx - \dfrac{1}{C^2}$;

особое решение: $y^3 = -\dfrac{27}{4}x^2$.

11) $y = xy' - y'^2$. Ответ: $y = Cx - C^2$;

особое решение: $y = \dfrac{x^2}{4}$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Если уравнение (1.1) можно разрешить относительно n-ой производной, т.е.

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{3.1}$$

то его называют ***дифференциальным уравнением n-го порядка, разрешенным относительно n-ой производной***.

Для уравнения (3.1) справедлива ***теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения n-го порядка, разрешенного относительно n-ой производной (задачи Коши)***.

<u>Теорема 3.1.</u> *Если в уравнении*

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ *и ее частные производные по аргументам* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ *непрерывны в некоторой области, содержащей значения*

$$x = x_0,\ y = y_0,\ y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ *данного уравнения, удовлетворяющее условиям*

$$\begin{cases} y_{|x=x_0} = y_0, \\ y'_{|x=x_0} = y'_0, \\ \quad \ldots \\ y^{(n-1)}_{|x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Эти условия называются ***начальными условиями***.

§ 3.1. Случай непосредственного интегрирования. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

1⁰. *Случай непосредственного интегрирования*

Решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x)$$

находится путем его n-кратного интегрирования.

Пример 3.1. Решить задачу Коши:

$$y'' = x, \; y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Решение.

Интегрируя исходное уравнение три раза, получим

$$y' = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y = \int\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Это есть общий интеграл. Из начальных условий определяем C_1 и C_2:

$$y(0) = C_2 = 0,$$
$$y'(0) = C_1 = 1.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y = \frac{x^3}{6} + x.$$

2^0. *Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка*

I. ***Если дифференциальное уравнение (1.1) не содержит явно искомой функции у и ее первых производных до (k-1)-го порядка включительно, т.е.***

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \ ,$$

то, полагая

$$y^{(k)} = p(x),$$

получают дифференциальное уравнение (n-k)-го порядка:

$$F\left(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}\right) = 0 .$$

Пример 3.2. Решить задачу Коши:

$$xy'' + y' + x = 0,$$
$$y(1) = y'(1) = 0.$$

Решение.

Полагая $y' = p(x)$, имеем $y'' = p'$.

Тогда исходное уравнение принимает вид:

$$xp' + p = -x$$

и является линейным уравнением относительно функции $p(x)$. Решение этого уравнения ищем в виде

$$p = u(x)v(x),$$

откуда

$$p' = u'v + uv'.$$

Подстановка этих выражений для p и p' в линейное уравнение для функции $p(x)$ дает:

$$xvu' + u(xv' + v) = -x .$$

Отсюда получаем дифференциальные уравнения для определения функций $v(x)$ и $u(x)$:

а) $xv' + v = 0$;

б) $xvu' = -x$.

Разделяя переменные в уравнении а), будем иметь

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x},$$

откуда

$$\ln|v| = -\ln|x| \text{ или } v = \frac{1}{x}.$$

Подставляя это решение для функции $v(x)$ в уравнение б), получим уравнение для определения функции $u(x)$:

$$u' = -x.$$

Отсюда находим:

$$u = -\int x dx + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_1.$$

Следовательно, общее решение для функции $p(x)$ будет иметь вид:

$$p = u(x)v(x) = \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2}.$$

Из начального условия

$$y'_{|x=1} = p_{|x=1} = 0$$

имеем:

$$0 = C_1 - \frac{1}{2}, \text{ т.е. } C_1 = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$p = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2} \text{ или } y' = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2},$$

откуда, интегрируя, получим:

$$y = \int\left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right)dx + C_2 = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2.$$

Отсюда, используя начальное условие $y(1) = 0$, находим:

$$0 = -\frac{1}{4} + C_2, \quad \text{т.е.} \quad C_2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, искомое частное решение будет иметь вид:

$$y = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

II. ***Если дифференциальное уравнение (1.1) не содержит явно x, т.е.***

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то, полагая

$$y' = p(y)$$

и вычисляя производные

$$y'' = p\frac{dp}{dy}, \; y''' = p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p^2\frac{d^2p}{dy^2} \text{ и т.д.,}$$

получают дифференциальное уравнение (n-1)-го порядка:

$$F_1\left(y, p, p', \ldots, p^{(n-1)}\right) = 0.$$

Пример 3.3. Решить задачу Коши:

$$\begin{gathered} yy'' - y'^2 = y^4, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \end{gathered}$$

Решение.

Полагаем $y' = p(y)$, тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$

и исходное дифференциальное уравнение преобразуется к виду:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4.$$

Это уравнение типа Бернулли относительно функции $p(y)$, решение которого ищем в виде

$$p = u(y) \cdot v(y),$$

откуда

$$\frac{dp}{dy} = u'v + uv'.$$

После подстановки этих выражений для p и $\dfrac{dp}{dy}$ в уравнение Бернулли для функции $p(y)$ имеем:

$$yuv(u'v + uv') - u^2v^2 = y^4$$

или

$$yv^2uu' + u^2v(yv' - v) = y^4.$$

Отсюда получаем дифференциальные уравнения для определения функций $v(y)$ и $u(y)$:

$$\text{а) } yv' - v = 0;$$

$$\text{б) } yv^2uu' = y^4.$$

Далее, разделяя переменные в уравнении а), будем иметь:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y},$$

откуда

$$\ln|v| = \ln|y| \text{ или } v = y.$$

Подставляя это решение для функции $v(y)$ в уравнение б), получим уравнение для определения функции $u(y)$:

$$y^3uu' = y^4 \text{ или } udu = ydy.$$

Отсюда находим:

$$\int udu = \int ydy + \frac{C_1}{2}$$

или

$$u^2 = y^2 + C_1,$$

откуда

$$u = \pm\sqrt{y^2 + C_1}.$$

Тогда общее решение для функции $p(y)$ будет иметь вид:

$$p = u(y)v(y) = \pm y\sqrt{y^2 + C_1}.$$

Из начальных условий

$$y(0) = 1, \ y'(0) = p_{|y=1} = 0$$

имеем:

$$0 = \pm\sqrt{1 + C_1}, \text{ т.е. } C_1 = -1.$$

Следовательно,

$$p = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$$

или

$$y' = \pm y\sqrt{y^2 - 1}.$$

Отсюда, разделяя переменные и интегрируя, получим:

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{y^2 - 1}} = \pm \int dx + C_2$$

или

$$-\int \frac{d(1/y)}{\sqrt{1-(1/y)^2}} = \pm x + C_2,$$

т.е.

$$\arccos(1/y) = \pm x + C_2.$$

Теперь, используя начальное условие $y(0) = 1$, находим:

$$\arccos 1 = C_2, \text{ т.е. } C_2 = 0.$$

Тогда искомое частное решение будет иметь вид:

$$\arccos(1/y) = \pm x,$$

откуда

$$\frac{1}{y} = \cos x \text{ или } y = \frac{1}{\cos x}.$$

ЗАДАНИЯ

Задание 3.1. Решить задачи Коши:

1) $y'' = \frac{1}{x}$, $y(-1) = y'(-1) = 0$. Ответ: $y(x) = -x + x\ln|x| - 1$.

2) $y'' = \cos 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Ответ: $y(x) = -\cos x + \frac{\pi}{2} + 1 - x$.

3) $y'' = 4e^{-2x}$, $y(0) = y'(0) = 1$. Ответ: $y(x) = e^{-2x} + 3x$.

4) $y'' = \ln x$, $y(1) = y'(1) = 1$. Ответ: $y(x) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4} + 2x$.

5) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. Ответ: $y(x) = -\ln|\cos(x)| + 2x$.

6) $y'' = \cos x \cdot e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Ответ: $y(x) = \frac{1}{2} e^x \sin x + \frac{x}{2}$.

7) $y'' = \sin x + \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'(\pi) = 1$. Ответ: $y(x) = -\cos x - \sin x + 1$.

8) $y'' = \sin x + \ln x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Ответ: $y(x) = -\sin x + \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3}{4}x^2 + x$.

9) $y'' = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$. Ответ: $y(x) = -\ln|x| + x$.

10) $y'' = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, $y(0) = 1$, $y'(1) = 1$. Ответ: $y(x) = \frac{x^2}{2}\ln\frac{1}{x} + \frac{3}{4}x^2 + 1$.

11) $y'' = \frac{x}{1+x^2}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Ответ: $y(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + 1$.

Задание 3.2. Решить задачи Коши:

1) $xy'' = y'$, $y(1) = y'(1) = 1$. Ответ: $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2$.

2) $y'' = 1 + y'^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$. Ответ: $y(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) + 2$.

3) $x^2 y'' + xy' = 1$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$. Ответ: $y(x) = \frac{1}{2}\ln^2|x| + 2 + \ln|x|$.

4) $\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. Ответ: $y(x) = 3x + x^3$.

5) $y'y'' = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Ответ: $y(x) = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}x^{3/2} + 1$.

6) $y''^2 = y' + 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Ответ: $y(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$.

7) $y''y' = x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$. Ответ: $y(x) = \frac{1}{2}x|x| + \frac{1}{2}$.

8) $\left(x + x^2\right)y'' + y' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$. Ответ: $y(x) = \ln|x| + x$.

9) $(1 - x)y'' + y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Ответ: $y(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2$.

10) $(1 + x)y'' + y' = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Ответ: $y(x) = x + 1 - \ln|x + 1|$.

11) $(1 + x)y'' + 2y' = x$, $y(0) = y'(0) = 0$. Ответ: $y(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x+1}$.

Задание 3.3. Решить задачи Коши:

1) $y'' = -\dfrac{1}{y^3}$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$. Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{27x^2 - 18x}$.

2) $yy'' + y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Ответ: $y(x) = \sqrt{4x+1}$.

3) $y'' = y'(1 + y')$, $y(0) = -\dfrac{\pi}{3}$, $y'(0) = 1$. Ответ: $y(x) = -\ln\left|e^x - 2\right| - \dfrac{\pi}{3}$.

4) $2yy'' = 1 + y'^2$, $y(1) = y'(1) = 1$. Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x^2$.

5) $(y'')^2 + y'^2 = 1$, $y(0) = y'(0) = 0$. Ответ: $y(x) = \pm(\cos x - 1)$.

6) $y'' + y'^2 = y$, $y(0) = y'(0) = 2$. Ответ: $y(x) = \ln\left|e^x - \dfrac{1}{2}\right| + \ln 2 + 2$.

7) $y''^2 - y'^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$. Ответ: $y(x) = \pm 3\left(1 - e^{\mp x}\right)$.

8) $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Ответ: $y(x) = e^{2x}$.

9) $yy' = y''$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$. Ответ: $y(x) = 2\,\mathrm{tg}\,x$.

10) $yy'' + y'^2 = y'^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Ответ: $y^2 - 4y + 4x + 3 = 0$.

11) $y''^2 - y' = 1$, $y(1) = 1$, $y'(0) = 0$. Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{12}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{5}{12}$.

Задание 3.4. Найти общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений:

1) $xy'' + y' = 0$. Ответ: $y(x) = C_1 + C_2 \ln|x|$.

2) $yy'' = y'^2$. Ответ: $x(y) = C_1 \ln|y| + C_2$.

3) $yy'' - y'(1 + y') = 0$. Ответ: $x(y) = \dfrac{1}{C_1}\ln\left|-1 + C_1 y\right| + C_2$.

4) $xy''' + y'' = 1 + x$. Ответ: $y(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{12}x^3 + C_1 + C_2 x + C_3 x \ln|x|$.

5) $y'''^2 + y''^2 = 1$. Ответ: $y(x) = \pm\sin(x + C_1) + C_2 x + C_3$.

6) $y'^2 \cdot y''^2 = 1$. Ответ: $y(x) = \pm\dfrac{1}{3}(\pm 2x + C_1)^{3/2} + C_2$.

7) $y'^2 - y''^2 = 1$. Ответ: $y(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x+C_1} + \dfrac{1}{2}e^{x-C_1} + C_2$.

8) $y' + y''^2 = 1$. Ответ: $y(x) = x - \dfrac{1}{12}x^3 + C_1\dfrac{1}{2}x^2 - C_1^2 x + C_2$.

9) $y''' + y''^2 = 0$. Ответ: $y(x) = \ln|x + C_1| \cdot (x + C_1) - x - C_1 + C_2 x + C_3$.

10) $y' + xy''^2 = 1$. Ответ: $y(x) = x - xC_1^2 + \frac{4}{3}x^{3/2}C_1 - \frac{1}{2}x^2 + C_2$.

11) $y'^2 + x^2 y'' = 0$. Ответ: $y(x) = \frac{x}{C_1} + \frac{\ln|C_1 x - 1|}{C_1^2} + C_2$.

§ 3.2. Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Функции

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$$

называются ***линейно зависимыми*** на $(a;b)$, если существуют такие числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не все равные нулю, что

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \equiv 0$$

при $a < x < b$; в противном случае данные функции называются ***линейно независимыми***.

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \qquad (3.2)$$

где $a_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ и $f(x)$ есть непрерывные на $[a;b]$ функции или константы, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка;*** при $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$ уравнение (3.2) называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка***.

Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются линейно независимыми решениями линейного однородного дифференциального уравнения (3.2) $\left(f(x) \equiv 0\right)$, то его общее решение y_0 имеет вид:

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3.3)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные, а функции y_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ называются его ***фундаментальной системой решений***.

Общее решение y неоднородного линейного дифференциального уравнения (3.2) может быть записано в виде

$$y = y_0 + y^*, \qquad (3.4)$$

где y_0 – общее решение однородного уравнения соответствующего уравнению (3.2); y^* – частное решение неоднородного уравнения (3.2).

Если известно общее решение (3.3) однородного дифференциального уравнения (3.2) $\left(f(x) \equiv 0\right)$, то общее решение y неоднородного линейного дифференциального уравнения (3.2) может быть найдено ***методом Лагранжа вариации произвольных постоянных***, полагая

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n, \tag{3.5}$$

где функции $C_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ \qquad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \tag{3.6}$$

Пример 3.4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy'' - y' = x^2, \quad x > 0.$$

Решение.

Линейно независимые решения y_i линейного однородного уравнения (уравнения Эйлера)

$$xy_0'' - y_0' = 0$$

будем искать в виде

$$y_i = x^k, \quad i = 1,2,$$

подстановка которых в это однородное уравнение приводит к ***характеристическому уравнению***:

$$k(k-1)x^{k-1} - kx^{k-1} = 0$$

или

$$k^2 - 2k = 0.$$

Отсюда находим корни $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, которым соответствуют два линейно независимых решения однородного уравнения:

$$y_1 = x^{k_1} = 1, \quad y_2 = x^{k_2} = x^2.$$

Следовательно, общее решение однородного линейного дифференциального уравнения, согласно формуле (3.3), запишется в виде:

$$y_0 = C_1 + C_2x^2.$$

Тогда общее решение y исходного неоднородного линейного дифференциального уравнения будем искать методом Лагранжа вариации произвольных постоянных, полагая (см. формулу (3.5))

$$y = C_1(x) + C_2(x)x^2.$$

Далее составляем систему дифференциальных уравнений (3.6) для приведенного уравнения (3.2), т.е. для уравнения

$$y'' - \frac{1}{x}y = x.$$

В результате будем иметь:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot 1 + C_2'(x)\cdot x^2 = 0, \\ C_1'(x)\cdot 0 + C_2'(x)\cdot 2x = x. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$C_2'(x) = \frac{1}{2}, \quad C_1'(x) = -\frac{x^2}{2},$$

откуда

$$C_2(x) = \frac{1}{2}x + C_2,$$

$$C_1(x) = -\frac{x^3}{6} + C_1.$$

После подстановки этих выражений в y получим общее решение:

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 + \left(\frac{1}{2}x + C_2\right)x^2$$

или

$$y = C_1 + C_2x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

ЗАДАНИЯ

Задание 3.5. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $x^2y'' - xy' = 3x^3$. Ответ: $y = C_1 + C_2x^2 + x^3$.

2) $x^2y'' + xy' - y = x^2$. Ответ: $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + \frac{x^2}{3}$.

3) $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$. Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \ln|\cos x|$.

4) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$. Ответ: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \dfrac{x}{2}\cos 2x + \dfrac{1}{4}\sin 2x \ln|\sin 2x|$.

5) $y'' + y = \operatorname{tg} x$. Ответ: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \dfrac{1}{2}\cos x \ln\left(\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$.

6) $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$. Ответ: $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \dfrac{x}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{9}\cos 3x \ln|\cos 3x|$.

7) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$. Ответ: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x|$.

8) $y'' - y = \operatorname{th} x$. Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + e^{-x} \operatorname{arctg} e^x - e^x \operatorname{arctg} e^{-x}$.

9) $y'' + 16y = \operatorname{ctg} 4x$. Ответ: $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x - \dfrac{1}{32}\sin 4x \ln\dfrac{1+\cos 4x}{1-\cos 4x}$.

10) $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$. Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln|x|$.

11) $y'' + y' = \dfrac{1}{1+e^x}$. Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-x} - \ln\left(1+e^{-x}\right) - e^{-x}\ln\left(1+e^x\right)$.

§ 3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Уравнение (3.2), коэффициенты которого $a_i(x) = a_i = Const(i = 1,2,\ldots,n)$, а $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$, т.е. уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{3.7}$$

называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами***.

Общее решение однородного уравнения (3.7) определяется как и ранее выражением (3.3), а его фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ строится на основе характера корней ***характеристического уравнения***

$$\varphi(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{3.8}$$

А именно:

если k есть вещественный корень уравнения (3.8) кратности r, то ему соответствует r линейно независимых решений уравнения (3.7):

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}, \ldots, y_r = x^{r-1}e^{kx}; \tag{3.9}$$

если $\alpha \pm i\beta$ – пара комплексных корней уравнения (3.8) кратности r, то ей соответствует $2r$ линейно независимых решений уравнения (3.7):

$$\begin{aligned} &y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots,\ y_r = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ &y_{r+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ y_{r+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots,\ y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Пример 3.5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 2y'' + y' = 0.$$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение (3.8):

$$\varphi(k) = k^3 - 2k^2 + k = k(k-1)^2 = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_1 = 0\ (r = 1), \quad k_2 = k_3 = 1\ (r = 2),$$

которым соответствуют, согласно (3.9), три линейно независимых решения:

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^x,\ y_3 = xe^x.$$

Тогда общее решение (см. формулу (3.3)) принимает вид:

$$y = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x.$$

Пример 3.6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y^{IV} - y = 0.$$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение (3.8):

$$\varphi(k) = k^4 - 1 = (k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0.$$

Находим корни характеристического уравнения:

$$k_1 = -1\ (r = 1),\ k_2 = 1\ (r = 1), \quad k_{3,4} = \pm i\ (r = 1),$$

которым соответствуют согласно (3.9) и (3.10) четыре линейно независимых решения:

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^x,\ y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin x.$$

Тогда общее решение согласно (3.3) есть:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3\cos x + C_4\sin x.$$

ЗАДАНИЯ

Задание 3.6. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

2) $y'' + 5y' + 4y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x}$.

3) $y'' - 9y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$.

4) $y'' + 2y' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-2x}$.

5) $y'' + 2y' + 2y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x$.

6) $y'' - 4y' + 5y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin x$.

7) $y'' + 4y' + 13y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{-2x}\cos 3x + C_2e^{-2x}\sin 3x$.

8) $y'' + 4y = 0$. Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

9) $y'' + 4y' + 4y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$.

10) $y'' - 6y' + 9y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$.

11) $y'' - 8y' + 16y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$.

Задание 3.7. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x}$.

2) $y''' - 4y'' - 5y' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{5x}$.

3) $y''' - 4y'' + 4y' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$.

4) $y''' + 4y'' + 5y' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2e^{-2x}\cos x + C_3e^{-2x}\sin x$.

5) $y^{IV} + 4y'' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$.

6) $y^{IV} - 9y'' = 0$. Ответ: $y = C_1 + C_2x + C_3e^{-3x} + C_4e^{3x}$.

7) $y^{IV} + 3y'' - 4y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{x} + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x$.

8) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$. Ответ: $y = C_1\cos 2x + C_2x\cos 2x + C_3\sin 2x + C_4x\sin 2x$.

9) $y^{IV} + 18y'' + 81y = 0$. Ответ: $y = C_1\cos 3x + C_2x\cos 3x + C_3\sin 3x + C_4x\sin 3x$.

10) $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3x^2e^{-x} + C_4x^3e^{-x}$.

11) $y^{IV} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 0$. Ответ: $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + C_3e^{x} + C_4xe^{x}$.

§ 3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Уравнение (3.2), коэффициенты которого $a_i(x) = a_i = Const(i = 1,2,...,n)$, а правая часть имеет специальный вид

$$f(x) = e^{ax}\left[P_l(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right], \qquad (3.11)$$

где $P_l(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени l и m, соответственно, называется ***линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.***

Его общее решение может быть найдено либо ***методом вариации произвольных постоянных*** по формулам (3.5) и (3.6), либо ищется в виде представления (3.4). Причем, в последнем случае общее решение y_0 однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному уравнению, ищется по формулам (3.8) – (3.10), а частное решение y^* этого неоднородного уравнения с правой частью вида (3.11) находится ***методом неопределенных коэффициентов.*** А именно, частное решение y^* ищут по виду правой части (3.11), полагая

$$y^* = x^{\mu}e^{ax}\left[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx\right], \qquad (3.12)$$

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени $N = \max(l,m)$ с неопределенными коэффициентами, а значение μ определяется из следующих условий:
если комплексные числа $a \pm ib$ являются корнями характеристического уравнения (3.8) кратности r, т.е.

$$\varphi(a \pm ib) = 0, \qquad (3.13)$$

то $\mu = r$;
если же комплексные числа $a \pm ib$ не являются корнями характеристического уравнения (3.8), т.е.

$$\varphi(a \pm ib) \neq 0, \qquad (3.14)$$

то $\mu = 0$.

Замечание 3.1. Даже тогда, когда в правой части (3.11) стоит выражение, содержащее только $\cos bx$ или только $\sin bx$, тем не менее частное решение y^* выбирается в том же виде (3.12).

Замечание 3.2. Если правая часть уравнения (3.2) представляет собой сумму нескольких функций, т.е.

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_k(x), \qquad (3.15)$$

то частное решение y^* уравнения (3.2) также представляется в виде суммы его частных решений ***(принцип наложения решений)***

$$y^* = y_1^* + y_2^* + \ldots + y_k^*, \qquad (3.16)$$

где y_i^* $(i = 1,2,\ldots,k)$ – частные решения уравнений (3.2), соответствующих правым частям $f_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,k)$.

Пример 3.7. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + y = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Решение.

Решаем однородное уравнение

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\varphi(k) = k^2 - 2k + 1 = 0$$

имеет корни $k_1 = k_2 = 1$ $(r = 2)$, которым соответствуют два линейно независимых решения:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = xe^x.$$

Тогда общим решением однородного уравнения согласно формуле (3.3) будет

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 xe^x.$$

Частное решение y^* неоднородного уравнения ищем в виде (3.12), т.е. по виду его правой части (метод неопределенных коэффициентов)

$$f(x) = xe^x.$$

Сравнивая это выражение с общим видом (3.11), получим:

$$a = 1, \quad b = 0, \quad P_l(x) = x, \quad l = 1,$$

откуда следует, что

$$N = 1, \quad S_1(x) = Ax + B.$$

Так как $a \pm ib = 1$ есть корень характеристического уравнения кратности $r = 2$, т.е.

$$\varphi(1) = k^2 - 2k + 1\Big|_{k_1 = k_2 = 1} = 0,$$

то $\mu = r = 2$.

Тогда частное решение y^* согласно формуле (3.12) будем искать в виде

$$y^* = x^2 e^x \left(Ax + B\right),$$

подстановка которого в исходное неоднородное уравнение дает:

$$e^x\left(Ax^3 + Bx^2 + 6Ax^2 + 6Ax + 4Bx + 2B\right) - 2e^x\left(Ax^3 + Bx^2 + 3Ax^2 + 2Bx\right) +$$
$$+ e^x\left(Ax^3 + Bx^2\right) = xe^x.$$

Сокращая на e^x и приравнивая друг к другу коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены в левой и правой частях последнего равенства, получим

$$6A = 1, \;\; 2B = 0,$$

откуда

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = 0.$$

Таким образом,

$$y^* = \frac{1}{6}x^3 e^x,$$

а общее решение данного неоднородного уравнения согласно формуле (3.4) запишется в виде

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

Из начальных условий $y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0$ находим

$$y(0) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{3}x^3 e^x\Big|_{x=0} = C_1 = 1,$$

$$y'(0) = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x + x^2 e^x + \frac{1}{3}x^3 e^x\Big|_{x=0} = C_1 + C_2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = 1, \quad C_2 = -1.$$

Следовательно, частное решение исходной задачи Коши есть

$$y = e^x - xe^x + \frac{1}{3}x^3 e^x.$$

Пример 3.8. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = 3\cos 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Решение.

Решаем однородное уравнение

$$y'' + y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\varphi(k) = k^2 + 1 = 0$$

имеет корни $k_1 = i$ $(r = 1)$ и $k_2 = -i$ $(r = 1)$, которым соответствуют два действительных линейно независимых решения

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x.$$

Тогда общим решением однородного уравнения согласно формуле (3.3) будет

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение y^* неоднородного уравнения ищем, учитывая **Замечание 3.1.**, в виде (3.12), т.е. по виду его правой части (метод неопределенных коэффициентов)

$$f(x) = 3\cos 2x.$$

Сравнивая это выражение с общим видом (3.11), получим:

$$a = 0, \ b = 2, \ P_l(x) = 3, \ l = 0, \ Q_m(x) = 0, \ m = 0,$$

откуда следует, что

$$N = 0, \ S_0(x) = A, \ T_0(x) = B.$$

Поскольку $a \pm ib = \pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения, т.е.

$$\varphi(\pm 2i) = k^2 + 1\big|_{k=\pm 2i} \neq 0,$$

то $\mu = 0$.

Тогда частное решение y^* (см. формулу (3.12)) будем искать в виде

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

подстановка которого в исходное неоднородное уравнение дает:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = 3\cos 2x.$$

Приравнивая друг к другу коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях последнего равенства, получим

$$-3A = 3, \quad -3B = 0,$$

откуда

$$A = -1, \quad B = 0.$$

Таким образом,

$$y^* = -\cos 2x,$$

а общее решение данного неоднородного уравнения (см. формулу (3.4)) запишется в виде

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos 2x.$$

Далее из начальных условий $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$ находим

$$y(0) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos 2x\big|_{x=0} = C_1 - 1 = 2,$$

$$y'(0) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2\sin 2x\big|_{x=0} = C_2 = -1,$$

откуда

$$C_1 = 3, \quad C_2 = -1.$$

Следовательно, частным решением исходной задачи Коши будет

$$y = 3\cos x - \sin x - \cos 2x.$$

Пример 3.9. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - 2y'' - 3y' = 2\sin x - 3xe^{-x}.$$

Решение.

Ищем решение однородного уравнения

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\varphi(k) = k^3 - 2k^2 - 3k = 0$$

имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = -1$, $k_3 = 3$ каждый кратности $r = 1$, которым соответствуют три линейно независимых решения

$$y_1 = 1, \ y_2 = e^{-x}, \ y_3 = e^{3x}.$$

Тогда общим решением однородного уравнения (см. формулу (3.3)) будет

$$y_0 = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}.$$

Частное решение y^* неоднородного уравнения ищем, учитывая **Замечание 3.2.**, как сумму частных решений вида (3.12)

$$\begin{aligned} y^* = x^{\mu_1} e^{a_1 x}\left(S_{N_1}(x)\cos b_1 x + T_{N_1}(x)\sin b_1 x\right) + \\ + x^{\mu_2} e^{a_2 x}\left(S_{N_2}(x)\cos b_2 x + T_{N_2}(x)\sin b_2 x\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

т.е. по виду его правой части

$$f(x) = 2\sin x - 3xe^{-x}.$$

Сравнивая это выражение для правой части $f(x)$ с ее общим выражением в виде суммы функций вида (3.11), т.е. с

$$\begin{aligned} f(x) = e^{a_1 x}\left(P_{l_1}(x)\cos b_1 x + Q_{m_1}(x)\sin b_1 x\right) + \\ + e^{a_2 x}\left(P_{l_2}(x)\cos b_2 x + Q_{m_2}(x)\sin b_2 x\right), \end{aligned}$$

находим:

$$\begin{aligned} &a_1 = 0,\ b_1 = 1,\ P_{l_1}(x) = 0,\ l_1 = 0,\ Q_{m_1}(x) = 2,\ m_1 = 0; \\ &a_2 = -1,\ b_2 = 0,\ P_{l_2}(x) = -3x,\ l_2 = 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &N_1 = 0,\ S_0(x) = A,\ T_0(x) = B; \\ &N_2 = 1,\ S_1(x) = Cx + D. \end{aligned}$$

Поскольку $a_1 \pm ib_1 = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения, т.е.

$$\varphi(\pm i) = k^3 - 2k^2 - 3k\big|_{k=\pm i} \neq 0,$$

а $a_2 \pm ib_2 = -1$ является корнем характеристического уравнения кратности $r = 1$, т.е.

$$\varphi(-1) = k^3 - 2k^2 - 3k\big|_{k=-1} = 0,$$

то $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 1.$

Тогда частное решение y^* согласно выражению (3.17) будем искать в виде

$$y^* = A\cos x + B\sin x + xe^{-x}(Cx + D),$$

подстановка которого в исходное неоднородное уравнение дает:

$$A\sin x - B\cos x - e^{-x}\cancel{\left(Cx^2 + Dx\right)} + e^{-x}\cancel{(6Cx + 3D)} - 6Ce^{-x} -$$
$$-2\left(-A\cos x - B\sin x + e^{-x}\cancel{\left(Cx^2 + Dx\right)} - e^{-x}(4Cx + 2D) + 2Ce^{-x}\right) -$$
$$-3\left(-A\sin x + B\cos x - e^{-x}\cancel{\left(Cx^2 + Dx\right)} + e^{-x}\cancel{(2Cx + D)}\right) =$$
$$= 2\sin x - 3xe^{-x}.$$

Приравнивая друг к другу коэффициенты при $\sin x$, $\cos x$, xe^{-x} и e^{-x} в левой и правой частях последнего равенства, получим

$$4A + 2B = 2, \qquad 2A - 4B = 0,$$
$$8C = -3, \qquad -10C + 4D = 0,$$

откуда

$$A = \frac{2}{5}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = -\frac{3}{8}, \quad D = -\frac{15}{16}.$$

Таким образом,

$$y^* = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x - \left(\frac{3}{8}x^2 + \frac{15}{16}x\right)e^{-x},$$

а общее решение данного неоднородного уравнения (см. формулу (3.4)) запишется в виде

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x - \left(\frac{3}{8}x^2 + \frac{15}{16}x\right)e^{-x}.$$

ЗАДАНИЯ

Задание 3.8. Найти частные решения дифференциальных уравнений:

1) $y'' - 4y' + 4y = x^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Ответ: $y = -\dfrac{3}{8}e^{2x} + \dfrac{5}{4}xe^{2x} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}$.

2) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $y = \dfrac{8}{9}e^{-x} + \dfrac{2}{3}xe^{-x} + \dfrac{1}{9}e^{2x}$.

3) $y'' - 8y' + 7y = 14$, $y(0) = -5$, $y'(0) = -1$.

Ответ: $y = -8e^x + e^{7x} + 2$.

4) $y'' - y = e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

Ответ: $y = \dfrac{3}{4}e^x + \dfrac{5}{4}e^{-x} + \dfrac{1}{2}xe^x$.

5) $y'' + y = \cos x,\ \ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$

Ответ: $y = -\cos x + \sin x + \dfrac{1}{2} x \sin x.$

6) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = -2.$

Ответ: $y = \dfrac{2}{5}e^{x} - \dfrac{6}{5}\sin 2x - \dfrac{2}{5}\cos 2x.$

7) $y'' - 2y' + 3y = x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

Ответ: $y = \dfrac{2}{9} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{4\sqrt{2}}{9}e^{x}\sin\left(\sqrt{2}x\right) - \dfrac{2}{9}e^{x}\cos\left(\sqrt{2}x\right).$

8) $y'' + y = 2\sin x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

Ответ: $y = -x\cos x + \sin x.$

9) $-y'' + 2y' = x + \sin x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

Ответ: $y = -\dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{5}\sin x + \dfrac{x}{4} + \dfrac{5}{8} - \dfrac{9}{40}e^{2x}.$

10) $y'' - 2y' + y = e^{x},\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

Ответ: $y = \dfrac{1}{2}x^2 e^{x} + e^{x} - xe^{x}.$

11) $6y'' + y' - y = x - e^{x},\ \ y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

Ответ: $y = -1 - \dfrac{1}{6}e^{x} - x + \dfrac{3}{2}e^{x/3} - \dfrac{4}{3}e^{-x/2}.$

Задание 3.9. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y''' + 4y'' - 5y' = 10x.$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-5x} + C_3 e^{x} - x^2 - \dfrac{8}{5}x.$

2) $y''' - 5y'' - 6y' = 18x^2 - 1.$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{6x} - x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 5x.$

3) $y''' + 5y'' - 6y' = 3e^{2x}.$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{-6x} + C_3 e^{x} + \dfrac{3}{16}e^{2x}.$

4) $y''' - 5y'' + 6y' = 10e^{-2x}.$

Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x}.$

5) $y^{IV}+3y'''+2y''=2\cos x$.

Ответ: $y=C_1+C_2x+C_3e^{-2x}+C_4e^{-x}-\frac{1}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x$.

6) $y^{IV}-3y'''+2y''=3\sin x$.

Ответ: $y=C_1+C_2x+C_3e^{x}+C_4e^{2x}-\frac{9}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x$.

7) $2y'''-y''-y'=x$.

Ответ: $y=x-\frac{1}{2}x^2+C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-x/2}$.

8) $y'''-y''-2y'=\sin x$.

Ответ: $y=\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x+C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}$.

9) $y'''-4y''+y'=-x^2$.

Ответ: $y=-30x-4x^2-\frac{1}{3}x^3+C_1+C_2e^{(2+\sqrt{3})x}+C_3e^{(2-\sqrt{3})x}$.

10) $y^{IV}+y'''-y''=x$.

Ответ: $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+C_1+C_2x+C_3e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}x}+C_4e^{\frac{-\sqrt{5}-1}{2}x}$.

11) $y^{IV}-y'''-2y''=2x-1$.

Ответ: $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+C_1+C_2x+C_3e^{2x}+C_4e^{-x}$.

Задание 3.10. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1) $y''-2y'-8y=e^{x}-8\cos 2x$.

Ответ: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}-\frac{1}{9}e^{x}+\frac{3}{5}\cos 2x+\frac{1}{5}\sin 2x$.

2) $y''-2y'+10y=e^{x}+\sin 3x$.

Ответ: $y=C_1e^{x}\cos 3x+C_2e^{x}\sin 3x+\frac{1}{9}e^{x}+\frac{6}{37}\cos 3x+\frac{1}{37}\sin 3x$.

3) $y''-3y'=x+\cos x$.

Ответ: $y=C_1+C_2e^{3x}-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{9}x-\frac{1}{10}\cos x-\frac{3}{10}\sin x$.

4) $y''+y'=5x+2e^{x}$. Ответ: $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{2}{5}x^2-5x+e^{x}$.

5) $y'' - 2y' = 5 + e^{2x}$. Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}xe^{2x}$.

6) $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x$. Ответ: $y = C_1 + C_2 e^x - x^2 - x - 3xe^x$.

7) $y'' - 2y = 2x^2 - \sin x$. Ответ: $y = -x^2 - 1 + \frac{1}{3}\sin x + C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}$.

8) $y'' - y' = 2e^x - \sin x$.

Ответ: $y = -2e^x - \frac{1}{2}\cos x + 2e^x \cdot x + \frac{1}{2}\sin x + C_1 + C_2 e^x$.

9) $y'' - 3y' = \cos x - \sin x$. Ответ: $y = -\frac{1}{5}\sin x - \frac{2}{5}\cos x + C_1 + C_2 e^{3x}$.

10) $y'' - 2y' + y = 2x - 2e^x$. Ответ: $y = 2x + 4 - x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x$.

11) $y'' - 2y' + 2y = x^2 - e^{2x}$.

Ответ: $y = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x} + C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x$.

4. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases} \tag{4.1}$$

где $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ – неизвестные функции переменной x, называется ***нормальной системой***. Если правые части системы (4.1) являются линейными относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то система называется линейной.

1⁰. *Метод исключения*

Для нахождения решения системы (4.1) методом исключения дифференцируем по x одно из уравнений этой системы, например, первое. Затем, заменяя производные $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ их выражениями $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из уравнений системы (4.1), приходим к уравнению

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Далее, дифференцируя полученное уравнение последовательно $(n-2)$ раз и поступая каждый раз аналогично предыдущему, получим уравнение

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Объединяя полученные результаты, приходим к следующей системе уравнений, которая эквивалентна исходной системе (4.1),

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \qquad \dots \\ y_1^{(n)} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \tag{4.2}$$

Далее из первых $(n-1)$ уравнений системы (4.2) находим функции $y_2, y_3, \dots, y_n$, выражая их через x, y_1 и производные $y_1', y_1'', \dots, y_1^{(n-1)}$:

$$\begin{cases} y_2 = \varphi_2\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \\ y_3 = \varphi_3\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \\ \qquad \dots \\ y_n = \varphi_n\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right). \end{cases} \tag{4.3}$$

Затем, подставляя найденные выражения для функций $y_2, y_3, \dots, y_n$ в последнее из уравнений системы (4.2), получаем дифференциальное уравнение n-го порядка для определения функции y_1:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right).$$

Решая последнее уравнение, находим функцию y_1. Наконец, подставляя найденное решение для функции y_1 в каждое из уравнений системы (4.3), определяем функции $y_2, y_3, \dots, y_n$.

Пример 4.1. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = y - z + 3x, \\ z' = 2y + 4z + 5. \end{cases}$$

Решение.

Дифференцируя первое уравнение исходной системы и принимая во внимание выражения для y' и z' этой же системы, находим

$$y'' = y' - z' + 3 = y - z + 3x - (2y + 4z + 5) + 3 = -y - 5z + 3x - 2.$$

Определяем z из первого уравнения данной системы

$$z = y - y' + 3x \tag{4.4}$$

и подставляем его выражение в найденное уравнение для y'':

$$y'' = -y - 5(y - y' + 3x) + 3x - 2 = -6y + 5y' - 12x - 2,$$
$$y'' - 5y' + 6y = -12x - 2.$$

Решаем полученное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Ищем решение однородного уравнения

$$y_0'' - 5y_0' + 6y_0 = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\varphi(k) = k^2 - 5k + 6 = 0$$

имеет корни $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Тогда общее решение однородного уравнения дается выражением

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Так как $f(x) = -12x - 2$, то $a = b = 0$, $P_l(x) = -12x - 2$, $l=1$. Следовательно, $a \pm bi = 0$ не является корнем характеристического уравнения, т.е. $\varphi(0) \neq 0$. Поэтому частное решение y^* ищем в виде $(\mu = 0)$:

$$y^* = Ax + B.$$

Подставляя это выражение для y^* в уравнение

$$y'' - 5y' + 6y = -12x - 2$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества, находим

$$A = -2, \quad B = -2.$$

Следовательно,

$$y^* = -2x - 2,$$

тогда

$$y = y_0 + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - 2x - 2.$$

Решение для функции z найдем путем подстановки найденного решения для y в (4.4):

$$z = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - 2x - 2 - \left(2C_1e^{2x} + 3C_2e^{3x} - 2\right) + 3x,$$
$$z = -C_1e^{2x} - 2C_2e^{3x} + x.$$

Итак,

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - 2x - 2, \quad z = -C_1e^{2x} - 2C_2e^{3x} + x.$$

2^0. *Метод Эйлера*

Метод Эйлера применяют для нахождения решения нормальной системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $a_{ij} = Const$; $i,j = 1,2,\ldots,n$.

Частные решения системы (4.5) ищут в виде

$$y_1 = \beta_1 e^{kx},\ y_2 = \beta_2 e^{kx}, \ldots, y_n = \beta_n e^{kx}, \tag{4.6}$$

где k, β_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ – постоянные числа.

Подстановка функций (4.6) в систему (4.5) приводит к однородной системе уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Для того чтобы однородная система (4.7) имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{4.8}$$

Уравнение (4.8) называется ***характеристическим уравнением***, а его корни k_j – ***корнями характеристического уравнения***. Решив уравнение

(4.8), находят корни k_j. Затем для каждого корня k_j находят нетривиальные решения $y_i^{(j)}$ системы (4.7).

Рассмотрим систему (4.5) для случая $n = 2$:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \tag{4.9}$$

Подставляя функции

$$y_1 = \beta_1 e^{kx}, \; y_2 = \beta_2 e^{kx} \tag{4.10}$$

в систему (4.9), получаем однородную систему уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\beta_1 + a_{12}\beta_2 = 0, \\ a_{21}\beta_1 + (a_{22} - k)\beta_2 = 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Определив корни k_j характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0, \tag{4.12}$$

находим нетривиальные решения системы (4.11), соответствующие каждому корню k_j.

При этом возможны три случая.

1. *Корни характеристического уравнения (4.12) действительны и различны*: $k_1 \neq k_2$.

В этом случае, полагая в системе (4.11) $k = k_j$ $(j = 1,2)$, находим ненулевые решения: $\beta_1 = \beta_1^{(j)}$, $\beta_2 = \beta_2^{(j)}$ $(j = 1,2)$. Подставляя эти значения в формулы (4.10), получим фундаментальную систему решений

$$y_i^{(j)} = \beta_i^{(j)} e^{k_j x}, \; i, j = 1,2. \tag{4.13}$$

Тогда общее решение системы (4.9) запишется в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} = C_1\beta_1^{(1)} e^{k_1 x} + C_2\beta_1^{(2)} e^{k_2 x}, \\ y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} = C_1\beta_2^{(1)} e^{k_1 x} + C_2\beta_2^{(2)} e^{k_2 x}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

2. *Корни характеристического уравнения (4.12) комплексные*: $k_1 = a + ib$, $k_2 = a - ib$.

Подобно предыдущему случаю, выбираем решение в виде (4.10), соответствующее корню $k = k_1 = a + ib$. Определяем числа $\beta_1^{(1)}$ и $\beta_2^{(1)}$ как ненулевые решения системы (4.11) для значения $k = k_1 = a + bi$. Затем, отделяя в комплексных решениях $\beta_1^{(1)} e^{k_1 x}$ и $\beta_2^{(1)} e^{k_1 x}$ действительные и мнимые части, получим четыре действительных линейно независимых частных решения $y_i^{(j)}$, $i, j = 1,2$. Их линейная комбинация с произвольными постоянными коэффициентами и дает общее решение системы (4.9).

3. *Корни характеристического уравнения действительные и равные:* $k_1 = k_2 = k$.

В этом случае решения системы (4.9) ищем в виде

$$y_1 = \left(\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)} x\right) e^{kx}, \quad y_2 = \left(\beta_2^{(1)} + \beta_2^{(2)} x\right) e^{kx}. \qquad (4.15)$$

Подставляя их в систему (4.9), сокращая на e^{kx} и приравнивая члены с одинаковыми степенями x, получим систему четырех алгебраических уравнений для определения четырех коэффициентов $\beta_i^{(j)}$ $(i, j = 1,2)$. Поскольку ранг этой системы равен 2, то свободных неизвестных 2. Далее, выбрав свободные неизвестные, решаем систему, выражая оставшиеся коэффициенты системы через свободные, а затем подставляем их в (4.15).

Пример 4.2. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = -y - 2z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$$

Решение.

Частные решения системы ищем в виде (4.10). Характеристическое уравнение (4.12) принимает вид

$$\begin{vmatrix} -1-k & -2 \\ 3 & 4-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0,$$

корни которого $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Для $k = k_1 = 1$ числа $\beta_1^{(1)}$ и $\beta_2^{(1)}$ являются решениями системы вида (4.11)

$$\begin{cases} -2\beta_1^{(1)} - 2\beta_2^{(1)} = 0, \\ 3\beta_1^{(1)} + 3\beta_2^{(1)} = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$\beta_1^{(1)} + \beta_2^{(1)} = 0.$$

Следовательно, одно из чисел $\beta_1^{(1)}$ или $\beta_2^{(1)}$ можно выбрать произвольно: полагая $\beta_1^{(1)} = 1$, находим $\beta_2^{(1)} = -1$. Таким образом, характеристическому числу $k_1 = 1$ соответствуют частные решения

$$y^{(1)} = \beta_1^{(1)} e^{k_1 x} = e^x, \quad z^{(1)} = \beta_2^{(1)} e^{k_1 x} = -e^x.$$

Аналогично для $k = k_2 = 2$ система (4.11) принимает вид:

$$\begin{cases} -3\beta_1^{(2)} - 2\beta_2^{(2)} = 0, \\ 3\beta_1^{(2)} + 2\beta_2^{(2)} = 0, \end{cases}$$

и равносильна одному уравнению

$$3\beta_1^{(2)} + 2\beta_2^{(2)} = 0.$$

Отсюда, полагая $\beta_1^{(2)} = 2$, находим $\beta_2^{(2)} = -3$. Следовательно, характеристическому числу $k_2 = 2$ соответствуют частные решения

$$y^{(2)} = \beta_1^{(2)} e^{k_2 x} = 2e^{2x}, \ z^{(2)} = \beta_2^{(2)} e^{k_2 x} = -3e^{2x}.$$

Тогда общее решение исходной системы запишется в виде (4.14):

$$y = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x},$$
$$z = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}.$$

Пример 4.3. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = y + 2z. \end{cases}$$

Решение.

Характеристическое уравнение (4.12) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 2-k & -1 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 5 = 0$$

и имеет корни $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$. Корню $k = k_1 = 2 + i$ соответствуют комплексные решения вида (4.10):

$$y^{(1)} = \beta_1^{(1)} e^{(2+i)x}, \ z^{(1)} = \beta_2^{(1)} e^{(2+i)x}.$$

Числа $\beta_1^{(1)}$ и $\beta_2^{(1)}$ являются решениями системы вида (4.11)

$$\begin{cases} -i\beta_1^{(1)} - \beta_2^{(1)} = 0, \\ \beta_1^{(1)} - i\beta_2^{(1)} = 0, \end{cases}$$

которая сводится к одному уравнению

$$-i\beta_1^{(1)} - \beta_2^{(1)} = 0.$$

Полагая $\beta_1^{(1)} = 1$, находим $\beta_2^{(1)} = -i$. Теперь, отделяя в комплексных решениях

$$y^{(1)} = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i \sin x),$$
$$z^{(1)} = -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i \cos x)$$

действительные и мнимые части, получим четыре действительных линейно независимых частных решения:

$$y_1^{(1)} = e^{2x} \cos x, \quad z_1^{(1)} = e^{2x} \sin x,$$
$$y_2^{(1)} = e^{2x} \sin x, \quad z_2^{(1)} = -e^{2x} \cos x.$$

Тогда линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами C_1 и C_2 даст общее решение исходной системы:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$
$$z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x).$$

Пример 4.4. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y' = y + 2z, \\ z' = -\dfrac{1}{2}y - z. \end{cases}$$

Решение.

Характеристическое уравнение (4.12) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ -\dfrac{1}{2} & -1-k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 = 0$$

и имеет корень $k = 0$ кратности 2. Поэтому общее решение данной системы ищем в виде (4.15) при $k = 0$:

$$y = \beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)} x, \quad z = \beta_2^{(1)} + \beta_2^{(2)} x. \tag{4.16}$$

Подставляя эти решения в исходную систему и приравнивая члены с одинаковыми степенями x, получим

$$\begin{cases} \beta_1^{(1)} + 2\beta_2^{(1)} = \beta_1^{(2)}, \\ \beta_1^{(2)} + 2\beta_2^{(2)} = 0, \\ -\dfrac{1}{2}\beta_1^{(1)} - \beta_2^{(1)} = \beta_2^{(2)}, \\ -\dfrac{1}{2}\beta_1^{(2)} - \beta_2^{(2)} = 0. \end{cases}$$

В качестве свободных неизвестных выберем $\beta_1^{(1)} = C_1$, $\beta_1^{(2)} = C_2$. Тогда из последней системы находим оставшиеся коэффициенты:

$$\beta_2^{(1)} = \frac{1}{2}\left(C_2 - C_1\right),\ \ \beta_2^{(2)} = -\frac{1}{2}C_2.$$

Следовательно, общее решение исходной системы согласно (4.16) будет

$$y = C_1 + C_2 x, \quad z = \frac{1}{2}\left(C_2 - C_1\right) - \frac{1}{2}C_2 x.$$

Замечание 4.1. (1). Частное решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа), если известно общее решение однородной системы. (2). Частное решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае, когда их правые части имеют специальный вид (содержат выражения вида $x^n e^{ax}\cos bx$ или $x^n e^{ax}\sin bx$), можно также находить по аналогии с решением линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (§ 3.4).

ЗАДАНИЯ

Задание 4.1. Проинтегрировать системы дифференциальных уравнений методом исключения:

1) $\begin{cases} y' = z + 1, \\ z' = y - 2. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x} + 2, \\ & z = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} - 1. \end{aligned}$

2) $\begin{cases} y' = -z + \cos x, \\ z' = 3y - 4z + 4\cos x - \sin x. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}, \\ & z = C_1 e^{-x} + 3C_2 e^{-3x} + \cos x. \end{aligned}$

3) $\begin{cases} y' = -2y - z + \sin x, \\ z' = 4y + 2z + \cos x. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1 + C_2 x + 2\sin x, \\ & z = -2C_1 - C_2 - 2C_2 x - 2\cos x - 3\sin x. \end{aligned}$

4) $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = y + z + x. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x, \\ & z = -C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}. \end{aligned}$

5) $\begin{cases} y' = -3y - 4z + 2x, \\ z' = y + z + x. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = (C_2 - 2C_1 - 2C_2x)e^{-x} - 6x + 14, \\ & z = (C_1 + C_2x)e^{-x} + 5x - 9. \end{aligned}$

6) $\begin{cases} y' = z + 1, \\ z' = -y + x. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x, \\ & z = C_2 \cos x - C_1 \sin x. \end{aligned}$

7) $\begin{cases} y' = -2y - 4z + 4x, \\ z' = -y + z + x^2. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{8}{27}, \\ & z = -C_1e^{2x} + \frac{C_2}{4}e^{-3x} - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{9}x - \frac{2}{27}. \end{aligned}$

8) $\begin{cases} y' = y - z + 1, \\ z' = -4y + z + x. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}, \\ & z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x} + \frac{x}{3} + \frac{7}{9}. \end{aligned}$

9) $\begin{cases} y' = y - z + e^x, \\ z' = -4y + z + e^{3x}. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \left(\frac{1}{16} - \frac{x}{4}\right)e^{3x}, \\ & z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x} + \left(\frac{1}{8} + \frac{x}{2}\right)e^{3x} + e^x. \end{aligned}$

10) $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = 2y - z + x. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1(\sin x + \cos x) - C_2 \sin x - x, \\ & z = 2C_1 \sin x + C_2(\cos x - \sin x) + 1 - x. \end{aligned}$

11) $\begin{cases} y' = y + x, \\ z' = -2y + z. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = e^xC_1 - x - 1, \\ & z = -2C_1xe^x + C_2e^x - 2x - 4. \end{aligned}$

Задание 4.2. Проинтегрировать системы дифференциальных уравнений методом Эйлера:

1) $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = y - z. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = (C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x, \\ & z = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \end{aligned}$

2) $\begin{cases} y' = z - y, \\ z' = -y - 3z. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}, \\ & z = (C_2 - C_1 - C_2x)e^{-2x}. \end{aligned}$

3) $\begin{cases} y' = -z, \\ z' = -4y. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}, \\ & z = -2C_1e^{2x} + 2C_2e^{-2x}. \end{aligned}$

4) $\begin{cases} y' = z, \\ z' = -y. \end{cases}$ Ответ: $\begin{aligned} & y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ & z = C_2 \cos x - C_1 \sin x. \end{aligned}$

5) $\begin{cases} y' = y + 5z, \\ z' = -y - 3z. \end{cases}$ Ответ: $y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\sin x,$
$z = \frac{1}{5}(C_2 - 2C_1)e^{-x}\cos x - \frac{1}{5}(C_1 + 2C_2)e^{-x}\sin x.$

6) $\begin{cases} y' = -3y - z, \\ z' = y - z. \end{cases}$ Ответ: $y = (C_1 - C_2 - C_1x)e^{-2x},$
$z = (C_1x + C_2)e^{-2x}.$

7) $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = 3y + 4z. \end{cases}$ Ответ: $y = C_1e^{x} + C_2e^{5x},$
$z = -C_1e^{x} + 3C_2e^{5x}.$

8) $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = z - 4y. \end{cases}$ Ответ: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x},$
$z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x}.$

9) $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = -y + 2z. \end{cases}$ Ответ: $y = C_1 + C_2e^{3x},$
$z = \frac{C_1}{2} - C_2e^{3x}.$

10) $\begin{cases} y' = 2y - z, \\ z' = 3z. \end{cases}$ Ответ: $y = C_1e^{2x} - C_2e^{3x},$
$z = C_2e^{3x}.$

11) $\begin{cases} y' = -4z, \\ z' = y. \end{cases}$ Ответ: $y = C_1\cos 2x - 2C_2\sin 2x,$
$z = \frac{1}{2}C_1\sin 2x + C_2\cos 2x.$

5. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

При решении многих научных и технических задач требуется установить зависимость между переменными величинами какого-либо физического, химического, технического, экономического или иного процесса, найти уравнение линии или поверхности и т.д. Решение таких задач приводит к дифференциальным уравнениям, содержащим производные (дифференциалы) неизвестных функций.

При решении этих задач необходимо:

1) по условию задачи составить дифференциальное уравнение;
2) определить тип полученного уравнения и выбрать метод его решения;
3) найти общее решение уравнения;
4) найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям задачи;
5) найти численные значения искомых величин (если это требуется).

Составление дифференциального уравнения по условию задачи состоит в определении либо математической зависимости между приращениями (дифференциалами) переменных величин, либо соотношения, содержащего производные неизвестной функции. При составлении дифференциального уравнения данной задачи в виде соотношения, содержащего производные неизвестной функции, используется геометрический или физический (механический) смысл производной. Кроме того, в зависимости от условия задачи, применяются соответствующие законы физики, механики, химии и других наук, а также различные математические сведения. При решении геометрических задач необходимо сделать чертеж.

Пример 5.1. Найти кривую, проходящую через точку (3; 2), для которой отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Решение.

Пусть точка $M(x;y)$ есть середина отрезка AB касательной к кривой $y = y(x)$, являющаяся по условию точкой касания (точки A и B – точки пересечения касательной с осями $0Y$ и $0X$ (рис.5.1)). По условию задачи $0A = 2y$ и $0B = 2x$.

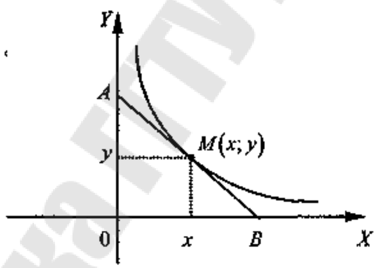

Рис. 5.1.

Тогда угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$ в точке $M(x;y)$ равен

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{0A}{0B} = -\frac{y}{x}.$$

Это и есть дифференциальное уравнение искомой кривой. Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

интегрируя которое, находим общее решение

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \text{ или } xy = C.$$

Используя начальное условие $y(3) = 2$, находим $C = 6$. Итак, искомая кривая есть гипербола $xy = 6$.

Пример 5.2. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Найти закон, по которому будет совершать движение один из этих грузов, если другой оборвется.

Решение.

Пусть увеличение длины пружины под действием одного груза в состоянии покоя равно a, а масса груза равна m. Обозначим через x координату груза, отсчитываемую по вертикали от положения равновесия при наличии одного груза (рис. 5.2).

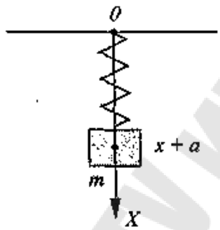

Рис. 5.2.

Тогда по второму закону Ньютона

$$\frac{md^2x}{dt^2} = mg - k(x + a),$$

где $k = mg / a$. Следовательно,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{a}x = 0.$$

Так как его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + g / a = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = i\sqrt{g / a}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{g / a}$, то общее решение запишем в виде

$$x = C_1 \cos\left(\sqrt{g / a} \cdot t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{g / a} \cdot t\right).$$

Начальные условия

$$x(0) = a, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

дают $C_1 = a$, $C_2 = 0$. Итак, груз будет совершать гармонические колебания по закону

$$x = a\cos\left(\sqrt{g/a} \cdot t\right).$$

ЗАДАНИЯ

Задание 5.1. Найти уравнение кривой, для которой длина отрезка касательной между точкой касания и осью $0X$ равна расстоянию точки касания от начала координат.

Ответ: прямая $y = Cx$ или гипербола $y = C/x$.

Задание 5.2. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(3;1)$, для которой отрезок касательной между точкой касания и осью $0X$ делится пополам в точке пересечения с осью $0X$.

Ответ: $y^2 = \dfrac{1}{3}x$.

Задание 5.3. Найти уравнение кривой, у которой отрезок нормали в любой точке кривой, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке.

Ответ: $x^2 - y^2 = C$.

Задание 5.4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1;0)$ и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси $0Y$, равен полярному радиусу точки касания.

Ответ: $x^2 = 1 - 2y$.

Задание 5.5. Найти уравнение кривой, для которой отрезок на оси ординат, отсекаемый любой касательной, равен абсциссе точки касания.

Ответ: $y = Cx - x\ln|x|$.

Задание 5.6. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. При прохождении слоя воды толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света. Найти, какая часть первоначального количества света дойдет до глубины 30 м.

Ответ: $Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5}$; 2^{-10}.

Задание 5.7. Тело, нагретое до T_0 градусов, внесено в помещение, температура которого постоянна и равна a градусов. Найти зависимость температуры T от времени t, если скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды.

Ответ: $T = a + (T_0 - a)e^{-kt}$.

Задание 5.8. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 100 об/мин, по истечении 1 мин. вращается со скоростью 60 об/мин.

Ответ: $\omega = 100(3/5)^t$ об/мин.

Задание 5.9. Сила сопротивления воздуха при падении тела с парашютом пропорциональна квадрату скорости движения. Найти предельную скорость падения.

Ответ: $\upsilon(t \to \infty) = \sqrt{gm/k}$.

Задание 5.10. Электродвижущая сила e в цепи с током i, имеющей сопротивление R и индуктивность L, складывается из падения напряжения Ri и электродвижущей силы самоиндукции $L\frac{di}{dt}$. Определить ток i в момент времени t, если $e = E\sin\omega t$ (E, ω – константы) и $i(0) = 0$.

Ответ: $i = \frac{E}{R^2 + \omega^2 L^2}\left[R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t + \omega L e^{-\frac{R}{L}t}\right]$.

Задание 5.11. Найти форму зеркала, которое отразит все лучи выходящие из начала координат параллельно оси $0X$ в положительном направлении. Зеркало пересекает ось $0X$ в точке $-\frac{1}{2}$.

Ответ: $y^2 = 1 + 2x$.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

к домашним заданиям
по дисциплине «Высшая математика»,
для студентов дневного отделения

Авторы-составители: **Зыкунов Владимир Александрович,**
Черниченко Юрий Дмитриевич

Редактор О. Н. Сакунова
Компьютерная верстка В. В. Камелицкий

Подписано в печать 29.03.2000.
Формат 60x84/$_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Усл. печ. л. 4,7. Уч.-изд. л. 3,41. Тираж 700 экз.
Заказ № 26/111.

Гомельский государственный технический университет
имени П. О. Сухого.
Лицензия ЛВ № 399 от 14.07.99.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.

Отпечатано на ризографическом оборудовании
Гомельского государственного технического университета
имени П. О. Сухого.
Лицензия ЛП № 114 от 01.07.99.
246746, г. Гомель, пр. Октября, 48.